

# DIE DYNAMIK DER SYSTEME STARRER KÖRPER

IN ZWEI BÄNDEN MIT ZAHLREICHEN BEISPIELEN

VON

**EDWARD JOHN ROUTH,**

SC. D., LL. D., F. R. S., ETC.

LEHRSTUHLGEHEILIGER VON PETTICORNE, CAMBRIDGE; MITGLIED DER SENATE DER UNIVERSITÄT LONDON.

AUTORISIERTE DEUTSCHE AUSGABE

VON

**ADOLF SCHEPP,**

LEHRSTUHLGEHEILIGER VON ZU WILHELMSTADT.

MIT EINEM VORWORT VON Prof. Dr. FELIX KLEIN zu GÖTTINGEN.

ERSTER BAND:

DIE ELEMENTE.

MIT 67 FIGUREN IM TEXT.



LEIPZIG,

DRUCK UND VERLAG VON B. G. TEUBNER.

1898.

PROPERTY OF  
CARNEGIE INSTIT. OF TECHNOLOGY  
LIBRARY

531.3  
R76A.  
v.1

ALLE RECHTE,  
EINSCHLIESSLICH DES ÜBERSETZUNGSRECHTS, VORBEHALTEN.



## Vorwort.

---

Eine der merkwürdigsten Thatsachen auf dem Gebiete der mathematischen Literatur ist die weitgehende Trennung, die zwischen den englischen Publicationen auf der einen Seite und denen der übrigen europäischen Nationen andererseits besteht, und die sich in den letzten Decennien, wenn wir von ganz modernen Ansätzen absehen, eher verschärft als gemildert hat. Man wird von vornherein voraussetzen dürfen, dass vermöge dieser Trennung einer jeden der beiden in Vergleich kommenden Parteien zahlreiche und werthvolle Anregungen entgehen. Die hiermit angedeuteten Ueberlegungen dürften für das deutsche Publikum kaum an irgend einem Werke überzeugender hervortreten, als an Routh's Dynamik der Systeme starrer Körper, deren ersten Theil wir hiermit in Uebersetzung vorlegen. In England und den englisch redenden Ländern ist dieses Buch (welches jetzt dort in sechster Auflage erscheint) längst überall verbreitet; es ist das allgemeine, normale Lehrbuch der Mechanik; — in Deutschland aber dürfte dasselbe, trotz gelegentlicher Hinweise, die man neuerdings in der Fachliteratur findet, immer noch so gut wie unbekannt sein. Und doch überzeugt eine auch nur flüchtige Durchsicht allein des vorliegenden Bandes, dass wir es mit einem Werke der ausgeprägtesten Eigenart zu thun haben, welches vermöge der Fülle seiner allgemein verständlichen nach allen Richtungen ausgreifenden Beispiele für einen Jeden, der sich nicht auf die abstracten Principien beschränken will, sondern die Anwendung der Principien auf concrete Probleme erfassen möchte, von der weitgehendsten Bedeutung sein muss.

In der That nimmt das Werk von Routh auch innerhalb der englischen Lehrbuchliteratur eine ganz spezifische Stellung ein. Dasselbe ist, man möchte sagen, das folgerichtige Erzeugniss der an der Universität Cambridge entwickelten und herrschenden Unterrichtsmethode, deren anerkannter Meister der Verfasser seit vielen Jahren gewesen ist. Indem diese Methode den grössten Nachdruck auf die Durcharbeitung der einzelnen Anwendungen legt, bringt sie die Fähigkeiten des Lernenden nach bestimmter Richtung ohne Zweifel zu ausserordentlicher Entwicklung. Dafür tritt Anderes zurück, was wir in unseren deutschen akademischen Vorlesungen in erster Linie anzustreben pflegen: der systematische Aufbau, der allgemeine Ueberblick und die Anregung zur eigenen selbständigen Ideenbildung. Man kann die Vorzüge, welche

unsere deutsche Methode in dieser Hinsicht besitzen mag, voll anerkennen, ohne darum zu übersehen, dass die englische Methode daneben, sozusagen als Ergänzung, ihre ausserordentliche Bedeutung besitzt. Dies jedenfalls ist die Auffassung, von der aus wir das Werk von Routh dem deutschen Publikum auf das Angelegentlichste empfehlen wollen.

Was den besonderen Inhalt des vorliegenden Bandes betrifft, so sei hier nur auf das Kapitel VIII, welches von den Lagrange'schen Gleichungen handelt, verwiesen. Die dort gelehrt Methode der *modificirten* Lagrange'schen Function (bei der man nur einige der Geschwindigkeitscoordinaten  $q'$  durch die entsprechenden Impulscoordinaten  $p$  ersetzt) wird heutzutage in der Theorie der „cyclischen“ Systeme allgemein auch von deutschen Forschern angewandt (Helmholtz, Hertz etc.); es dürfte aber kaum allgemein bekannt sein, dass diese Methode schon vor 20 Jahren von Routh entwickelt wurde, nämlich in der 1877 erschienenen Preisschrift: *A treatise on the stability of a given state of motion*.

Zum Schlusse noch die Bemerkung, dass die sehr correcte Uebersetzung des englischen Originals, welche Hr. Schepp in dankenswerther Weise geliefert hat, vor dem endgültigen Abdruck von Hrn. Dr. Liebmann dahier und mir durchgegangen worden ist, wobei sich als wünschenswerth herausstellte, die Entwicklungen des Verfassers verschiedentlich durch Hinweis auf nicht-englische Literatur zu ergänzen. Auf diese Weise ist der diesem Bande beigelegte Anhang entstanden, der allerdings auf Vollständigkeit in keiner Weise Anspruch machen kann.

Göttingen, den 11. October 1897.

F. Klein.

---

Dem Vorwort des Herrn Prof. Klein fügen wir hinzu, was der Verfasser in der Vorrede zur sechsten Auflage seines Buches: *The elementary part of a treatise on the dynamics of a system of rigid bodies, being part 1 of a treatise on the whole subject. With numerous examples by E. J. Routh, sixth edition, London: Macmillan and Co., New-York: the Macmillan Company, 1897* über die Anordnung des Stoffes sagt.

Das ganze Werk ist in zwei Theile getrennt worden. In dem ersten Band werden die Grundprincipien der Dynamik nebst den mehr elementaren Anwendungen gegeben, während die schwierigeren Theorien und Probleme dem zweiten Theil vorbehalten sind. Manchmal ist ein specieller Fall eines Problems, wie z. B. die kleinen Schwingungen eines verticalen Kreisels oder die Bewegung einer Kugel auf einer rauhen Ebene, elementar genug, um ihn in diesem Band behandeln zu können, während die allgemeine Theorie erst in dem nächsten folgt. Um den Plan des Buches verständlich zu machen, ist dem Inhaltsverzeichniss

eine kurze Uebersicht über die in dem zweiten Band behandelten Gegenstände beigelegt worden.

Jedes Kapitel wurde möglichst vollständig gemacht, so dass der Leser Alles, was sich auf irgend einen Theil des in ihm behandelten Gegenstandes bezieht, an derselben Stelle findet. Es schien dies von Vortheil für diejenigen zu sein, welche mit der Dynamik schon bekannt sind, da es ihnen gestattet, sich den Theil auszusuchen, der ihr Interesse am Meisten erweckt. Aber auch dem Anfänger wird es dadurch ermöglicht, sich seinen Studienplan selbständig zu wählen. Er wünscht vielleicht nicht, wenn er das Studium der Dynamik beginnt, durch ein rein analytisches Kapitel aufgehalten zu werden, ehe er zu dem eigentlichen Gegenstand des Buches kommt. So kann er gleich mit dem D'Alembert'schen Princip beginnen und nur die Theile des ersten Kapitels nachlesen, auf welche verwiesen wird oder er kann möglichst bald zu den grossen Principien der Flächen und der lebendigen Kraft übergehen. Diejenigen, welchen der Gegenstand vollständig neu ist, finden ein Verzeichniss der Paragraphen, welche sie am besten *zuerst* lesen würden, hinter dem Inhaltsverzeichniss.

Ein besonderes Kapitel ist der Bewegung in der Ebene gewidmet; der Verfasser hat damit die Schwierigkeiten der Dynamik von denen der Raumgeometrie trennen wollen.

Zu jedem Kapitel wurden zahlreiche Beispiele gegeben, von denen viele sehr leicht, andere dagegen für Vorgeschriftene bestimmt sind. Um eine möglichst grosse Abwechslung zu bieten, ist eine Sammlung von Problemen, die den an der Universität Cambridge und den Colleges gegebenen Examination Papers entnommen sind, dem Ende eines jeden Kapitels beigelegt worden. Da die Probleme von vielen verschiedenen Examinatoren ausgearbeitet wurden, so wird sich der Studirende mit ihrer Hülfe Gewandtheit in der Auflösung aller Arten von dynamischen Fragen erwerben können.

Bei der Auswahl der Beispiele hat der Verfasser in erster Linie darauf gesehen, dass sie sich genau dem Princip anschliessen, zu dessen Erläuterung sie dienen sollen. Zugleich wurden solche Maschinen für die Anwendung der Sätze ausgesucht, die im Gebrauch sind und sich bewährt haben. Jedes praktische Instrument, das eine so lange Beschreibung nicht erfordert, dass es zur Erläuterung untauglich wird, wurde vielleicht interessanten aber gekünstelten Constructionen vorgezogen. —

So weit der Verfasser. Was die Uebersetzung angeht, so haben wir Folgendes zu bemerken.

*Punkte* zum Bezeichnen der Differentialquotienten nach der Zeit, wie es theilweise im Original geschehen ist, haben wir nicht benutzt, weil sie leicht zu Verwechslungen Veranlassung geben und bei uns wenig im Gebrauch sind. — Der Verfasser nennt *lebendige Kraft* das Product aus der Masse und dem Quadrat der Geschwindigkeit, während

wir, weil es in Deutschland gebräuchlicher ist, unter lebendiger Kraft das halbe Product verstehen. Vergl. die Anm. auf S. 315. — Die englischen Maasse, Gewichte etc. sind, soweit es angemessen erschien, in deutsche umgewandelt worden. — Hier und da haben wir einige Zusätze gemacht, die sich auf die Literatur beziehen. (Die beiden Fussnoten auf S. 78 und 144 sind von Herrn Dr. Liebmann.) — An einigen Stellen haben gewisse Ausdrücke, wie z. B. *excentric lines* (§ 40), *area conserved* (§ 77 des Originals und 76 der Uebersetzung) u. A. eine nähere Erklärung nöthig gemacht. — An dem Ende des Bandes haben wir als Ersatz für das Register im Original ein möglichst vollständiges Sach- und davon getrenntes Namenregister hinzugefügt, welches, wie wir hoffen, die Benutzung des Buches erleichtern wird.

Im Uebrigen entspricht die Bearbeitung durchaus der sechsten Auflage des Originals. Bei der Uebersetzung freilich war diese Auflage noch nicht erschienen. Wir sind dem Verfasser, Herrn Dr. Routh, für die Freundlichkeit, mit welcher er uns zuerst seine Veränderungen und Zusätze zur fünften Auflage und später die Druckbogen der sechsten Auflage zur Verfügung stellte, sowie dem Verfasser und englischen Verleger für die Ueberlassung des Uebersetzungsrechts zu Dank verpflichtet. Zum Schluss möchten wir noch Herrn Prof. Klein, der das Vorwort geschrieben, die zweite Correctur durchgesehen und den Anhang über die Literatur am Ende des Bandes hinzugefügt hat, sowie Herrn Dr. Liebmann in Göttingen für seine Mitwirkung dabei unsern herzlichsten Dank aussprechen.

Wiesbaden, den 14. October 1897.

A. Schepp.

# Inhaltsverzeichniss.

— — — — —

## Kapitel I.

### Trägheitsmomente.

Se.		Seite
1—2.	Ueber die Ermittlung der Trägheitsmomente durch Integration . . . . .	1
3—9.	Definitionen, Elementarsätze und Tabelle . . . . .	2—9
10—11.	Differentiationmethode . . . . .	9—10
12—14.	Der Satz über die parallelen Axen . . . . .	10—12
15—17.	Der Satz von den sechs Constanten eines Körpers . . . . .	12—15
18.	Die Methode der Axentransformation . . . . .	15—16
19—32.	Die Trägheitsellipsoide, Invarianten, etc. . . . .	17—24
33—39.	Körper gleichen Trägheitsmoments, Dreieck, Tetraeder, etc. (Siehe die Note auf Seite 461) . . . . .	24—29
40—44.	Affine Transformationen . . . . .	29—32
45.	Momente von höherer Potenz. (Siehe das Fehlerverzeichniss) . . . . .	32—33
46.	Die Theorie der Inversion . . . . .	34—35
47.	Das Druckcentrum . . . . .	35—37
48—51.	Die Hauptachsen der Systeme . . . . .	37—39
52—53.	Trägheit Brennpunkte. . . . .	40—42
56—59.	Die Anordnung der Hauptachsen . . . . .	42—45
60—61.	Die Bedingung dafür, dass eine Gerade eine Hauptaxe ist. . . . .	45—47
62—63.	Der Ort gleicher Momente, die Fläche gleichen Momentes etc. . . . .	47—51

## Kapitel II.

### Das D'Alembert'sche Princip etc.

66—77.	Das D'Alembert'sche Princip und die Bewegungsgleichungen . . . . .	52—63
78—81.	Unabhängigkeit von Translation und Rotation . . . . .	63—65
82.	Allgemeine Methode der Anwendung des D'Alembert'schen Princip's . . . . .	65—66
83—86.	Momentenkräfte . . . . .	66—69
87.	Beispiele . . . . .	70—71

## Kapitel III.

### Bewegung um eine feste Axe.

88—91.	Die Fundamentalaufgabe . . . . .	72—74
92—93.	Das Pendel und der Schwingungsmittelpunkt . . . . .	74—77
94—96.	Die Einwirkung der Temperaturwechsel und der Auftrieb der Luft . . . . .	78—81
97.	Durch Versuche ermittelte Trägheitsmomente . . . . .	81—82
98—105.	Die Länge des Sekundenpendels mit der Correction für den Widerstand der Luft . . . . .	82—87
106—107.	Die Construction eines Pendels . . . . .	87—89
108.	Das Pendel als Normallänge . . . . .	89—90
109.	Schwingung der Urthe einer Uhr. . . . .	90—93

§§		Seite
110—113.	Der Druck auf die feste Axe. Symmetrische und nicht symmetrische Körper. Momentankräfte . . . . .	93—97
114—115.	Analyse der erhaltenen Resultate . . . . .	97—100
116.	Dynamische und geometrische Symmetrie . . . . .	100
117—119.	Permanente Rotationsachsen, Anfangsachsen . . . . .	100—103
120.	Der Mittelpunkt des Stosses . . . . .	103—105
121—125.	Das ballistische Pendel . . . . .	105—109
126—129.	Das Anemometer . . . . .	109—111

## Kapitel IV.

## Ebene Bewegung.

130—133.	Die Bewegungsgleichungen . . . . .	112—115
134.	Die Winkelbewegungsgrösse . . . . .	115—116
135—138.	Lösungsmethode durch Differentiation . . . . .	116—121
139—143.	Lebendige Kraft, Kräftefunction und Arbeit . . . . .	121—126
144—148.	Beispiele mit Auflösung . . . . .	126—136
149.	Die charakteristischen Merkmale sich bewegender Körper . . . . .	136—138
150—152.	Die Spannung an einem Punkt eines Stabes . . . . .	138—141
153—157.	Die Reibungsgesetze . . . . .	141—145
158—160.	Die Unstetigkeit der Reibung und unbestimmte Bewegung . . . . .	145—146
161—163.	Eine Kugel auf einer unvollkommenen rauhen Ebene . . . . .	146—149
164.	Reibungspaare . . . . .	149—150
165—166.	Die Reibung eines Wagens und andere Beispiele . . . . .	150—153
167.	Die Steifheit von Seilen . . . . .	153
168—169.	Momentankräfte, allgemeine Principien . . . . .	153—154
170—175.	Beispiele von plötzlicher Bewegungsänderung; Haspel, Kugel, Scheibe, Säule etc., Erdbeben . . . . .	155—159
176—178.	Zusammenstoss zusammengesetzter unelastischer Körper . . . . .	159—163
179—180.	Zusammenstoss glatter elastischer Körper (siehe § 404) . . . . .	163—165
181—198.	Das allgemeine Problem des Zusammenstosses zweier glatter oder rauher, elastischer oder unelastischer Körper. Der darstellende Punkt . . . . .	165—180
199—202.	Anfangsbewegungen . . . . .	180—186
203—213.	Relative Bewegung und sich bewegendes Axen . . . . .	186—196
	Beispiele . . . . .	196—202

## Kapitel V.

## Die Bewegung im Raum von drei Dimensionen.

214—228.	Translation und Rotation. Reductionspunkt, Centralaxe . . . . .	203—209
229—234.	Zusammensetzung von Rotationen etc. . . . .	209—212
235—237.	Die Analogie mit der Statik . . . . .	213—215
238—239.	Die Geschwindigkeit der Punkte . . . . .	215—216
240—247.	Zusammensetzung von Schraubenbewegungen etc. . . . .	217—224
248—259.	Sich bewegendes Axen und die Euler'schen Gleichungen . . . . .	224—232
260.	Centrifugale Kräfte . . . . .	232—233
261—267.	Die Winkelbewegungsgrösse bei festen oder beweglichen Axen . . . . .	233—241
268—270.	Der Kreisel und die Kugel als Beispiele. Siehe Bd. 2 . . . . .	241—246
271—281.	Endliche Rotationen. Der Rodriguez'sche und Sylvester'sche Satz. Schraubenbewegungen etc. . . . .	246—253

## Kapitel VI.

## Die Bewegungsgrösse.

282—283.	Der Fundamentalsatz . . . . .	254—256
284—286.	Sich anziehende Massenpunkte. Laplace. Jacobi . . . . .	256—263

	Seite
287. Lebende Wesen . . . . .	263—265
288—298. Plötzliche Fixirungen und Aenderungen . . . . .	265—271
299. Allmälige Aenderungen . . . . .	271—273
300. Die Bewegung eines Fadens etc. . . . .	273—276
301—305. Die invariable Ebene . . . . .	276—281
306—314. Momentankräfte in dem Raum von drei Dimensionen . . . . .	281—286
315—331. Das allgemeine Problem des Zusammenstosses zweier Körper in dem Raum von drei Dimensionen für glatte oder raue, elastische oder unelastische Körper. Der darstellende Punkt . . . . .	286—297
Beispiele . . . . .	297—300

## Kapitel VII.

### Die lebendige Kraft.

332—341. Die Kräftefunction und die Arbeit . . . . .	301—306
342. Die Arbeit der Schwere, Arbeitseinheiten . . . . .	306—307
343. Die Arbeit eines elastischen Fadens . . . . .	307—308
344. Die bei der Vereinigung von Körpern verrichtete Arbeit . . . . .	308—311
345. Die Arbeit des Druckes gasförmiger Körper . . . . .	311—312
346. Die Arbeit der Momentankräfte . . . . .	312—313
347. Die Arbeit einer Membrane . . . . .	313—314
348—349. Die Arbeit beim Biegen eines Stabes . . . . .	314—315
350—362. Das Princip der lebendigen Kraft, potentielle und kinetische Energie . . . . .	315—322
363—364. Ausdrücke für die lebendige Kraft eines Körpers . . . . .	322—324
365—366. Theoreme und Beispiele über die lebendige Kraft . . . . .	324—327
367—370. Das Princip der Aehnlichkeit. Modelle . . . . .	327—330
371. Froude's Theorem . . . . .	330—331
372. Savart's Theorem . . . . .	331
373. Imaginäre Zeit . . . . .	331—332
374. Die Theorie der Dimensionen . . . . .	332—333
375—376. Die Clausius'sche Theorie der stationären Bewegung. Das Virial . . . . .	333—335
377—381. Die Carnot'schen Theoreme . . . . .	335—337
382—386. Die Gleichung der virtuellen Arbeit bei Momentankräften . . . . .	337—340
387—388. Kelvin's Theorem, Bertrand's Theorem. Beispiele . . . . .	340—343
389. Unvollkommen elastische und raue Körper . . . . .	343—345
390—394. Das Gauss'sche Princip des kleinsten Zwanges . . . . .	345—348
Beispiele . . . . .	348—352

## Kapitel VIII.

### Die Lagrange'schen Gleichungen.

395—399. Die typische Gleichung für endliche Kräfte. Siehe die Note S. 462 . . . . .	353—358
400. Unbestimmte Multiplicatoren . . . . .	358—359
401—404. Die Lagrange'schen Gleichungen für Momentankräfte . . . . .	359—363
405. Das gleichwerthige Pendel als Beispiel . . . . .	363—365
406. Die Euler'schen Gleichungen etc. . . . .	365—366
407. Die lebendige Kraft, Liouville's Integrale und elliptische Coordinten . . . . .	366—367
408. Beispiele zu den Momentankräften . . . . .	367—369
409—413. Die reciproke Function . . . . .	369—372
414—417. Die Hamilton'schen Gleichungen . . . . .	372—375
418—421. Die modifizierte Lagrange'sche Function. Ihre Benutzung zur Bildung der Lagrange'schen und Hamilton'schen Gleichungen . . . . .	375—377

§§		Seite
422—425.	Coordinaten, die nur als Geschwindigkeiten auftreten . . .	378—380
426—428.	Nicht conservative Kräfte . . . . .	380—382
429—430.	Geometrische Gleichungen, welche Differentialquotienten nach der Zeit enthalten . . . . .	382—384
431.	Die Transformation der unabhängigen Variablen . . . . .	384—386
	Beispiele . . . . .	386—387

## Kapitel IX.

## Kleine Schwingungen.

432—438.	Oscillationen mit einem Freiheitsgrad . . . . .	388—392
439—440.	Momente um die Momentanaxe. Siehe § 448 . . . . .	392—394
441—444.	Schwingungen von Cylindern, der Stabilitätskreis . . . . .	394—397
445.	Schwingungen eines von zwei Curven geführten Körpers . . . . .	397—398
446.	Die Schwingung, wenn die Bahn des Schwerpunktes bekannt ist . . . . .	398—399
447.	Ermittelung der Schwingungen durch die lebendige Kraft . . . . .	399—400
448.	Momente um die Momentanaxe . . . . .	400—401
449—452.	Aus den gewöhnlichen Bewegungsgleichungen abgeleitete Schwingungen . . . . .	401—405
453—462.	Die Lagrange'sche Methode . . . . .	406—420
463—466.	Anfangsbewegungen . . . . .	420—423
467—469.	Die Energie als Kriterium der Stabilität . . . . .	424—427
470—476.	Das Cavenish'sche Experiment . . . . .	427—433
	Beispiele . . . . .	433—436

## Kapitel X.

## Einige specielle Probleme.

477.	Schwingungen eines schaukelnden Körpers in dem Raum von drei Dimensionen . . . . .	437
478—479.	Die relative Indicatrix . . . . .	437—438
480—482.	Der Stabilitätscylinder und die Schwingungsdauer . . . . .	438—440
483—487.	Schwingungen rauher aneinander rollender Kegel in erster Näherung . . . . .	440—444
488—490.	Grosse tautochrone Bewegungen . . . . .	444—447
491—492.	Die Wirkung widerstehender Mittel . . . . .	447—448
493.	Die raue Cycloide, widerstehendes Mittel . . . . .	448—450
494.	Historische Uebersicht . . . . .	450
495.	Die Bewegung auf einer beliebigen rauhen Curve in einem widerstehenden Mittel ( $k'v^2$ ) unter dem Einfluss beliebiger Kräfte . . . . .	450—452
496.	Euler's Theorem . . . . .	452
497.	Die Bewegungszeit . . . . .	452—453
498.	Bei einer Centralkraft $1r$ und dem Widerstand $2kv$ ist die raue Tautochrone $\rho = ip$ . Discussion . . . . .	453—454
499.	Appell's Theorem . . . . .	454
500—510.	Stabilitätsbedingungen und Schwingungsdauer rauher Cy- linder bis zu Näherungen beliebiger Ordnung . . . . .	454—460

## Noten.

1)	Ueber die vier äquivalenten Punkte eines Körpers . . . . .	461—462
2)	Ueber den Beweis der Lagrange'schen Gleichungen . . . . .	462—464
	Anmerkungen zur Uebersetzung . . . . .	465



## Kurze Angabe des Inhalts des zweiten Bandes.

- Die Theorie beweglicher Axen; das Clairaut'sche Theorem und die relative Bewegung in Bezug auf die Erde.
- Die Theorie kleiner Schwingungen mit verschiedenen Freiheitsgraden sowohl um eine Gleichgewichtslage als um einen Zustand stationärer Bewegung.
- Die Bewegung der Körper um einen festen Punkt, wenn keine Kräfte an ihm angrreifen.
- Die Bewegung der Körper unter der Wirkung beliebiger Kräfte.
- Die linearen Gleichungen; die Bedingungen, unter welchen die Potenzen der Zeit fehlen und die Stabilitätsbedingungen.
- Die Theorie der freien und erzwungenen Schwingungen.
- Die Methoden der Isolirung und der Multiplikatoren.
- Die Anwendung der Rechnung mit endlichen Differenzen.
- Die Anwendung der Variationsrechnung.
- Präcession und Nutation.
- Die Bewegung eines Fadens oder einer Kette.
- Die Bewegung der Membrane.

Anfängern, denen der Gegenstand vollkommen neu ist, wird gerathen, *zuerst* die folgenden Paragraphen zu lesen: Kapitel I, 1–25, 33–36, 47–52. Kapitel II, 66–74. Kapitel III, 88–93, 98–104, 110, 112–118. Kapitel IV, 130–164, 168–175, 179–186, 199. Kapitel V, 214–245, 248–256, 264–269. Kapitel VI, 282–285, 287–296, 299–309. Kapitel VII, 332–373. Kapitel VIII, 395–409. Kapitel IX, 432–463, 467–476. Kapitel X, 483, 488–499.

**Man bittet die folgenden Fehler zu corrigiren:**

S. 1, Z. 3 v. u. schreibe „Buch“ statt „Kapitel“.

S. 8, Beisp. 6 setze ein einfaches Integralzeichen statt des doppelten.

S. 9, § 11 und S. 10, Beisp. 2 setze „nicht homogen“ statt „heterogen“.

S. 15, Beisp. 11. Statt: „Nimmt man als Dreieckscoordinaten die Inhalte der Dreiecke u. s. w.“ setze „Nimmt man als Dreieckscoordinaten die Verhältnisse der Inhalte der Dreiecke u. s. w. zu dem ganzen Dreieck“.

S. 33, § 45 ändere man die Formeln für das Viereck und zwei verbundene Tetraeder in die folgenden um

$$\int z^n d\sigma = \frac{1 \cdot 2 \Delta}{(n+1)(n+2)} \{ S_n(z_1 z_2 z_3 z_4) - z' S_{n-1}(z_1 z_2 z_3 z_4) \} ,$$

$$\int z^n d\sigma = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 V}{(n+1)(n+2)(n+3)} \{ S_n(z_1 z_2 z_3 z_4 z_5) - z' S_{n-1}(z_1 z_2 z_3 z_4 z_5) \} ,$$

worin  $S_n$  die Summe der verschiedenen Combinationen mit Wiederholungen zur  $n^{\text{ten}}$  Classe von  $z_1 z_2$  etc. bezeichnet. Man kann den Formeln für das Dreieck und Tetraeder auch die Form geben

$$\int z^n d\sigma = \frac{1 \cdot 2 \Delta}{(n+1)(n+2)} S_n(z_1 z_2 z_3)$$

$$\int z^n d\sigma = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 V}{(n+1)(n+2)(n+3)} S_n(z_1 z_2 z_3 z_4).$$

S. 92, Z. 12 v. u. setze Phillips statt Philipps.

S. 96, Z. 14 v. o. lies  $\Sigma xz$  statt  $\Sigma xy$ .

S. 106, Z. 17 v. o. lies Bashforth statt Bashford.

S. 144, Z. 5 v. u. lies Jellett statt Jelett.

S. 384, Z. 4 v. u. lies Transformation statt Vertauschung.

## Kapitel I.

### Trägheitsmomente.

§ 1. Man wird beim Studium der Dynamik finden, dass gewisse Integrale sich beständig wiederholen. Es ist deshalb angezeigt, sie in einem einleitenden Kapitel zum Nachschlagen zusammenzustellen. Wenn auch ihr Zusammenhang mit der Dynamik vor der Hand noch nicht einleuchten mag, so kann sich doch der Studirende versichert halten, dass es ebenso vortheilhaft für ihn ist Trägheitsmomente mit Leichtigkeit niederschreiben, als die Schwerpunkte der Elementarkörper angeben zu können.

Zu den nothwendigen Sätzen kommen jedoch noch viele andere, die eine bessere Uebersicht über die Lage der Trägheitsachsen in einem Körper geben. Auch diese sind hier aufgeführt, obwohl sie nicht von derselben Wichtigkeit sind wie die ersten.

§ 2. Alle in der Dynamik sowohl als der Statik und einigen anderen Zweigen der angewandten Mathematik vorkommenden Integrale sind in der einen Form

$$\iiint x^\alpha y^\beta z^\gamma dx dy dz$$

enthalten, worin  $(\alpha, \beta, \gamma)$  specielle Werthe haben. In der Statik sind zwei dieser drei Exponenten in der Regel Null und der dritte ist entweder die Einheit oder Null, je nachdem der Zähler oder Nenner einer Coordinate des Schwerpunkts gesucht wird. In der Dynamik ist von den drei Exponenten der eine Null und die Summe der beiden andern gewöhnlich 2. Das Integral in seiner ganzen Allgemeinheit ist noch nicht vollständig discutirt worden, wahrscheinlich weil nur gewisse Fälle reellen Nutzen haben. In dem Fall, in welchem der betrachtete Körper ein homogenes Ellipsoid ist, hat Lejeune-Dirichlet (Bd. IV von Liouville's Journal) den Werth des allgemeinen Integrals in Gammafunktionen gefunden. Seine Resultate hat später Liouville in demselben Band auf den Fall eines heterogenen Ellipsoids ausgedehnt, in welchem die Schichten gleicher Dichtigkeit ähnliche Ellipsoide sind.

In diesem Kapitel werden wir uns hauptsächlich auf die Betrachtung der Trägheits- und Deviationsmomente beschränken, da nur in diesen Fällen das Integral in der Dynamik Verwendung findet.

§ 3. **Definitionen.** Wenn die Masse eines jeden Punktes eines materiellen Systems mit dem Quadrat des Abstandes des Punktes von einer graden Linie multiplicirt wird, so heisst die Summe der Producte das *Trägheitsmoment* des Systems für diese Linie.

Ist  $M$  die Masse eines Systems und  $k$  eine solche Grösse, dass  $Mk^2$  das Trägheitsmoment des Systems bezüglich einer gegebenen graden Linie ist, so heisst  $k$  der *Trägheitsradius* des Systems für diese Linie.

Der Name „Trägheitsmoment“ rührt von Euler her und wird jetzt überall gebraucht, wo die Dynamik starrer Körper studirt wird. Wir werden noch die folgenden Ausdrücke gebrauchen:

Wenn die Masse eines jeden Punktes eines materiellen Systems mit dem Quadrat des Abstandes des Punktes von einer gegebenen Ebene oder einem gegebenen Punkt multiplicirt wird, so heisst die Summe dieser Producte das Trägheitsmoment des Systems in Bezug auf diese Ebene oder diesen Punkt.

Wenn zwei grade Linien  $Ox$ ,  $Oy$  zu Axen genommen werden und wenn die Masse eines jeden Systempunktes mit seinen beiden Coordinaten  $x$ ,  $y$  multiplicirt wird, so heisst die Summe dieser Producte das *Deviationsmoment*<sup>1)</sup> des Systems bezüglich dieser beiden Axen.

Es würde vielleicht passender gewesen sein, es das Deviationsmoment des Systems bezüglich der beiden Coordinatenebenen  $xz$ ,  $yz$  zu nennen.

Der Ausdruck „Trägheitsmomente in Bezug auf eine Ebene“ wurde zuerst von Binet gebraucht. Sie werden deshalb auch Binet'sche Trägheitsmomente genannt. Siehe Binet „Mémoire sur la théorie des axes conjugués et des moments d'inertie“, J. de l'éc. polyt. cah. XVI.

§ 4. Ein Körper möge auf beliebige rechtwinklige Axen  $Ox$ ,  $Oy$ ,  $Oz$  bezogen werden, die sich im Punkt  $O$  schneiden und  $x$ ,  $y$ ,  $z$  seien die Coordinaten eines materiellen Punktes  $m$ , dann sind nach diesen Definitionen die Trägheitsmomente bezüglich der Axen der  $x$ ,  $y$ ,  $z$ :

$$A = \Sigma m(y^2 + z^2), \quad B = \Sigma m(z^2 + x^2), \quad C = \Sigma m(x^2 + y^2),$$

bezüglich der Ebenen  $yz$ ,  $zx$ ,  $xy$ :

$$A' = \Sigma mx^2, \quad B' = \Sigma my^2, \quad C' = \Sigma mz^2,$$

die Deviationsmomente bezüglich der Axen  $yz$ ,  $zx$ ,  $xy$ :

$$D = \Sigma myz, \quad E = \Sigma mzx, \quad F = \Sigma mxy$$

und schliesslich das Trägheitsmoment für den Coordinatenanfang:

$$H = \Sigma m(x^2 + y^2 + z^2) = \Sigma mr^2,$$

wenn  $r$  der Abstand des Punktes  $m$  vom Coordinatenanfang ist.

1) Rankine, a manual of applied mechanics. 3. ed. p. 522. Hâton de la Goupillière im Journ. de l'éc. polyt. XXXVII.

§ 5. Elementarsätze. Von der Richtigkeit der folgenden Sätze kann man sich leicht überzeugen; sie mögen als Erläuterungen zu den vorstehenden Definitionen dienen.

(1) Die drei Trägheitsmomente  $A, B, C$  bezüglich dreier rechtwinkliger Axen sind der Art, dass die Summe von irgend zwei von ihnen grösser ist als das dritte.

Denn  $A + B - C = 2 \Sigma m z^2$  ist positiv.

(2) Die Summe der Trägheitsmomente bez. beliebiger drei rechtwinkliger Axen, die sich in einem gegebenen Punkt schneiden, ist immer dieselbe und dem doppelten Trägheitsmoment in Bezug auf diesen Punkt gleich.

Denn  $A + B + C = 2 \Sigma m (x^2 + y^2 + z^2) = 2 \Sigma m r^2$  ist unabhängig von der Richtung der Axen.

(3) Die Summe der Trägheitsmomente eines Systems bez. einer jeden Ebene, die durch einen gegebenen Punkt geht und bez. der in diesem Punkt auf der Ebene errichteten Normalen ist constant und dem Trägheitsmoment des Systems bez. dieses Punktes gleich.

Man nehme den gegebenen Punkt zum Coordinatenanfang und die Ebene zur  $xy$  Ebene, dann ist  $C' = \Sigma m r^2$  unabhängig von der Richtung der Axen.

Daraus folgt, dass:

$$A' = \frac{1}{2} (B + C - A), \quad B' = \frac{1}{2} (C + A - B), \quad C' = \frac{1}{2} (A + B - C).$$

(4) Irgend ein Deviationsmoment z. B.  $D$  kann numerisch nicht so gross als  $\frac{1}{2} A$  sein.

(5) Sind  $A, B, P$  die Trägheitsmomente und das Deviationsmoment einer Lamelle (unendlich dünnen Schicht) bez. zweier rechtwinkliger Axen, die in ihrer Ebene liegen, so ist  $AB$  grösser als  $P^2$ .

Setzt man irgend eine Grösse, so ist  $At^2 + 2Pt + B - \Sigma m(yt + xz)^2$  positiv. Daher sind die Wurzeln der quadratischen Gleichung  $At^2 + 2Pt + B = 0$  imaginär, also  $AB > P^2$ .

(6) Man beweise, dass für jeden Körper

$$(A + B - C)(B + C - A) > 4E^2$$

$$(A + B - C)(B + C - A)(C + A - B) > 8DEF \text{ ist.}$$

(7) Das Trägheitsmoment der Oberfläche einer Kugel vom Radius  $a$  und der Masse  $M$  für einen Durchmesser ist  $\frac{2}{3} Ma^2$ .

Da jedes Element den gleichen Abstand vom Centrum hat, so ist das Trägheitsmoment bez. des Centrums  $Ma^2$ . Aus (2) ergibt sich dann das Resultat.

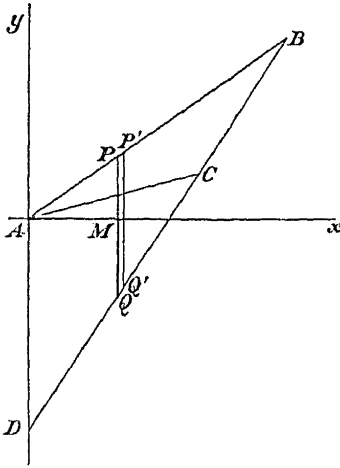
(8) Das Trägheitsmoment der Oberfläche einer Halbkugel vom Radius  $a$  und der Masse  $M$  ist für jeden Durchmesser  $\frac{2}{3} Ma^2$ .

Es folgt dies aus (7), wenn man die Halbkugel zur Kugel vervollständigt.

§ 6. Es ist klar, dass das Verfahren beim Aufsuchen von Trägheits- und Deviationsmomenten lediglich in der Integration besteht. Wir wollen dies an dem folgenden Beispiel erläutern.

Das Trägheitsmoment einer gleichförmigen dreieckigen Platte bez. einer in ihrer Ebene liegenden durch einen Eckpunkt gehenden Axe zu finden.

$BAC$  sei das Dreieck,  $Ay$  die Axe, in Bezug auf welche das Moment gesucht wird. Ziehe  $Ax$  senkrecht zu  $Ay$  und verlängere  $BC$  bis zu seinem Durchschnittspunkt  $D$  mit  $Ay$ . Das gegebene Dreieck  $ABC$  kann als die Differenz der Dreiecke  $ABD$ ,  $ACD$  angesehen werden. Wir wollen zuerst das Trägheitsmoment von  $ABD$  suchen.  $PQP'Q'$  sei ein Flächenelement, dessen Seiten  $PQ$ ,  $P'Q'$  der Basis  $AD$  parallel sind und  $PQ$  schneide  $Ax$  in  $M$ .  $\beta$  sei der Abstand des Eckpunktes  $B$  von der Axe  $Ay$ ,  $AM = x$  und  $AD = l$ .



Dann ist der Inhalt des Flächenelements  $PQP'Q'$  offenbar  $l \frac{\beta - x}{\beta} dx$  und sein Trägheitsmoment in Bezug auf  $Ay$  ist  $\mu l \frac{\beta - x}{\beta} dx \cdot x^2$ , wenn  $\mu$  die Masse pro Flächeneinheit bedeutet.

Das Trägheitsmoment des Dreiecks  $ABD$  ist daher

$$= \mu \int_0^\beta l \left(1 - \frac{x}{\beta}\right) x^2 dx = \frac{1}{12} \mu l \beta^3.$$

Ebenso ist das Trägheitsmoment des Dreiecks  $ACD$ , wenn  $\gamma$  den Abstand des Eckpunktes  $C$  von der Axe  $Ay$  bedeutet,  $\frac{1}{12} \mu l \gamma^3$ . Das Trägheitsmoment des gegebenen Dreiecks  $ABC$  ist also  $\frac{1}{12} \mu l (\beta^3 - \gamma^3)$ . Nun sind  $\frac{1}{2} l \beta$  und  $\frac{1}{2} l \gamma$  die Flächeninhalte der Dreiecke  $ABD$  und  $ACD$ . Ist daher  $M$  die Masse des Dreiecks  $ABC$ , so wird das Trägheitsmoment des Dreiecks in Bezug auf die Axe  $Ay$  gleich  $\frac{1}{6} M (\beta^3 - \gamma^3)$ .

Beisp. Wenn jedes Element der Masse des Dreiecks mit der  $n^{\text{ten}}$  Potenz seines Abstandes von einer geraden Linie durch den Eckpunkt  $A$  multiplicirt wird, so kann auf dieselbe Art bewiesen werden, dass die Summe der Producte

$$\frac{2M}{(n+1)(n+2)} \frac{\beta^{n+1} - \gamma^{n+1}}{\beta - \gamma} \text{ ist.}$$

§ 7. Ist der Körper eine Lamelle, so ist das Trägheitsmoment in Bezug auf eine Axe, die auf ihrer Ebene senkrecht steht, der Summe der

*Trägheitsmomente bez. zweier beliebiger rechtwinkliger Axen gleich, die in der Ebene der Lamelle liegen und von dem Punkt ausgehen, in welchem die erste Axe die Ebene trifft.*

Denn, nehmen wir die  $z$ -Axe senkrecht zur Ebene an, so sind die Trägheitsmomente  $A, B, C$  bezüglich der Axen

$$A = \Sigma m y^2, \quad B = \Sigma m x^2, \quad C = \Sigma m (x^2 + y^2)$$

und deshalb  $C = A + B$ .

Wir können diesen Satz auf das Dreieck anwenden. Sind  $\beta', \gamma'$  die Abstände der Punkte  $B, C$  von der Axe  $Ax$ , so ist das Trägheitsmoment des Dreiecks für eine im Punkt  $A$  auf der Ebene des Dreiecks errichtete Normale

$$= \frac{1}{6} M (\beta^2 + \beta\gamma + \gamma^2 + \beta'^2 + \beta'\gamma' + \gamma'^2).$$

Beisp. Man beweise, dass das Trägheitsmoment des Umfangs eines Kreises vom Radius  $a$  und der Masse  $M$  für jeden Durchmesser  $\frac{1}{2} Ma^2$  ist.

Da jedes Element denselben Abstand von der Axe, dem Loth im Mittelpunkt auf die Ebene des Kreises, hat, so ist das Trägheitsmoment in Bezug auf diese Axe  $Ma^2$ . Das Resultat ergibt sich dann von selbst.

§ 8. Tabelle. Die folgenden Trägheitsmomente kommen so häufig vor, dass sie hier zum Nachschlagen zusammengestellt werden. Man wird gut thun, sie dem Gedächtniss einzuprägen.

Das Trägheitsmoment

- (1) eines Rechtecks von den Seiten  $2a$  und  $2b$  ist  
 bez. einer Axe, die in seiner Ebene liegt, durch  
 sein Centrum geht und senkrecht auf der Seite  
 $2a$  steht  $\left. \begin{array}{l} \text{Masse} \propto a^3, \\ \text{Masse} \propto a^2 + b^2, \end{array} \right\}$   
 bez. einer durch sein Centrum gehenden Axe,  
 die senkrecht auf seiner Ebene steht  $\left. \begin{array}{l} \text{Masse} \propto a^3 + b^3, \\ \text{Masse} \propto a^2 + b^2, \end{array} \right\}$   
 (2) einer Ellipse mit den Halbaxen  $a$  und  $b$   
 bez. der grösseren Halbaxe  $a$   $\text{Masse} \propto \frac{b^2}{4},$   
 bez. der kleineren Halbaxe  $b$   $\text{Masse} \propto \frac{a^2}{4},$   
 bez. einer Axe, die im Mittelpunkt senkrecht  
 auf der Ebene der Ellipse steht  $\left. \begin{array}{l} \text{Masse} \propto a^2 + b^2. \end{array} \right\}$

In dem speciellen Fall des Kreises vom Radius  $a$  ist das Trägheitsmoment bez. eines Durchmessers  $\text{Masse} \propto \frac{a^2}{4},$

bez. einer in seinem Mittelpunkt auf seiner Ebene  
 errichteten Senkrechten  $\left. \begin{array}{l} \text{Masse} \propto a^2. \end{array} \right\}$

(3) eines Ellipsoides von den Halbaxen  $a, b, c$

bez. der Axe  $a$   $\text{Masse} \propto \frac{b^2 + c^2}{6}.$

In dem speciellen Fall der Kugel vom Radius  $a$  ist das Trägheitsmoment bez. eines Durchmessers  $\text{Masse} \propto \frac{2}{5} a^2.$

(4) eines rechteckigen Parallelepipedes mit den Seiten  $2a$ ,  $2b$ ,  $2c$  bez. einer Axe, die durch sein Centrum geht und senkrecht auf der Ebene mit den Seiten  $2b$  und  $2c$  steht  $\left. \vphantom{\begin{matrix} (4) \end{matrix}} \right\} = \text{Masse} \times \frac{b^2 + c^2}{3}$ .

Als Hilfsmittel für das Gedächtniss empfehlen wir folgende Regel:

Trägheitsmoment  
um eine Symmetrie-  
axe  $\left. \vphantom{\begin{matrix} \text{Trägheitsmoment} \end{matrix}} \right\} = \text{Masse} \times \frac{\text{Summe der Quadrate der auf ihr senkrechten Halbaxen}}{3, 4 \text{ oder } 5}$ .

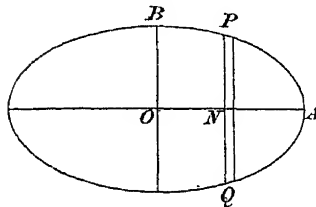
Der Nenner ist 3, 4 oder 5, je nachdem der Körper rechteckig, elliptisch oder ellipsoidisch ist.

Suchen wir z. B. das Trägheitsmoment eines Kreises vom Radius  $a$  bez. eines Durchmessers, so bemerken wir, dass die auf ihm senkrechte in seiner Ebene liegende Halbaxe der Radius  $a$  ist, während die Halbaxe senkrecht auf seiner Ebene Null ist; das Trägheitsmoment ist daher  $M \frac{a^2}{4}$ , wenn  $M$  die Masse bedeutet; wünschen wir das Moment bez. der auf seiner Ebene im Mittelpunkt errichteten Normalen, so bemerken wir, dass von den zu ihr senkrechten Halbaxen jede  $a$  ist; das gesuchte Moment ist daher  $M \frac{a^2 + a^2}{4} = M \frac{a^2}{2}$ .

§ 9. Da die Methode zur Bestimmung der vorstehenden Trägheitsmomente so ziemlich dieselbe bleibt, so begnügen wir uns damit, nur zwei Fälle genauer auszuführen.

*Das Trägheitsmoment der Ellipse um die kleine Axe zu bestimmen.*

Die Gleichung der Ellipse sei  $y = \frac{b}{a} \sqrt{a^2 - x^2}$ . Nimmt man irgend einen unendlich schmalen Streifen  $PQ$  parallel der  $y$ -Axe an, so ist das Trägheitsmoment offenbar:



$$4\mu \int_0^a x^2 y dx = 4\mu \frac{b}{a} \int_0^a x^2 \sqrt{a^2 - x^2} dx,$$

worin  $\mu$  die Masse pro Flächeneinheit ist.

Um diesen Ausdruck zu integrieren, setze man  $x = a \sin \varphi$ , das Integral wird dann

$$a^4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 \varphi \sin^3 \varphi d\varphi = a^4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1 - \cos 4\varphi}{8} d\varphi = \frac{\pi a^4}{16}$$

und das Trägheitsmoment  $= \mu \pi a b \frac{a^2}{4} = \text{Masse} \times \frac{a^2}{4}$ .

Ebenso findet man das Deviationsmoment eines Ellipsenquadranten bez. seiner Axen  $= \text{Masse} \times ab/2\pi$ .

*Das Trägheitsmoment eines Ellipsoids bez. eines Hauptdurchmessers zu be-*



Die Gleichung des Ellipsoids sei  $x^2/a^2 + y^2/b^2 + z^2/c^2 = 1$ . Nimmt man irgend eine unendlich schmale Schicht  $P'NQ$  parallel der  $yz$ -Ebene an, so ist ihr Flächeninhalt offenbar  $\pi PN \cdot QN$ . Es ist  $PN$  aber der Werth von  $z$  für  $y=0$  und  $QN$  der Werth von  $y$  für  $z=0$ , wie man sie aus der Gleichung des Ellipsoids erhält; also

$$PN = \frac{c}{a} \sqrt{a^2 - x^2},$$

$$QN = \frac{b}{a} \sqrt{a^2 - x^2},$$

daher der Flächeninhalt der Schicht  $\frac{\pi bc}{a^2} (a^2 - x^2)$ .

Ist  $\mu$  die Masse pro Volumeneinheit, dann ist das ganze Trägheitsmoment

$$\begin{aligned} & \mu \int_a^0 \frac{\pi bc}{a^2} (a^2 - x^2) \frac{PN^2 + QN^2}{4} dx \\ &= \mu \frac{\pi bc}{4 a^2} \int_a^0 (a^2 - x^2) \frac{b^2 + c^2}{a^2} (a^2 - x^2) dx \\ &= \mu \frac{4}{3} \pi abc \frac{b^2 + c^2}{6} = \text{Masse} \times \frac{b^2 + c^2}{6}. \end{aligned}$$

Auf dieselbe Art kann man zeigen, dass das Deviationsmoment des Octanten eines Ellipsoids bez. der Axen  $(x, y)$   $\propto$  Masse  $\times 2bc/5\pi$  ist.

Beisp. 1. Das Trägheitsmoment eines Kreisbogens, dessen Radius  $a$  ist und der zu einem Centriwinkel  $2\alpha$  gehört, bez.

- (a) einer im Centrum auf der Kreisebene senkrecht stehenden Axe ist  $\propto M\alpha^2$ ,  
(b) einer durch den Bogenmittelpunkt gehenden zur Kreisebene senkrechten Axe

$$\propto 2M \left(1 - \frac{\sin \alpha}{\alpha}\right) a^2,$$

- (c) eines Durchmessers, der den Bogen halbiert,

$$M \left(1 - \frac{\sin 2\alpha}{2\alpha}\right) \frac{a^2}{2}.$$

Beisp. 2. Das Trägheitsmoment des Theils der Fläche einer Parabel, welcher durch eine Ordinate im Abstand  $x$  vom Scheitel abgeschnitten wird, ist  $\frac{3}{7} Mx^2$  bez. der Tangente an den Scheitel und  $\frac{1}{5} Mx^2$  bez. des Hauptdurchmessers, wenn  $y$  die zu  $x$  gehörige Ordinate ist.

Beisp. 3. Das Trägheitsmoment der Fläche der Lemniscate  $r^2 = a^2 \cos 2\theta$  bez. einer Linie durch den Coordinatenanfang, die in der Ebene der Figur liegt und senkrecht auf ihrer Axe steht, ist  $M \frac{3\pi + 8}{48} a^2$ .

Beisp. 4. Eine Lamelle wird von vier gleichseitigen Hyperbeln begrenzt, von denen zwei die Coordinatenachsen zu Asymptoten haben, während die beiden andern diese Axen zu Hauptdurchmessern haben. Man beweise, dass die Summe der Trägheitsmomente der Lamelle bez. der Coordinatenachsen  $\frac{1}{4} (a^2 - a'^2) (\beta^2 - \beta'^2)$  ist, wenn  $\alpha, \alpha'; \beta, \beta'$  die Haupthalbaxen der Hyperbeln sind.

Man nehme als Gleichungen der Hyperbeln  $xy = u$ ,  $x^2 - y^2 = v$ , dann sind die Trägheitsmomente  $A = \iint y^2 J du dv$ ,  $B = \iint x^2 J du dv$ , worin  $1/J$  die Functionaldeterminante von  $(u, v)$  in Bezug auf  $(x, y)$  ist. Man erhält sofort  $A + B = \frac{1}{2} \iint du dv$ , wobei die Grenzen offenbar  $u = \frac{1}{2} \alpha^2$  bis  $\frac{1}{2} \alpha'^2$ ,  $v = \beta^2$  bis  $v = \beta'^2$  sind.

Beisp. 5. Eine Lamelle ist auf zwei Seiten von zwei ähnlichen Ellipsen begrenzt, wobei das Axenverhältniss der Ellipsen  $m$  ist und auf den beiden andern Seiten von zwei ähnlichen Hyperbeln mit einem Axenverhältniss gleich  $n$ . Die vier Curven haben ihre Hauptdurchmesser längs der Coordinatenachsen. Man beweise, dass das Deviationsmoment bez. der Coordinatenachsen

$$\frac{(\alpha^2 - \alpha'^2)(\beta^2 - \beta'^2)}{4(m^2 + n^2)}$$

ist, wenn  $\alpha, \alpha'; \beta, \beta'$  die grossen Halbachsen der Curven sind.

Beisp. 6. Wenn  $d\sigma$  ein Element der Oberfläche einer Kugel ist, welches auf beliebige rechtwinklige sich im Centrum schneidende Axen bezogen wird, zu beweisen, dass  $\iint x^{2n} d\sigma = \frac{4\pi}{2n+1} r^{2n+2}$  ist, worin  $r$  den Radius der Kugel und  $n$  eine ganze Zahl bedeutet.

Beisp. 7. Nimmt man dieselben Axen, wie in dem letzten Beispiel, zu beweisen, dass

$$\iint x^{2f} y^{2g} z^{2h} d\sigma = \frac{4\pi}{2n+1} r^{2n+2} \frac{L(f) L(g) L(h)}{L(n)},$$

worin  $n = f + g + h$  und  $L(f)$  den Quotienten des Products aller natürlichen Zahlen aufwärts bis zu  $2f$  dividirt durch das Product derselben Zahlen aufwärts bis zu  $f$  bedeutet, beide,  $2f$  sowohl wie  $f$ , eingeschlossen.

Um dies zu beweisen, bemerken wir, dass nach dem letzten Beispiel

$$\iint (\lambda x + \mu y + \nu z)^{2n} d\sigma = (\lambda^2 + \mu^2 + \nu^2)^n \frac{4\pi r^{2n+2}}{2n+1}$$

ist. Man entwickle beide Seiten, und setze die Coefficienten von  $\lambda^{2f} \mu^{2g} \nu^{2h}$  gleich.

Multiplicirt man das Resultat mit  $D dr$ , so erhält man den Werth des Integrals für eine homogene Schale von der Dichtigkeit  $D$  und der Dicke  $dr$ . Betrachtet man  $D$  als eine Function von  $r$  und integrirt in Bezug auf  $r$ , so kann man den Werth des Integrals für jede heterogene Kugel finden, in welcher die Schichten gleicher Dichtigkeit concentrische Kugeln sind.

Beisp. 8. Wenn  $d\sigma$  ein Element der auf die Hauptdurchmesser bezogenen Oberfläche eines Ellipsoids ist und  $p$  das Loth vom Mittelpunkt auf die Berührungsebene bedeutet, zu beweisen, dass

$$\iint x^{2f} y^{2g} z^{2h} p d\sigma = \frac{4\pi}{2n+1} \frac{L(f) L(g) L(h)}{L(n)} a^{2f+1} b^{2g+1} c^{2h+1}$$

ist, worin  $a, b, c$  die Halbachsen sind und die übrige Bezeichnung dieselbe ist, wie vorher.

Dieses Resultat folgt aus dem entsprechenden für eine Kugelschale sofort mit Hilfe der *affinen Transformation* (§ 40). Das entsprechende Integral, wenn die Exponenten von  $x, y, z$  beliebige Grössen sind und die Integration über einen Octanten der Oberfläche erstreckt wird, ist durch Dirichlet's Theorem in Gammafunctionen gegeben.

Beisp. 9. Zeige, dass in einem Raum von  $n$  Dimensionen das Volumen  $V$ , die Oberfläche  $S$  und das Trägheitsmoment  $J$  der Kugel, deren Gleichung

$x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2 = r^2$  ist, bez. einer auf der Coordinate  $x_1$  senkrecht stehenden Ebene durch die Gleichungen

$$V = \frac{r^n \left( \Gamma \frac{1}{2} \right)^n}{\Gamma \left( \frac{1}{2} n + 1 \right)}, \quad S = \frac{n}{r} V, \quad J = V \frac{r^2}{n + 2}$$

gegeben sind.

Diese Resultate folgen leicht aus Dirichlet's Theorem. Vergl. auch § 5 (2).

§ 10. **Differentiationsmethode.** Viele Trägheitsmomente können aus den in § 8 gegebenen durch Differentiation abgeleitet werden. So ist das Trägheitsmoment eines ellipsoidischen Körpers von gleichförmiger Dichtigkeit  $\rho$  bez. der Axe  $a$  wie bekannt  $\frac{4}{3} \pi a b c \rho \frac{b^2 + c^2}{5}$ . Nimmt das Ellipsoid unendlich wenig an Grösse zu, dann ist das Trägheitsmoment der einschliessenden Schale  $d \left[ \frac{4}{3} \pi a b c \rho \frac{b^2 + c^2}{5} \right]$ . Diese Differentiation kann ausgeführt werden, sobald das Gesetz, nach welchem sich das Ellipsoid ändert, bekannt ist. Nimmt man an, die Ellipsoidenflächen, welche die unendlich dünne Schale einschliessen, seien ähnlich und das Verhältniss der Axen für jede dieser Flächen wäre durch  $b = pa$ ,  $c = qa$  gegeben, so ist das Trägheitsmoment

$$\text{des ellipsoidischen Körpers} = \frac{4}{3} \pi \rho p q \frac{p^2 + q^2}{5} a^5,$$

$$\text{der Schale} = \frac{4}{3} \pi \rho p q (p^2 + q^2) a^4 da$$

und ebenso die Masse

$$\text{des ellipsoidischen Körpers} = \frac{4}{3} \pi \rho p q a^3,$$

$$\text{der Schale} = 4 \pi \rho p q a^2 da.$$

Das Trägheitsmoment einer unendlich dünnen ellipsoidischen Schale von der Masse  $M$ , von ähnlichen Ellipsoidenflächen eingeschlossen, ist daher  $\frac{1}{3} M (b^2 + c^2)$ .

Aus § 8 ist ersichtlich, dass es dasselbe Trägheitsmoment wie das umschriebene rechtwinklige Parallelepiped von gleicher Masse hat. *Diese beiden Körper haben also gleiche Trägheitsmomente bez. ihrer durch den Schwerpunkt gehenden Symmetriecassen.*

§ 11. Die Trägheitsmomente eines heterogenen Körpers, dessen Grenzfläche eine Fläche gleicher Dichtigkeit ist, können manchmal durch Differentiation gefunden werden. Nimmt man an, das Trägheitsmoment eines homogenen Körpers von der Dichtigkeit  $D$ , welcher durch irgend eine Fläche von gleichförmiger Dichtigkeit eingeschlossen wird, sei bekannt und es liesse sich durch irgend einen Parameter  $a$  in der Form  $\varphi(a) D$  ausdrücken, so ist das Trägheitsmoment einer Schicht von der Dichtigkeit  $D$  gleich  $\varphi'(a) D da$ . Ersetzt man  $D$  durch die variable Dichtigkeit  $\rho$ , so wird das gesuchte Trägheitsmoment

$$\int \rho \varphi'(a) da.$$

Beisp. 1. Man zeige, dass das Trägheitsmoment eines heterogenen Ellipsoids bez. seiner grossen Axe, wenn die Schichten gleicher Dichtigkeit ähnliche concentrische Ellipsoide sind und die Dichtigkeit längs der grossen Axe wie der Abstand vom Mittelpunkt variiert,  $\frac{2}{9} M (b^2 + c^2)$  ist.

Beisp. 2. Das Trägheitsmoment einer heterogenen Ellipse bez. ihrer kleinen Axe ist, wenn die Streifen gleichförmiger Dichtigkeit confocale Ellipsen sind und die Dichtigkeit längs der kleinen Axe sich wie der Abstand vom Mittelpunkt ändert,  $\frac{3M}{20} \frac{4a^5 + c^5 - 5a^3c^2}{2a^3 + c^3 - 3ac^2}$ .

§ 12. **Andre Methoden zur Ermittlung von Trägheitsmomenten.** Die in der Tabelle § 8 angegebenen Trägheitsmomente sind nur wenige von den vielen, die man beständig nöthig hat. Die Trägheitsmomente einer Ellipse bez. ihrer Hauptaxen sind z. B. dort gegeben, wir werden aber häufig auch ihre Trägheitsmomente für andre Axen brauchen. Es ist natürlich möglich, sie in jedem besondern Fall durch Integration zu finden. Es ist dies aber ein langwieriges Verfahren und kann oft durch die Anwendung der beiden folgenden Sätze vermieden werden.

Die Trägheitsmomente eines Körpers für gewisse durch seinen Schwerpunkt gehende Axen, die wir zu Bezugsaxen nehmen wollen, werden als durch die Tabelle gegeben angesehen. Um nun das Trägheitsmoment *desselben Körpers* bez. einer andern Axe zu finden, wollen wir so verfahren, dass wir

(1) das gesuchte Trägheitsmoment mit demjenigen um eine parallele durch den Schwerpunkt gehende Axe vergleichen. Es geschieht dies durch den Satz über die parallelen Axen.

(2) Das Trägheitsmoment bez. dieser parallelen Axe durch die gegebenen Trägheitsmomente bez. der Coordinatenaxen ausdrücken. Dies ermöglicht der Satz über die sechs Constanten eines Körpers.

§ 13. **Der Satz über die parallelen Axen.** Wenn die Trägheits- und Deviationsmomente für alle durch den Schwerpunkt eines Körpers gehenden Axen gegeben sind, die Trägheits- und Deviationsmomente bez. aller parallelen Axen aus ihnen abzuleiten.

Das Trägheitsmoment eines Körpers oder Systems von Körpern bez. irgend einer Axe ist dem Trägheitsmoment bez. einer parallelen durch den Schwerpunkt gehenden Axe gleich plus dem Trägheitsmoment der ganzen im Schwerpunkt concentrirten Masse bez. der ursprünglichen Axe.

Das Deviationsmoment für irgend zwei Axen ist dem Deviationsmoment bez. zweier parallelen durch den Schwerpunkt gehenden Axen gleich plus dem Deviationsmoment der ganzen im Schwerpunkt concentrirten Masse bez. der ursprünglichen Axen.

*Erstens.* Man nehme die Axe, für welche das Trägheitsmoment gesucht wird, zur  $x$ -Axe. Es sei  $m$  die Masse eines materiellen Punktes des Körpers;  $x, y, z$  seien die Coordinaten von  $m$ .  $\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}$  diejenigen

des Schwerpunkts  $G$  des ganzen Systems von Körpern,  $x', y', z'$  diejenigen von  $m$  in Bezug auf ein System von Parallelaxen durch den Schwerpunkt.

Da  $\Sigma mx'/\Sigma m$ ,  $\Sigma my'/\Sigma m$ ,  $\Sigma mz'/\Sigma m$  die Coordinaten des Schwerpunkts des Systems in Bezug auf den Schwerpunkt als Coordinatenanfang sind, so folgt daraus

$$\Sigma mx' = 0, \quad \Sigma my' = 0, \quad \Sigma mz' = 0.$$

Das Trägheitsmoment des Systems bez. der  $z$ -Axe ist

$$\begin{aligned} &= \Sigma m(x^2 + y^2) \\ &= \Sigma m[(\bar{x} + x')^2 + (\bar{y} + y')^2] \\ &= \Sigma m(\bar{x}^2 + \bar{y}^2) + \Sigma m(x'^2 + y'^2) + 2\bar{x} \cdot \Sigma mx' + 2\bar{y} \cdot \Sigma my'. \end{aligned}$$

Nun ist  $\Sigma m(\bar{x}^2 + \bar{y}^2)$  das Trägheitsmoment einer im Schwerpunkt concentrirten Masse  $\Sigma m$  und  $\Sigma m(x'^2 + y'^2)$  das Trägheitsmoment des Systems für eine durch  $G$  gehende Axe; ferner  $\Sigma mx' = 0$ ,  $\Sigma my' = 0$ , womit der Satz bewiesen ist.

Aus diesem Satz folgt, dass von allen einer Geraden parallelen Axen diejenige das kleinste Trägheitsmoment aufzuweisen hat, welche durch den Schwerpunkt geht.

Zweitens. Nimmt man die  $x, y$ -Axen als Axen, für welche das Deviationsmoment gesucht wird, so ist das gesuchte Moment

$$\begin{aligned} &= \Sigma mxy = \Sigma m(\bar{x} + x')(\bar{y} + y') \\ &= \bar{x}\bar{y} \cdot \Sigma m + \Sigma mx'y' + \bar{x} \Sigma my' + \bar{y} \Sigma mx' \\ &= \bar{x}\bar{y} \Sigma m + \Sigma mx'y'. \end{aligned}$$

Nun ist  $\bar{x}\bar{y} \Sigma m$  das Deviationsmoment einer in  $G$  concentrirten Masse  $\Sigma m$  und  $\Sigma mx'y'$  das Deviationsmoment des ganzen Systems bez. der durch  $G$  gehenden Axen, womit der Satz bewiesen ist.

Sind  $A$  und  $B$  zwei parallele Axen im Abstand  $a$  und  $b$  vom Schwerpunkt des Körpers und ist  $M$  die Masse des materiellen Systems, so hat man

$$\left. \begin{array}{l} \text{Trägheitsmoment} \\ \text{bez. } A \end{array} \right\} - Ma^2 = \left\{ \begin{array}{l} \text{Trägheitsmoment} \\ \text{bez. } B \end{array} \right\} - Mb^2.$$

Wenn daher das Trägheitsmoment eines Körpers für eine Axe bekannt ist, so lässt sich dasjenige für eine andere ihr parallele Axe finden. Es ist klar, dass ein ähnlicher Satz bez. der Deviationsmomente gilt.

§ 14. Der vorstehende Satz kann folgendermassen verallgemeinert werden. Ist irgend ein System in Bewegung und sind  $x, y, z$  die Coordinaten eines Punktes von der Masse  $m$  zur Zeit  $t$ , so sind  $dx/dt$ ,  $dy/dt$ ,  $dz/dt$  die Componenten der Geschwindigkeit und  $d^2x/dt^2$ ,  $d^2y/dt^2$ ,  $d^2z/dt^2$  die der Beschleunigung des Punktes parallel den Axen.

$$V = \Sigma m \varphi \left( x, \frac{dx}{dt}, \frac{d^2x}{dt^2}, y, \frac{dy}{dt}, \frac{d^2y}{dt^2}, z, \frac{dz}{dt}, \frac{d^2z}{dt^2} \right)$$

sei eine gegebene von der Structur und Bewegung des Systems abhängige Function und die Summe erstreckt sich über das ganze System.  $\varphi$  sei eine algebraische Function erster oder zweiter Ordnung. So kann  $\varphi$  z. B. aus folgenden Gliedern bestehen

$$ax^2 + bx \frac{dy}{dt} + c \left( \frac{dz}{dt} \right)^2 + eyz + fx + \dots,$$

worin  $a, b, c \dots$  Constante sind. Dann gilt der allgemeine Satz:

*Der Werth von  $V$  für irgend ein Coordinatensystem ist dem Werth von  $V$  gleich, den man für ein paralleles Coordinatensystem gefunden hat, das den Schwerpunkt zum Coordinatenanfang hat plus dem Werth von  $V$  für die ganze im Schwerpunkt concentrirte Masse mit Bezug auf das erste Coordinatensystem.*

Denn;  $\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}$  seien die Coordinaten des Schwerpunkts und es sei  $x = \bar{x} + x'$  etc., also  $dx/dt = d\bar{x}/dt + dx'/dt$  etc.

Da nun  $\varphi$  eine algebraische Function zweiter Ordnung von  $x, dx/dt, d^2x/dt^2, y, \dots$  ist, so erhält man offenbar durch Substitution der obigen Werthe und Ausführung der angedeuteten Multiplicationen und Quadrirungen etc. drei verschiedene Arten von Ausdrücken, solche, die nur  $\bar{x}, d\bar{x}/dt, d^2\bar{x}/dt^2 \dots$ , solche, welche die Produkte von  $\bar{x}, x' \dots$  enthalten und schliesslich solche, in denen nur  $x', dx'/dt \dots$  vorkommen. Die ersten ergeben im Ganzen  $\varphi(\bar{x}, d\bar{x}/dt, \dots)$ , die letzten  $\varphi(x', dx'/dt, \dots)$ .

Es wird mithin

$$V = \Sigma m \varphi \left( \bar{x}, \frac{d\bar{x}}{dt}, \dots \right) + \Sigma m \varphi \left( x', \frac{dx'}{dt}, \dots \right) \\ + \Sigma m \left( A \bar{x} \frac{dx'}{dt} + B \frac{d\bar{x}}{dt} x' + C \bar{x} \frac{dy'}{dt} + \dots \right),$$

worin  $A, B, C$ , etc. Constante sind.

Nun ist  $\Sigma m(\bar{x} dx'/dt)$  dasselbe wie  $\bar{x} \Sigma m dx'/dt$  und dieses verschwindet. Denn da  $\Sigma m x' = 0$  ist, so folgt daraus, dass  $\Sigma m dx'/dt = 0$ . Ebenso verschwinden alle andern Glieder in dem letzten Ausdruck.

Der Werth von  $V$  ist damit auf zwei Ausdrücke reducirt. Der erste ist aber der Werth von  $V$  für die ganze im Schwerpunkt concentrirte Masse, der zweite der Werth von  $V$  für das ganze auf den Schwerpunkt als Coordinatenanfang bezogene System. Damit ist der Satz bewiesen.

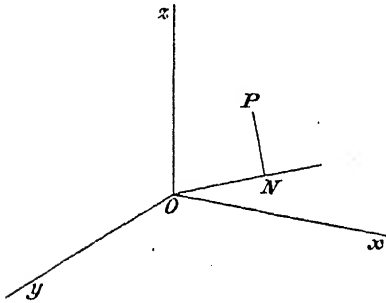
Der Satz würde offenbar auch gelten, wenn  $d^3x/dt^3, d^3y/dt^3, d^3z/dt^3$  oder höhere Differentialquotienten in der Function  $V$  sich vorfinden.

§ 15. Der Satz von den sechs Constanten eines Körpers. Wenn die Trägheits- und Deviationsmomente für drei grade Linien, die sich in einem Punkt rechtwinklig schneiden, gegeben sind, aus ihnen die Träg-

heits- und Deviationsmomente für alle andern in diesem Punkt sich schneidenden Axen abzuleiten.

Man nehme die drei Geraden zu Coordinatenachsen.  $A, B, C$  seien die Trägheitsmomente bez. der Axen der  $x, y, z$ ;  $D, E, F$  die Deviationsmomente bez. der Axen  $yz, zx, xy$ ;  $\alpha, \beta, \gamma$  die Richtungs-cosinusse einer durch den Coordinatenanfang gehenden Geraden. Dann ist das Trägheitsmoment  $I$  des Körpers bez. dieser Linie durch die Gleichung gegeben:

$$I = A\alpha^2 + B\beta^2 + C\gamma^2 - 2D\beta\gamma - 2E\gamma\alpha - 2F\alpha\beta.$$



$P$  sei irgend ein Punkt des Körpers, in welchem eine Masse  $m$  liegt  $x, y, z$  seien die Coordinaten von  $P$ .  $ON$  sei die Linie, deren Richtungs-cosinusse  $\alpha, \beta, \gamma$  sind. Ziehe  $PN$  senkrecht zu  $ON$ .

Da  $ON$  die Projection von  $OP$  ist, so erhält man

$$ON = x\alpha + y\beta + z\gamma,$$

ferner

$$OP^2 = x^2 + y^2 + z^2 \quad \text{und} \quad 1 = \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2.$$

Das Trägheitsmoment  $I$  bez.  $ON$  ist  $= \sum m PN^2$

$$\begin{aligned} &= \sum m [x^2 + y^2 + z^2 - (\alpha x + \beta y + \gamma z)^2] \\ &= \sum m [(x^2 + y^2 + z^2)(\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2) - (\alpha x + \beta y + \gamma z)^2] \\ &= \sum m (y^2 + z^2) \alpha^2 + \sum m (z^2 + x^2) \beta^2 + \sum m (x^2 + y^2) \gamma^2 \\ &\quad - 2 \sum m yz \cdot \beta\gamma - 2 \sum m zx \cdot \gamma\alpha - 2 \sum m xy \cdot \alpha\beta \\ &= A\alpha^2 + B\beta^2 + C\gamma^2 - 2D\beta\gamma - 2E\gamma\alpha - 2F\alpha\beta. \end{aligned}$$

Genau auf dieselbe Art kann man zeigen, dass, wenn  $A', B', C'$  die Trägheitsmomente bez. der Ebenen  $yz, zx, xy$  sind, das Trägheitsmoment bez. der Ebene, deren Richtungs-cosinusse  $\alpha, \beta, \gamma$  sind,

$$I' = A'\alpha^2 + B'\beta^2 + C'\gamma^2 + 2D\beta\gamma + 2E\gamma\alpha + 2F\alpha\beta \text{ ist.}$$

Man beachte, dass diese Gleichung sich von derjenigen, welche das Moment bez. einer Geraden angibt, nur durch die Vorzeichen der drei letzten Glieder unterscheidet.

§ 16. Wenn drei grade Linien, die sich in einem gegebenen Punkt rechtwinklig schneiden, der Art sind, dass für sie als Coordinatenachsen die Deviationsmomente  $\sum mxy, \sum myz, \sum mzx$  sämmtlich verschwinden, so heissen sie die *Hauptaxen* für den gegebenen Punkt.

Die drei Ebenen, welche durch je zwei Hauptaxen gehen, heissen die *Hauptebenen* für den gegebenen Punkt.

Die Trägheitsmomente bez. der Hauptaxen eines Punktes heissen die *Hauptträgheitsmomente* für diese Punkte.

Die Fundamentalformel in § 15 nimmt eine viel einfachere Gestalt an, wenn die Koordinatenaxen so gewählt werden können, dass sie die Hauptaxen für den Koordinatenanfang sind. In diesem Fall wird

$$I = A\alpha^2 + B\beta^2 + C\gamma^2.$$

Wir werden sogleich ein Verfahren kennen lernen, durch welches wir stets diese Axen finden können; in einigen einfachen Fällen kann man sich von ihrer Lage durch den Augenschein überzeugen. Der Körper sei symmetrisch bez. der  $xy$ -Ebene. Dann entspricht jedem Element  $m$  auf der einen Seite, dessen Coordinaten  $x, y, z$  sind, ein Element von gleicher Masse auf der andern Seite der Ebene, dessen Coordinaten  $x, y, -z$  sind. Für einen solchen Körper ist daher  $\Sigma mxz = 0$  und  $\Sigma myz = 0$ . Ist der Körper eine in der Ebene  $xy$  liegende Lamelle, dann ist das  $z$  eines jeden Elements Null und wir erhalten wieder  $\Sigma mxz = 0, \Sigma myz = 0$ .

Greifen wir zurück auf die Tabelle in § 8, so sehen wir, dass die Axen der darin aufgeführten Trägheitsmomente stets Hauptaxen sind. So sind im Falle des Ellipsoids die drei Hauptschnitte sämtlich Symmetrieebenen und daher sind, wie wir soeben gezeigt haben, die Hauptdurchmesser Hauptträgheitsaxen. Bei der Anwendung der Fundamentalformel in § 15 auf einen der in der Tabelle erwähnten Körper kann man daher immer die hier gegebene abgekürzte Form benutzen.

§ 17. Wir wollen nun zusehen, wie die beiden wichtigen Sätze der §§ 13 und 15 in der Praxis anzuwenden sind.

Beisp. 1. Nehmen wir an, es werde gesucht das Trägheitsmoment einer elliptischen Fläche von der Masse  $M$  und den Halbaxen  $a$  und  $b$  bez. eines Diameters, der den Winkel  $\Theta$  mit der grossen Axe einschliesst. Die Trägheitsmomente bez. der Axen  $a$  und  $b$  sind resp.  $\frac{1}{4} Mb^2$  und  $\frac{1}{4} Ma^2$ . Nach § 16 ist das Trägheitsmoment bez. des Diameters  $\frac{1}{4} Mb^2 \cos^2 \Theta + \frac{1}{4} Ma^2 \sin^2 \Theta$ . Wenn  $r$  die Länge des Diameters bedeutet, so ist dieser Ausdruck, wie aus der Gleichung der Ellipse bekannt ist,  $= \frac{M}{4} \cdot \frac{a^2 b^2}{r^2}$ , welches eine für die Praxis sehr bequeme Form ist.

Beisp. 2. Nehmen wir an, das Trägheitsmoment derselben Ellipse bez. einer Tangente werde gesucht. Ist  $p$  das Loth vom Mittelpunkt auf die Tangente, so ist nach § 13 das gesuchte Moment gleich dem Trägheitsmoment bez. einer durch den Mittelpunkt gehenden parallelen Axe plus  $Mp^2$ , also  $= \frac{M}{4} \frac{a^2 b^2}{r^2} + Mp^2 = \frac{5M}{4} p^2$ , da  $pr = ab$  ist.

Beisp. 3. Als ein Beispiel andrer Art wollen wir das Trägheitsmoment eines Ellipsoids suchen von der Masse  $M$  und den Halbaxen  $(a, b, c)$  bez. einer Diametralebene, deren Richtungs cosinus in Bezug auf die Hauptebenen  $(\alpha, \beta, \gamma)$  sind. Nach § 8 sind die Trägheitsmomente bez. der Hauptaxen  $\frac{1}{5} M(b^2 + c^2)$ ,  $\frac{1}{5} M(c^2 + a^2)$ ,  $\frac{1}{5} M(a^2 + b^2)$ . Mithin sind nach § 5 die Trägheitsmomente bez. der Hauptebenen  $\frac{1}{5} Ma^2$ ,  $\frac{1}{5} Mb^2$ ,  $\frac{1}{5} Mc^2$ . Daher ist das gesuchte Trägheitsmoment



$\frac{1}{5}M(\alpha^2\alpha^2 + b^2\beta^2 + c^2\gamma^2)$  oder wenn  $p$  das Loth auf die parallele Berührungsebene bedeutet, wie aus der Raumgeometrie bekannt ist,  $= Mp^2/5$ .

Beisp. 4. Das Trägheitsmoment eines Rechtecks, dessen Seiten  $2a$ ,  $2b$  sind, bez. einer Diagonale ist  $\frac{2M}{3} \frac{\alpha^2 b^2}{a^2 + b^2}$ .

Beisp. 5. Sind  $k_1$ ,  $k_2$  die Trägheitsradien einer elliptischen Lamelle bez. zweier conjugirter Diameter, so ist  $1/k_1^2 + 1/k_2^2 = 4(1/a^2 + 1/b^2)$ .

Beisp. 6. Die Summe der Trägheitsmomente einer elliptischen Fläche bez. zweier Tangenten, welche senkrecht aufeinander stehen, ist immer dieselbe.

Beisp. 7. Ist  $M$  die Masse eines graden Kegels,  $a$  seine Höhe und  $b$  der Radius der Basis, so ist das Trägheitsmoment bez. der Axe  $\frac{3}{10}Mb^2$ ; bez. einer senkrecht zur Axe durch die Spitze gehenden Geraden  $\frac{3}{5}M(a^2 + \frac{1}{4}b^2)$ ; bez. einer Erzeugenden  $\frac{3b^2}{20}M \frac{6a^2 + b^2}{a^2 + b^2}$ ; bez. einer durch den Schwerpunkt gehenden, auf der Axe senkrechten Geraden  $\frac{3}{80}M(a^2 + 4b^2)$ .

Beisp. 8. Ist  $a$  die Höhe eines graden Cylinders,  $b$  der Radius der Basis, so ist das Trägheitsmoment bez. der Axe  $\frac{1}{2}Mb^2$  und bez. einer Geraden durch den Schwerpunkt senkrecht zur Axe  $\frac{1}{4}M(\frac{1}{3}a^2 + b^2)$ .

Beisp. 9. Das Trägheitsmoment eines Körpers von der Masse  $M$  bez. einer Geraden, deren Gleichung, auf beliebige rechtwinklige sich im Schwerpunkt schneidende Axen bezogen,  $\frac{x-f}{l} = \frac{y-g}{m} = \frac{z-h}{n}$  lautet, ist

$$Al^2 + Bm^2 + Cn^2 - 2Dmn - 2Enl - 2Flm + \\ + M[f^2 + g^2 + h^2 - (fl + gm + hn)^2],$$

worin  $(l, m, n)$  die Richtungscosinusse der Geraden sind.

Beisp. 10. Das Trägheitsmoment einer elliptischen Scheibe, deren Gleichung

$$ax^2 + 2bxy + cy^2 + 2dx + 2ey + 1 = 0$$

ist, bez. eines der  $x$ -Axe parallelen Diameter ist  $\frac{M}{4} \cdot \frac{-Ha}{(ac - b^2)^2}$ , worin  $M$  die Masse und  $H$  die zu der Curve zweiter Ordnung gehörige Determinante  $ac - b^2 + 2bed - ae^2 - cd^2$  ist, welche man gewöhnlich die Hesse'sche Determinante, zuweilen die Discriminante nennt.

Beisp. 11. Nimmt man als Dreieckscoordinaten  $x, y, z$  die Inhalte der Dreiecke  $PBC, PCA, PAB$ , welche den Punkt  $P$  mit den Seiten  $BC=a, CA=b, AB=c$  eines Dreiecks verbinden, so ist das Trägheitsmoment einer elliptischen Scheibe, deren Gleichung in diesen Coordinaten  $\varphi(xyz) = 0$  ist, in Bezug auf einen der Dreiecksseite  $BC=a$  parallelen Durchmesser

$$-M\left(\frac{\Delta}{a}\right)^2 \frac{H}{2K^2} \left(\frac{\partial}{\partial y} - \frac{\partial}{\partial z}\right)^2 \varphi,$$

wo  $\Delta$  der Inhalt des Dreiecks  $ABC$ ,  $H$  die Determinante der Function  $\varphi$  und  $K$  die mit den Zahlen 111 geränderte Determinante ist.

§ 18. *Die Methode der Axentransformation.* Die in § 15 angewandte Methode, das Trägheitsmoment bez. einer Geraden  $ON$  zu finden, kommt eigentlich einem Coordinatenwechsel gleich, bei welchem diese Gerade als neue Axe, sagen wir, der  $\xi$  genommen wird, da die Axen der  $\eta$  und  $\zeta$  nicht nöthig sind. Wir können dies nun zu einer Methode verallgemeinern, die oft von grossem praktischen Nutzen ist.

Nehmen wir an,  $\varphi(\xi\eta\zeta)$  sei irgend eine quadratische Function z. B.

$$\varphi = L_1 \xi^2 + L_2 \eta^2 + L_3 \zeta^2 + 2K_1 \eta \xi + 2K_2 \xi \zeta + 2K_3 \xi \eta$$

und es solle  $\Sigma m \varphi(\xi \eta \zeta)$  gefunden werden, wobei sich die Summe über irgend einen Körper erstrecken möge.

Man wähle ein passendes Axensystem der  $x, y, z$ , welches denselben Coordinatenanfang hat, derart aus, dass die sechs Constanten des Körpers, d. h.  $\Sigma m x^2$ ,  $\Sigma m y^2$ ,  $\Sigma m z^2$ ,  $\Sigma m xy$ ,  $\Sigma m yz$ ,  $\Sigma m zx$  sämmtlich bekannt sind oder leicht gefunden werden können. Die Richtungscosinusse mögen durch das Diagramm

	$\xi$	$\eta$	$\zeta$
$x$	$\alpha$	$\beta$	$\gamma$
$y$	$\alpha'$	$\beta'$	$\gamma'$
$z$	$\alpha''$	$\beta''$	$\gamma''$

gegeben sein.

Alsdann ist  $\xi = \alpha x + \alpha' y + \alpha'' z$ ,  $\eta = \beta x + \beta' y + \beta'' z$ ,  $\zeta = \gamma x + \gamma' y + \gamma'' z$ . Setzt man diese Werthe ein und entwickelt, so erhält man  $\Sigma m \varphi(\xi \eta \zeta)$  in Ausdrücken der sechs bekannten Constanten des Körpers.

Das Resultat mag auf den ersten Blick etwas complicirt erscheinen; es reducirt sich aber, wenn die neuen Axen passend gewählt werden, in den meisten Fällen auf wenige Glieder. Sind z. B. die Axen der  $xyz$  Hauptaxen, so werden die Glieder  $\Sigma m xy$ ,  $\Sigma m yz$ ,  $\Sigma m zx$  sämmtlich Null. Unter der Voraussetzung, dass die Wahl in dieser Art getroffen worden ist, erhält die Gleichung die bequeme Form

$$\Sigma m \varphi(\xi \eta \zeta) = \varphi(\alpha \beta \gamma) \Sigma m x^2 + \varphi(\alpha' \beta' \gamma') \Sigma m y^2 + \varphi(\alpha'' \beta'' \gamma'') \Sigma m z^2.$$

Beim Gebrauch dieser Formel merke man sich, dass der Coefficient von  $\Sigma m x^2$  erhalten wird, indem man statt  $(\xi \eta \zeta)$  in  $\varphi(\xi \eta \zeta)$  die Richtungscosinusse der neuen  $x$ -Axe, d. h. die in dem Diagramm in einer Reihe mit  $x$  stehenden Cosinusse setzt. Der Coefficient von  $\Sigma m y^2$  wird erhalten, indem man die Richtungscosinusse der neuen  $y$ -Axe substituirt, d. h. die neben  $y$  in dem Diagramm stehenden Cosinusse u. s. w.

Muss auch der Coordinatenanfang geändert werden, so kann dies mit Hülfe des Satzes in § 14 geschehen.

Beisp. 1. Die Coordinaten des Centrums einer elliptischen Fläche sind  $(f'gh)$  und die Richtungscosinusse ihrer Axen  $(\alpha \beta \gamma)$   $(\alpha' \beta' \gamma')$ ; man beweise, dass:

$$\Sigma m \xi^2 = M \left( h^2 + \frac{1}{4} a^2 \gamma^2 + \frac{1}{4} b^2 \gamma'^2 \right).$$

Beisp. 2.  $Ox, Oy, Oz$  seien die Hauptaxen des Coordinatenanfangs; man beweise, dass das Deviationsmoment  $F'' = \Sigma m \xi \eta$  bez. zweier rechtwinkliger Axen  $O\xi, O\eta$ , deren Richtungscosinusse  $(\alpha \alpha' \alpha'')$   $(\beta \beta' \beta'')$  sind, durch eine der Gleichungen

$$\Sigma m \xi \eta = \alpha \beta \Sigma m x^2 + \alpha' \beta' \Sigma m y^2 + \alpha'' \beta'' \Sigma m z^2 = -\alpha \beta A - \alpha' \beta' B - \alpha'' \beta'' C$$

gegeben ist. Das zweite Resultat folgt aus dem ersten, da  $\alpha \beta + \alpha' \beta' + \alpha'' \beta'' = 0$ .

Beisp. 3.  $(\gamma \gamma' \gamma'')$  mögen die Richtungscosinusse einer festen Axe  $O\xi$  sein. Wenn nun  $O\xi, O\eta$  sich um  $O\xi$  drehen, zu beweisen, dass  $D'^2 + E'^2$  und  $A'B' - F''^2$  beide constant sind, unter  $A', B', C', D', E', F'$  die Trägheits- und Deviationsmomente des Körpers bez. dieser sich bewegendenden Axen verstanden.

Denn nach Beisp. 2 ist

$$-D' = A\beta\gamma + B\beta'\gamma' + C\beta''\gamma'', \quad -E' = A\alpha\gamma + B\alpha'\gamma' + C\alpha''\gamma'',$$

daher

$$D'^2 + E'^2 = A^2 \gamma^2 (\alpha^2 + \beta^2) + 2AB\gamma\gamma' (\alpha\alpha' + \beta\beta') + \text{etc.}$$

und da

$$\alpha^2 + \beta^2 = 1 - \gamma^2 = \gamma'^2 + \gamma''^2 \quad \text{und} \quad \alpha\alpha' + \beta\beta' = -\gamma\gamma',$$

so erhält man

$$D'^2 + E'^2 = (A - B)^2 (\gamma\gamma')^2 + (B - C)^2 (\gamma'\gamma'')^2 + (C - A)^2 (\gamma''\gamma)^2.$$

Ebenso findet man  $A'B' - F''^2 = BC\gamma^2 + CA\gamma'^2 + AB\gamma''^2$ .

$(\alpha\beta\gamma)$  sind,

$$I = A\alpha^2 + B\beta^2 + C\gamma^2 - 2D\beta\gamma - 2E\gamma\alpha - 2F\alpha\beta,$$

lässt eine sehr nützliche geometrische Deutung zu.

Der Radiusvector  $OQ$  möge sich auf irgend eine Art um den gegebenen Punkt  $O$  drehen und von solcher Länge sein, dass das Trägheitsmoment bez.  $OQ$  dem reciproken Quadrat seiner Länge *proportional* ist. Stellt dann  $R$  die Länge des Radiusvector dar, dessen Richtungscosinuse  $(\alpha\beta\gamma)$  sind, so ist  $I = M\epsilon^2/R^2$ , worin  $\epsilon$  eine gewisse Constante ist, die zur Wahrung der Dimensionen von  $I$  eingeführt wird, und  $M$  die Masse. Wir werden der Kürze wegen statt  $M\epsilon^2$  zuweilen das einfachere Symbol  $K$  gebrauchen. Die Polargleichung des Ortes von  $Q$  ist daher

$$\frac{K}{R^2} = A\alpha^2 + B\beta^2 + C\gamma^2 - 2D\beta\gamma - 2E\gamma\alpha - 2F\alpha\beta.$$

Nimmt man statt der Polarcordinaten rechtwinklige, so wird

$$K = AX^2 + BY^2 + CZ^2 - 2DYZ - 2EZX - 2FXY,$$

welches die Gleichung einer Fläche zweiten Grades ist. Es gibt also für jeden Punkt  $O$  eines materiellen Körpers eine entsprechende Fläche zweiten Grades, welche die Eigenschaft besitzt, dass das Trägheitsmoment bez. irgend eines Radiusvectors durch das reciproke Quadrat dieses Radiusvectors dargestellt wird. Der Vortheil dieser Darstellung besteht darin, dass die Beziehungen zwischen den Trägheitsmomenten für grade Linien, die sich in einem gegebenen Punkt schneiden, mittelst der bekannten Eigenschaften einer Fläche zweiten Grades gefunden werden können.

Da das Trägheitsmoment seiner Bildung nach als Summe einer Anzahl von Quadraten eine positive Grösse ist, so muss offenbar jeder Radiusvector  $R$  reell sein. Die Fläche zweiten Grades ist daher immer ein Ellipsoid. Es wurde zuerst von Cauchy benutzt, *Exercices de Math.* Bd. II, 93. Siehe auch Schlömilch in den Abhandlungen der Leipziger Akademie II, 377. Poinsot erkannte seine Bedeutung für die Mechanik. Man nennt es gewöhnlich *das Poinsot'sche Trägheitsellipsoid* für den Punkt  $O$  und, wenn  $O$  der Schwerpunkt ist, *das Poinsot'sche Centralellipsoid*.

Ueber die Trägheitsellipsoide ist so viel geschrieben worden, dass es schwierig ist, festzustellen, welche Verdienste den verschiedenen Autoren zukommen. Wir verweisen auch auf Prof. Cayley's Bericht an die *British Association f. t. A. u. S.* über *Special problems of Dynamics*, 1862.

§ 20. Die Invarianten. Das Trägheitsellipsoid wird definirt durch eine *geometrische* Eigenschaft, dass nämlich jeder Radiusvector einer

Constanten, dividirt durch die Quadratwurzel aus dem Trägheitsmoment bez. dieses Radiusvectors, gleich ist. Wir mögen daher Coordinatenachsen nehmen, welche wir wollen, wir müssen immer dasselbe Ellipsoid erhalten. Wird mithin das Trägheitsellipsoid auf ein beliebiges System rechtwinkliger Axen bezogen, so werden die Coefficienten von  $X^2$ ,  $Y^2$ ,  $Z^2$ ,  $-2YZ$ ,  $-2ZX$ ,  $-2XY$  in seiner Gleichung stets die Trägheits- und Deviationsmomente bez. dieser Axen darstellen.

Da die Coefficienten der Gleichung dritten Grades, welche die Länge der Hauptaxen des Ellipsoids bestimmt, durch eine Transformation der Axen ungeändert bleiben, diese Coefficienten aber durch

$$\begin{aligned} A + B + C, \\ AB + BC + CA - D^2 - E^2 - F^2, \\ ABC - 2DEF - AD^2 - BE^2 - CF^2 \end{aligned}$$

dargestellt werden, so sind sie für alle aufeinander senkrechten Axen vom nämlichen Coordinatenanfang Invarianten und sämtlich grösser als Null.

§ 21. Man beachte, dass die Constante  $\varepsilon$  zwar willkürlich ist; wenn sie aber einmal gewählt ist, nicht mehr geändert werden kann. Wir erhalten so eine Reihe von ähnlichen und ähnlich gelegenen Ellipsoiden, von welchen jedes als Trägheitsellipsoid benutzt werden kann.

Ist der Körper eine ebene Lamelle, so heisst ein Schnitt des einem beliebigen Punkt der Lamelle entsprechenden Ellipsoids mit der Ebene der Lamelle die *Trägheits- bez. Centralellipse* für diesen Punkt.

Wenn die Hauptaxen für irgend einen Punkt  $O$  eines Körpers zu Coordinatenachsen genommen werden, so nimmt die Gleichung des Trägheitsellipsoids die einfache Form an  $AX^2 + BY^2 + CZ^2 = M\varepsilon^4$ , worin  $M$  die Masse und  $\varepsilon^4$  irgend eine Constante bedeutet. Wir wollen dies nun auf einige einfache Fälle anwenden.

Beisp. 1. Das Centralellipsoid einer materiellen elliptischen Scheibe zu finden. Behält man die frühere Bezeichnung bei, so ist  $A = \frac{1}{4} Mb^2$ ,  $B = \frac{1}{4} Ma^2$ ,  $C = \frac{1}{4} M(a^2 + b^2)$ . Daher ist das Ellipsoid

$$\frac{1}{4} Mb^2 X^2 + \frac{1}{4} Ma^2 Y^2 + \frac{1}{4} M(a^2 + b^2) Z^2 = M\varepsilon^4.$$

Da  $\varepsilon$  irgend eine Constante bedeutet, so kann man dafür auch setzen

$$\frac{X^2}{a^2} + \frac{Y^2}{b^2} + \left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}\right) Z^2 = \varepsilon^4.$$

Ist  $Z = 0$ , so wird daraus eine dem Umfang der gegebenen Scheibe ähnliche Ellipse. Daraus geht hervor, dass die Centralellipse einer elliptischen Scheibe eine ähnliche und ähnlich gelegene Ellipse ist. Dies folgt auch aus § 17, Beisp. 1.

Beisp. 2. Das Trägheitsellipsoid für irgend einen Punkt  $O$  eines materiellen geraden Stabs  $AB$  von der Masse  $M$  und Länge  $2a$  zu finden. Die Gerade  $OAB$  möge die Axe der  $x$ ,  $O$  der Coordinatenanfang,  $G$  der Mittelpunkt von  $AB$ ,

$OG=c$  sein. Kann die materielle Linie als unendlich dünn angesehen, also  $A=0$ ,  $B=M\left(\frac{1}{3}a^2+c^2\right)=C$  gesetzt werden, dann ist das Trägheitsellipsoid  $Y^2+Z^2=\varepsilon'^2$ , worin  $\varepsilon'$  irgend eine Constante bezeichnet. Das Trägheitsellipsoid ist mithin ein gestrecktes Rotationsellipsoid, welches zu einem graden Cylinder wird mit der graden Linie als Axe, wenn der Stab unbegrenzt dünn wird.

Beisp. 3. Das Centralellipsoid eines materiellen Ellipsoids ist

$$(b^2+c^2)X^2+(c^2+a^2)Y^2+(a^2+b^2)Z^2=\varepsilon^4,$$

worin  $\varepsilon$  irgend eine Constante ist. *Man bemerke, dass die längste und kürzeste Axe des Trägheitsellipsoids ihrer Richtung nach bez. mit der längsten und kürzesten Axe des materiellen Ellipsoids zusammenfällt.*

§ 22. Umgekehrt kann man zeigen, dass *wenn irgend ein Ellipsoid gegeben ist, ein reeller materieller Körper gefunden werden kann, von welchem es das Trägheitsellipsoid ist, vorausgesetzt, dass die Summe der Quadrate der reciproken Werthe irgend zweier seiner Axen grösser ist als das Quadrat des reciproken Werths der dritten.*

Denn wenn die Trägheitsmomente bez. der Hauptdurchmesser

$$A=\frac{K}{a^2}, \quad B=\frac{K}{b^2}, \quad C=\frac{K}{c^2}$$

sind, so muss nach § 5 die Summe zweier von den drei Grössen  $A, B, C$  grösser als die dritte sein. Diese Bedingung ist auch ausreichend; denn setzt man zwei materielle Punkte auf jeden Hauptdurchmesser in solchem Abstand von dem Coordinatenanfang  $\pm p, \pm q, \pm r$  und von solchen Massen  $m, m', m''$ , dass

$4mp^2=B+C-A, \quad 4mq^2=C+A-B, \quad 4mr^2=A+B-C$ ,  
ist, so haben diese sechs materiellen Punkte die Hauptdurchmesser des gegebenen Ellipsoids zu Hauptaxen und die gegebenen Grössen  $A, B, C$  zu ihren Hauptträgheitsmomenten.

§ 23. Die Grundeigenschaften der Hauptaxen. Aus einigen einfachen Eigenschaften der Ellipsoide lassen sich die folgenden Sätze leicht ableiten:

I. *Von den Trägheitsmomenten eines Körpers für Axen, die sich in einem gegebenen Punkt schneiden, ist das Trägheitsmoment bez. einer der Hauptaxen das grösste bez. einer andern das kleinste.*

Denn in dem Trägheitsellipsoid ist das Trägheitsmoment bez. eines vom Centrum ausgehenden Radiusvector das kleinste, wenn dieser Radiusvector am grössten ist und umgekehrt. Offenbar sind aber der grösste und kleinste Radiusvector zwei Haupthalbmesser.

Aus § 5 geht hervor, dass von den Trägheitsmomenten bez. aller durch einen Punkt gehenden Ebenen dasjenige bez. einer Hauptebene das grösste bez. einer andern das kleinste ist.

II. *Wenn die drei Hauptmomente für einen Punkt O einander gleich sind, so wird das Ellipsoid eine Kugel.* Jeder Durchmesser ist alsdann ein Hauptdurchmesser und die Radienvectoren sind sämtlich

gleich. Daher ist jede durch  $O$  gehende Gerade eine Hauptaxe für  $O$  und die Trägheitsmomente für sie sind alle gleich.

So sind z. B. die Lothe von dem Schwerpunkt eines Würfels auf die drei Seitenflächen Hauptaxen; denn wird der Körper auf einer dieser Axen bezogen, so ist offenbar  $\sum mxy = 0$ ,  $\sum myz = 0$ ,  $\sum mzx = 0$ . Ebenso sind die Trägheitsmomente bez. ihrer der Symmetrie wegen gleich. Daher ist jede Axe durch den Schwerpunkt eines Würfels eine Hauptaxe und sind die Trägheitsmomente bez. ihrer sämmtlich gleich.

Nehmen wir weiter an, der Körper sei ein regelmässiges Polyeder und betrachten zwei durch den Schwerpunkt gelegte Ebenen, von denen jede parallel zu einer Seitenfläche ist. Die Beziehungen dieser beiden Ebenen zu dem Polyeder sind überall dieselben. Daher muss auch das Centralellipsoid in Bezug auf jede dieser Ebenen ähnlich gelegen sein. Dasselbe gilt für sämmtliche den Seitenflächen parallele Ebenen. Das Ellipsoid muss also eine Kugel und das Trägheitsmoment für jede Axe dasselbe sein.

Beisp. 1. Drei gleiche materielle Punkte  $A, B, C$  liegen in den Ecken eines gleichseitigen Dreiecks; man beweise, dass die Trägheitsellipse für ihren Schwerpunkt  $G$  (die Centralellipse) ein Kreis ist.

Der Symmetrie wegen müssen die Durchmesser  $GA, GB, GC$  der Trägheitsellipse für  $G$  gleich sein. Die Ellipse ist daher ein Kreis.

Beisp. 2. Vier gleiche materielle Punkte liegen in den Ecken eines Tetraeders. Man beweise, dass das Tetraeder regelmässig ist, wenn das Centralellipsoid eine Kugel ist.

Beisp. 3. Wird durch irgend einen gegebenen Punkt  $O$  in einem Körper eine Ebene gelegt, so lassen sich in dieser Ebene durch  $O$  zwei aufeinander senkrecht stehende Geraden ziehen, dass das Deviationsmoment bez. ihrer Null ist.

Sie sind die Axen des Schnitts des Trägheitsellipsoids für den Punkt  $O$  mit der gegebenen Ebene.

§ 24. Für jeden Punkt eines materiellen Systems gibt es stets zwei aufeinander senkrecht stehende Hauptaxen.

Construirt man das Trägheitsellipsoid des gegebenen Punktes  $O$ , so sind, wie gezeigt worden ist, die Deviationsmomente bez. der Axen die halben Coefficienten von  $XY, YZ, ZX$  in der Gleichung des Trägheitsellipsoids auf diese Geraden als Coordinatenaxen bezogen. Wird nun ein Ellipsoid auf seine Hauptdurchmesser als Axen bezogen, so verschwinden diese Coefficienten. Die Hauptdurchmesser des Ellipsoids sind daher die Hauptaxen des Systems. Jedes Ellipsoid hat aber mindestens drei Hauptdurchmesser, daher hat jedes materielle System mindestens drei Hauptaxen.

§ 25. Beisp. 1. Wenn die Hauptaxen des Schwerpunktes der Masse Axen sind, so ist die Gleichung des Trägheitsellipsoids für den Punkt  $(q, q, q)$

$$\left(\frac{A}{M} + q^2 + r^2\right) X^2 + \left(\frac{B}{M} + r^2 + p^2\right) Y^2 + \left(\frac{C}{M} + p^2 + q^2\right) Z^2 \\ + 2qrYZ + 2rpZX + 2pqXY = c^2,$$

wenn es auf seinen Mittelpunkt als Coordinatenanfang bezogen wird.

Beispiel 2. Zeige, dass die cubische Gleichung zur Ermittlung der drei Hauptträgheitsmomente für irgend einen Punkt  $(p, q, r)$  in die Form einer Determinante

$$\begin{vmatrix} \frac{I-A}{M} - q^2 - r^2 & pq & rp \\ pq & \frac{I-B}{M} - r^2 - p^2 & qr \\ rp & qr & \frac{I-C}{M} - p^2 - q^2 \end{vmatrix} = 0$$

gebracht werden kann.

Sind  $(l, m, n)$  den Richtungsosinussen der Axen, welche einem der Werthe von  $I$  entsprechen, proportional, so kann man ihre Werthe aus den Gleichungen

$$\left. \begin{aligned} [I - (A + Mq^2 + Mr^2)]l + Mpqm + Mrpn &= 0, \\ Mpq l + [I - (B + Mr^2 + Mp^2)]m + Mqrn &= 0, \\ Mrp l + Mqr m + [I - (C + Mp^2 + Mq^2)]n &= 0 \end{aligned} \right\}$$

finden.  $(l, m, n)$  sind daher den Unterdeterminanten der Elemente einer *jeden Horizontalreihe* der Determinante proportional.

Beisp. 3. Ist  $S=0$  die Gleichung des Centrallipsoids für den Schwerpunkt  $O$ , auf irgend welche rechtwinklige Axen bezogen und in der im § 19 gegebenen Form geschrieben, so ist das Trägheitsellipsoid des Punktes  $P$ , dessen Coordinaten  $(p, q, r)$  sind,

$$S + M(p^2 + q^2 + r^2)(X^2 + Y^2 + Z^2) + M(pX + qY + rZ)^2 = 0.$$

Beweise daraus (1), dass die zur Geraden  $OP$  in den Trägheitsellipsoiden für  $O$  und  $P$  conjugirten Ebenen parallel sind und (2), dass die zu  $OP$  senkrechten Schnitte parallele Axen haben.

§ 26. Das reciproke Trägheitsellipsoid.<sup>1)</sup> Die reciproke Fläche des Poinso't'schen Ellipsoids ist ein zweites Ellipsoid, welches ebenfalls benutzt worden ist, um die Lage der Hauptaxen und das Trägheitsmoment bez. irgend einer Linie geometrisch darzustellen.

Wir haben den folgenden elementaren Satz nöthig: Die reciproke Fläche des Ellipsoids  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$  ist das Ellipsoid  $a^2x^2 + b^2y^2 + c^2z^2 = c^4$ .

Ist  $ON$  das Loth vom Coordinatenanfang  $O$  auf die Berührungsebene in irgend einem Punkt  $P$  des ersten Ellipsoids und  $l, m, n$  die Richtungsosinüsse von  $ON$ , so ist  $ON^2 = a^2l^2 + b^2m^2 + c^2n^2$ ; verlängert man dann  $ON$  bis  $Q$ , so dass  $OQ = c^2/ON$  wird, so ist  $Q$  ein Punkt auf der reciproken Fläche. Setzt man  $OQ = R$ , so erhält man  $r^4 = (a^2l^2 + b^2m^2 + c^2n^2)R^2$  oder in rechtwinkligen Coordinaten  $r^4 = a^2x^2 + b^2y^2 + c^2z^2$ .

Jedem Punkt eines materiellen Körpers entspricht eine Reihe ähnlicher Poinso't'scher Ellipsoide. Nehmen wir die reciproken Flächen derselben, so erhalten wir eine zweite Reihe ähnlicher Ellipsoide,

1) Wenn im Folgenden vom Trägheitsellipsoid ohne besonderen Zusatz die Rede ist, so meinen wir immer das Poinso't'sche. Ueber das reciproke Ellipsoid siehe Clebsch in Crelle's J. LVII. 73.

welche dieselben Axen haben wie die ersten und derart sind, dass die Trägheitsmomente des Körpers bez. der Lothe auf die Berührungsebenen an eines der Ellipsoide den Quadraten dieser Lothe proportional sind. *Wir wollen jedoch dasjenige Ellipsoid das reciproke nennen, bei welchem das Trägheitsmoment bez. eines Lothes auf eine Berührungsebene dem Product der Masse mit dem Quadrat dieses Loths gleich ist.*

Ist  $M$  die Masse des Körpers und sind  $A, B, C$  die Hauptträgheitsmomente, so ist die Gleichung des reciproken Ellipsoids

$$\frac{X^2}{A} + \frac{Y^2}{B} + \frac{Z^2}{C} = \frac{1}{M}.$$

Die Constante auf der rechten Seite muss offenbar  $\frac{1}{M}$  sein, weil  $MX^2$  nach der Definition  $= A$  sein muss, wenn  $Y$  und  $Z$  gleich Null gesetzt werden.

§ 27. Umgekehrt kann man die Reihe der Poinso'tschen Ellipsoide für irgend einen Punkt eines Körpers als reciprok — mit andern Constanten — zu dem zweiten Ellipsoid dieses Punktes ansehen. Sie haben sämmtlich eine dem zweiten Ellipsoid entgegengesetzte Gestalt, indem ihre längsten Axen in die Richtung der kürzesten Axe und ihre kürzesten Axen in die Richtung der längsten Axe des zweiten Trägheitsellipsoids fallen. Die ersten Trägheitsellipsoide gleichen übrigens der allgemeinen Gestalt des Körpers mehr als das zweite Trägheitsellipsoid. Sie springen vor, wo der Körper vorspringt und treten zurück, wo der Körper zurücktritt. Gerade umgekehrt ist es bei dem zweiten Trägheitsellipsoid. Siehe § 21, Beisp. 3.

§ 28. Beisp. 1. Das reciproke Centralellipsoid einer materiellen elliptischen Scheibe zu finden. Nimmt man die in § 21, Beisp. 1 für  $A, B, C$  gegebenen Werthe, so ist das reciproke Ellipsoid offenbar  $\frac{X^2}{b^2} + \frac{Y^2}{a^2} + \frac{Z^2}{a^2 + b^2} = \frac{1}{4}$ .

Beisp. 2. Das reciproke Ellipsoid für irgend einen Punkt  $O$  eines materiellen Stabs  $AB$  ist

$$\frac{X^2}{0} + \frac{Y^2}{\frac{1}{3}a^2 + c^2} + \frac{Z^2}{\frac{1}{3}a^2 + c^2} = 1,$$

wenn man die Bezeichnung des § 21, Beisp. 2 benutzt. Es ist also ein sehr abgeplattetes Rotationsellipsoid, welches, wenn der Stab unendlich dünn ist, eine Kreisfläche wird, deren Centrum in  $O$  liegt, deren Radius  $\sqrt{\frac{1}{3}a^2 + c^2}$  ist und deren Ebene senkrecht auf dem Stabe steht.

Beisp. 3. Man kann zeigen, dass die allgemeine Gleichung des reciproken Trägheitsellipsoids bezogen auf irgend ein System rechtwinkliger Axen, die sich in dem gegebenen Punkt des Körpers schneiden,

$$\begin{vmatrix} A & -F & -E & MX \\ -F & B & -D & MY \\ -E & -D & C & MZ \\ MX & MY & MZ & M \end{vmatrix} = 0$$



ist oder entwickelt

$$(BC - D^2) X^2 + (CA - E^2) Y^2 + (AB - F^2) Z^2 + 2(AD + EF) YZ + \\ + 2(BE + FD) ZX + 2(CF + DE) XY = \frac{1}{M} (ABC - AD^2 - BE^2 - CF^2 - 2DEF).$$

Die rechte Seite der Gleichung, mit  $M$  multiplicirt, ist die Determinante, welche man erhält, wenn man die letzte Horizontal- und Verticalreihe weglässt; die Coefficienten von  $X^2$ ,  $Y^2$ ,  $Z^2$ ,  $2ZX$ ,  $2XY$ ,  $2XZ$  sind die Unterdeterminanten dieser Determinante.

§ 29. Die Benutzung eines andern Ellipsoids, dessen auf die Hauptaxen des Schwerpunkts bezogene Gleichung

$$\frac{X^2}{\Sigma m x^2} + \frac{Y^2}{\Sigma m y^2} + \frac{Z^2}{\Sigma m z^2} = \frac{5}{M}$$

ist, hat Legendre in seinen *Fonctions Elliptiques* empfohlen. Dieses Ellipsoid ist als ein homogener Körper von solcher Dichtigkeit anzusehen, dass seine Masse derjenigen des Körpers gleichkommt. Nach § 8, Beisp. 3 besitzt es die Eigenschaft, dass seine Trägheitsmomente bez. seiner Hauptaxen und deshalb nach § 15 seine Trägheitsmomente bez. aller Ebenen und Axen dieselben sind, wie die des Körpers. Dieses Ellipsoid kann man *Ellipsoid gleichen Moments* oder *Legendre'sches Ellipsoid* nennen.

Beisp. Wenn sich eine Ebene so bewegt, dass das Trägheitsmoment bez. ihrer stets dem Quadrat des Loths von dem Schwerpunkt auf die Ebene proportional ist, so hüllt diese Ebene ein dem Legendre'schen ähnliches Ellipsoid ein.

§ 30. Noch ein anderes Ellipsoid wird manchmal benutzt. Nach § 15 ist das Trägheitsmoment bez. einer Ebene, deren Richtungscosinusse ( $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$ ) sind,

$$I' = \Sigma m x^2 \cdot \alpha^2 + \Sigma m y^2 \cdot \beta^2 + \Sigma m z^2 \cdot \gamma^2 + 2 \Sigma m y z \cdot \beta \gamma + 2 \Sigma m z x \cdot \gamma \alpha + 2 \Sigma m x y \cdot \alpha \beta.$$

Construirt man daher wie in § 19 das Ellipsoid

$$\Sigma m x^2 \cdot X^2 + \Sigma m y^2 \cdot Y^2 + \Sigma m z^2 \cdot Z^2 + 2 \Sigma m y z \cdot YZ + 2 \Sigma m z x \cdot ZX + 2 \Sigma m x y \cdot XY = K,$$

so wird das Trägheitsmoment bez. irgend einer durch den Mittelpunkt des Ellipsoids gehenden Ebene durch das reciproke Quadrat des auf dieser Ebene senkrechten Radiusvectors dargestellt.

Wenn man die Gleichung des Poinot'schen mit derjenigen dieses Ellipsoids vergleicht, so sieht man, dass die eine aus der andern durch Subtraction derselben Grösse von jedem der Coefficienten von  $X^2$ ,  $Y^2$ ,  $Z^2$  hervorgeht. Die Richtung der Kreisschnitte ist daher in beiden Ellipsoiden dieselbe.

Dieses Ellipsoid kann ebenfalls dazu benutzt werden, die Trägheitsmomente für irgend eine durch den Koordinatenanfang gehende Gerade zu finden. Denn aus § 15 ergibt sich, dass das Trägheitsmoment für irgend einen Radiusvector durch die Differenz zwischen dem reciproken Quadrat dieses Radiusvectors und der Summe der reciproken Quadrate der Halbaxen dargestellt wird. Das Ellipsoid ist dem Legendre'schen reciprok. Die Hauptdurchmesser aller dieser Ellipsoide fallen ihrer Richtung nach zusammen und jedes von ihnen kann dazu dienen, die Richtungen der Hauptaxen für irgend einen Punkt zu bestimmen.

§ 31. Wenn der betrachtete Körper eine Lamelle ist, so wird der Schnitt des reciproken Trägheitsellipsoids für irgend einen Punkt der Lamelle mit der

Ebene der Lamelle die *reciproke Trägheitsellipse* genannt. Ist die Ebene der Lamelle die  $xy$ -Ebene, so wird  $\sum m z^2 = 0$ . Der Schnitt mit dem vierten Ellipsoid fällt dann offenbar mit der reciproken Trägheitsellipse für den Punkt zusammen. Lässt man irgend eine Poinso'sche Trägheitsellipse um ihren Mittelpunkt einen rechten Winkel beschreiben, so wird sie offenbar der reciproken Trägheitsellipse ähnlich und ist ihr ähnlich gelegen. Im Fall einer Lamelle kann daher jede dieser Ellipsen leicht in die andere verwandelt werden.

§ 32. Der Kegel gleichen Trägheitsmoments. Eine Gerade geht durch einen festen Punkt  $O$  und bewegt sich auf solche Art um ihn, dass das Trägheitsmoment bez. ihrer stets dasselbe bleibt und einer gegebenen Grösse  $I$  gleichkommt. Die Gleichung des durch die Gerade erzeugten Kegels zu finden.

Die Hauptachsen für  $O$  mögen als Coordinatenachsen genommen werden und  $(\alpha, \beta, \gamma)$  seien die Richtungs cosinusse der Geraden in irgend einer Lage. Nach § 16 ist dann  $A\alpha^2 + B\beta^2 + C\gamma^2 = I$ .

Die Gleichung für den Ort der Linie ist daher

$$(A - I)\alpha^2 + (B - I)\beta^2 + (C - I)\gamma^2 = 0$$

oder in Cartesischen Coordinaten

$$(A - I)x^2 + (B - I)y^2 + (C - I)z^2 = 0.$$

Aus dieser Gleichung geht hervor, dass die Hauptdurchmesser des Kegels die Hauptachsen des Körpers für den gegebenen Punkt sind.

Die gegebene Grösse  $I$  muss kleiner als das grösste und grösser als das kleinste der Momente  $A, B, C$  sein. Ist  $A > B > C$  und  $I < B$ , so wendet der Kegel seine hohle Seite der Axe  $C$  zu; ist  $I < B$ , der Axe  $A$  und wenn  $I < B$  so werden aus dem Kegel zwei Ebenen, die mit den Mittelpunktschnitten des Trägheitsellipsoids für den Punkt  $O$  zusammenfallen.

Dieser Kegel hat die geometrische Eigenthümlichkeit, dass seine Kreisschnitte stets dieselbe Richtung haben, wie die Kreisschnitte des Trägheitsellipsoids für die Spitze des Kegels.

Der Kegel heisst ein *Kegel gleichen Moments* für den Punkt, in welchen seine Spitze fällt.

§ 33. Körper gleichen Trägheitsmoments. Zwei Körper oder Körpersysteme heissen gleichen Trägheitsmoments oder gleichen Moment, wenn ihre Trägheitsmomente bez. jeder beliebigen Geraden einander gleich sind.

§ 34. Haben zwei Systeme denselben Schwerpunkt, dieselbe Masse, dieselben Hauptachsen und Hauptmomente für den Schwerpunkt, so folgt aus den beiden Fundamentalsätzen der §§ 13 und 14, dass ihre Trägheitsmomente für jede beliebige Gerade einander gleich sind.

Auch die Umkehrung des Satzes ist richtig. Wenn die beiden Körper gleiche Trägheitsmomente bez. jeder Geraden haben, dann müssen offenbar die Axen der Maximal und Minimalmomente in den beiden Körpern dieselben sein. Von allen Geraden, die eine gegebene Richtung haben, hat diejenige das kleinste Trägheitsmoment für jeden der beiden Körper aufzuweisen, welche durch seinen Schwerpunkt geht (§ 13). Man betrachte irgend eine Richtung senkrecht zu der Geraden, welche die beiden Schwerpunkte  $G, G'$  verbindet. Das Minimum für den einen Körper hat eine Gerade durch  $G$ ,

für den andern eine durch  $G'$ . Sie können nur unter der Bedingung dieselben sein, wenn  $G$  und  $G'$  zusammenfallen.

Man betrachte alsdann alle Richtungen, welche durch den gemeinschaftlichen Schwerpunkt gehen. Die Axen der grössten und kleinsten Trägheitsmomente sind für jeden der Körper zwei der Hauptaxen dieses Körpers (§ 23). Sie müssen daher in beiden Körpern zusammenfallen. Da die dritte Axe in jedem senkrecht auf den beiden andern steht, so müssen auch sie sich decken.

Schliesslich betrachte man zwei parallele Axen, die um  $p$  voneinander abstehen und von denen die eine durch den gemeinschaftlichen Schwerpunkt geht. Nach dem Satz von den parallelen Axen ist die Differenz der Trägheitsmomente bez. ihrer für jeden Körper  $Mp^2$ , worin  $M$  die Masse dieses Körpers bedeutet. Die beiden Trägheitsmomente und der Abstand  $p$  sind aber gleich. Daher sind auch die Massen gleich.

Man sieht leicht ein, dass zwei Systeme gleicher Momente dasselbe Trägheitsellipsoid und daher auch dieselben Hauptaxen für jeden Punkt haben müssen.

**§ 35. Das Dreieck.** *Die Trägheits- und Deviationsmomente eines Dreiecks bez. irgend welcher Axen zu finden.*

Sind  $\beta$  und  $\gamma$  die Abstände der Eckpunkte  $B$ ,  $C$  eines Dreiecks  $ABC$  von irgend einer durch den Eckpunkt  $A$  gehenden Geraden  $AX$ , welche in der Ebene des Dreiecks liegt, so ist bekanntlich das Trägheitsmoment des Dreiecks bez.  $AX$ , wenn  $M$  die Masse des Dreiecks bedeutet,  $\frac{1}{6} M (\beta^2 + \beta\gamma + \gamma^2)$ .

Man setze drei gleich materielle Punkte, von denen jeder die Masse  $\frac{1}{3} M$  hat, auf die Mittelpunkte der drei Seiten. Offenbar ist dann das Trägheitsmoment der drei Massenpunkte bez.  $AX$

$$\frac{M}{3} \left\{ \left( \beta + \frac{\gamma}{2} \right)^2 + \left( \frac{\gamma}{2} \right)^2 + \left( \frac{\beta}{2} \right)^2 \right\},$$

also dasselbe, wie das des Dreiecks. Die drei Punkte, als ein System betrachtet, und das Dreieck haben denselben Schwerpunkt  $O$ . Zieht man eine Gerade  $OX'$  durch ihn parallel zu  $AX$ , so sind die Trägheitsmomente der beiden Systeme bez.  $OX'$  offenbar gleich.

Da diese Gleichheit für alle in der Ebene des Dreiecks durch  $O$  gehenden Geraden besteht, so gilt sie auch für zwei aufeinander senkrechte Geraden  $OX'$ ,  $OY''$  und mithin auch für ein auf der Ebene des Dreiecks errichtetes Loth  $OZ'$ .

Eine der Hauptaxen des Dreiecks und des Systems der drei Punkte für den Punkt  $O$  steht senkrecht auf der Ebene und ist daher beiden Systemen gemeinschaftlich. Die in der Ebene liegenden Hauptaxen für  $O$  sind die beiden Geraden, für welche die Trägheitsmomente am grössten und kleinsten sind und daher nach dem Früheren für beide

Systeme dieselben. Wenn für irgend einen Punkt zwei Systeme dieselben Hauptaxen und Hauptmomente haben, so sind auch die Trägheitsmomente bez. aller durch diesen Punkt gehenden Axen und die Deviationsmomente bez. irgend zweier sich in diesem Punkt schneidender Geraden dieselben. Und wenn dieser Punkt der Schwerpunkt beider Systeme ist, so gilt dasselbe auch für jeden andern Punkt.

*Wird daher ein materieller Punkt, dessen Masse ein Drittel der Masse des Dreiecks ist, auf den Mittelpunkt jeder Seite gesetzt, so ist das Trägheitsmoment des Dreiecks bez. irgend einer Geraden und das Deviationsmoment bez. irgend zweier sich schneidender Geraden dasselbe, wie dasjenige des Punktsystems.*

§ 36. Aequivalente Punkte, d. h. Punkte, deren Trägheitsmoment für jede Axe dasselbe ist, wie das des Körpers, sind für die Ermittlung der Trägheits- und Deviationsmomente vom grössten Nutzen. *Man kann sie auch für allgemeinere Integrationen gebrauchen.* Man nehme z. B. an, ein gegebener Körper sei von demselben Trägheitsmoment wie drei materielle Punkte, deren Coordinaten  $(x_1, y_1, z_1)$ ,  $(x_2, y_2, z_2)$ ,  $(x_3, y_3, z_3)$  sind. Da die in diesen Punkten enthaltenen Massen nicht in allen Fällen gleich sein werden, so mögen sie bez.  $M_1, M_2, M_3$  sein, wobei selbstverständlich ihre Summe der Masse des Körpers gleich ist.  $\varphi(x, y, z)$  sei irgend eine Function von  $x, y, z$ , welche keine höhere als die zweite Potenz enthält. Es werde der Werth des Integrals oder der über den Körper erstreckten Summe  $\sum m \varphi(x, y, z)$  gesucht, wo  $m$  ein Element der Masse ist. Das verlangte Integral ist offenbar gleich

$$M_1 \varphi(x_1, y_1, z_1) + M_2 \varphi(x_2, y_2, z_2) + M_3 \varphi(x_3, y_3, z_3).$$

Wählt man die gleichwerthigen Punkte passend aus, so kann man eine ähnliche Regel benutzen, wenn  $\varphi$  irgend eine Function dritten oder vierten Grades von  $x, y, z$  ist; da diese Fälle in der Dynamik unveränderlicher Systeme aber nicht vorkommen, so werden wir weiter unten nur einige Resultate feststellen.

Derselbe Körper kann mit verschiedenen Punktsystemen das gleiche Trägheitsmoment haben und von diesen Systemen können einige brauchbarer als die andern sein. Soll eine Reihe gleichwerthiger Punkte von Nutzen sein, so ist dazu nöthig, (1) dass die Punkte der Art in dem Körper vertheilt werden, dass ihre Coordinaten bez. irgend welcher gegebenen Axen leicht gefunden werden können, (2) dass die Anzahl der verwendeten Punkte so klein als möglich sei. Von diesen beiden Erfordernissen ist das erste bei weitem das wichtigste.

Punkte gleichen Trägheitsmoments sind nicht nur zur Abkürzung von Integrationen zu gebrauchen, die sonst vielleicht schwierig wären. Sie sind auch sonst von Nutzen; wir werden gleich sehen, welche Bedeutung sie für die Dynamik haben.

§ 37. *Das Centrailellipsoid eines Dreiecks kann wie folgt gefunden werden.*

Man beschreibe eine Ellipse in das Dreieck, welche zwei seiner Seiten  $AB, BC$  in ihren Mittelpunkten  $F, D$  berührt. Sie berührt dann die dritte Seite  $CA$  nach dem Carnot'schen Satz in ihrem Mittelpunkt  $E$ . Da  $DF$  der Tangente  $CA$  im Punkt  $E$  parallel ist, so geht die Gerade, welche  $E$  mit dem Mittelpunkt  $N$  von  $DF$  verbindet, durch das Centrum; der Mittelpunkt der Ellipse fällt daher mit  $O$ , dem Schwerpunkt des Dreiecks zusammen.

Man kann beweisen, dass dieser Kegelschnitt die Trägheitsellipse des Dreiecks für den Punkt  $O$  ist. Suchen wir zu diesem Zweck das Trägheitsmoment des Dreiecks bez.  $OE$ . Setze  $OE = r$ ;  $r'$  sei der halbe zu  $r$  conjugirte Durchmesser und  $\omega$  der Winkel zwischen  $r$  und  $r'$ . Es ist nun  $ON = \frac{1}{2} r$  und daher nach der Gleichung der Ellipse  $FN^2 = \frac{3}{4} r'^2$ ; also

$$\left. \begin{array}{l} \text{das Trägheitsmoment} \\ \text{bez. } OE \end{array} \right\} = \frac{2}{3} M \cdot \frac{3}{4} r'^2 \sin^2 \omega = \frac{M}{2} \cdot \frac{A^2}{\pi^2 r^2},$$

worin  $A$  den Flächeninhalt der Ellipse darstellt, so dass also die Trägheitsmomente des Systems bez.  $OE, OF, OD$  den Quadraten  $OE^2, OF^2, OD^2$  umgekehrt proportional sind. Nehmen wir eine Trägheitsellipse von den richtigen Dimensionen, so wird sie den eingeschriebenen Kegelschnitt in  $E, F$  und  $D$  und also auch in den entgegengesetzten Enden der durch diese Punkte gehenden Durchmesser schneiden. Zwei Kegelschnitte können sich aber nicht in sechs Punkten schneiden, ohne identisch zu sein. Der Kegelschnitt ist deshalb eine Trägheitsellipse für den Punkt  $O$  des Dreiecks.

Eine Normale in  $O$  auf der Ebene des Dreiecks ist eine Hauptaxe des Dreiecks (§ 16). Ein Trägheitsellipsoid des Dreiecks hat daher den eingeschriebenen Kegelschnitt zu einem Hauptschnitt. Sind  $2a$  und  $2b$  die Längen der Axen dieses Kegelschnitts, so findet man  $2c$ , die Länge der auf der Ebene der Lamelle senkrechten Axe des Ellipsoids, nach §§ 7 und 19 aus  $1/c^2 = 1/a^2 + 1/b^2$ .

Ist das Dreieck gleichseitig, so wird das Trägheitsellipsoid zum Rotationsellipsoid und jede durch den Schwerpunkt gehende und in der Ebene des Dreiecks gelegene Axe zur Hauptaxe.

Da jede ähnliche und ähnlich gelegene Ellipse ebenfalls eine Trägheitsellipse ist, so können wir die um das Dreieck beschriebene Ellipse, deren Mittelpunkt in den Schwerpunkt fällt, als Trägheitsellipse des Dreiecks ansehen.

§ 38. Beisp. 1. Eine Trägheitsellipse für einen Eckpunkt einer dreieckigen Lamelle berührt die gegenüberliegende Seite in ihrem Mittelpunkt und halbt die anliegenden Seiten.

Beisp. 2. Eine Trägheitsellipse für den Mittelpunkt  $F$  der Seite  $AB$  einer dreieckigen Lamelle  $ABC$  ist dem Dreieck umschrieben und hat  $FC, FB$  zu conjugirten Durchmessern. Beweise auch, dass eine andere Trägheitsellipse für denselben Punkt  $F$  die Seiten  $AC, BC$  in ihren Mittelpunkten berührt.

Beisp. 3. Die Hauptträgheitsradien für den Schwerpunkt eines Dreiecks sind die Wurzeln der Gleichung  $x^4 - \frac{a^2 + b^2 + c^2}{36} x^2 + \frac{\Delta^2}{108} = 0$ , worin  $\Delta$  der Flächeninhalt des Dreiecks ist.

Beisp. 4. Die Richtung der Hauptachsen für den Schwerpunkt  $O$  eines Dreiecks kann so construirt werden. Trage auf dem im Mittelpunkt  $D$  einer Seite  $BC$  errichteten Loth Längen  $DH = \frac{6k^2}{p}$ ,  $DH' = \frac{6k'^2}{p}$  ab, worin  $p$  das Loth von  $A$  auf  $BC$  und  $k, k'$  die Hauptträgheitsradien sind, wie man sie in dem vorigen Beispiel gefunden hat.  $OH, OH'$  sind dann die Richtungen der Hauptachsen für  $O$ , deren Trägheitsmomente resp.  $Mk^2$  und  $Mk'^2$  sind.

Beisp. 5. Die Richtungen der Hauptachsen und die Hauptmomente für den Schwerpunkt können auch so bestimmt werden. Man errichte im Mittelpunkt  $D$  einer Seite  $BC$  ein Loth  $DK = BC/2\sqrt{3}$ , beschreibe einen Kreis um  $OK$  als Durchmesser und verbinde  $D$  mit dem Mittelpunkt von  $OK$  durch eine Linie, welche den Kreis in  $R$  und  $S$  schneidet;  $OR, OS$  sind dann die Richtungen der Hauptachsen und die Trägheitsmomente bez. ihrer sind  $M \frac{DS^2}{2}$  bez.  $M \frac{DR^2}{2}$ .

Beisp. 6. Setzt man vier materielle Punkte, von denen jeder ein Sechstel der Masse der Fläche eines Parallelogramms ist, auf die Mittelpunkte der Seiten und einen fünften ein Drittel der Masse enthaltenden Punkt in den Schwerpunkt, dann sind die fünf materiellen Punkte und die Fläche des Parallelogramms Systeme gleichen Trägheitsmoments.

Beisp. 7. Setzt man materielle Punkte, von denen jeder ein Zwölftel der Masse einer vierseitigen materiellen Ebene enthält, in jede Ecke und einen fünften von derselben aber negativen Masse in den Durchschnittspunkt der Diagonalen, so fällt der Schwerpunkt der vierseitigen Ebene mit dem Schwerpunkt dieser fünf Punkte zusammen. Man bringe noch einen sechsten Punkt, dessen Masse drei Viertel der Masse des Vierecks beträgt, in den so gefundenen Schwerpunkt und beweise, dass alsdann diese sechs materiellen Punkte gleichen Trägheitsmoments mit der vierseitigen Lamelle sind.

Beisp. 8. Materielle Punkte, von denen jeder einem Viertel der Masse der materiellen Ebene einer Ellipse gleichkommt, mögen in den Mittelpunkten der Sehnen liegen, welche die Endpunkte eines Paares conjugirter Durchmesser verbinden. Man beweise, dass diese Punkte dasselbe Trägheitsmoment, wie die Ellipsenfläche haben.

Beisp. 9. Ein Zehntel der Masse des homogenen Körpers eines Ellipsoids liege in jedem der sechs Endpunkte eines Systems conjugirter Durchmesser und zwei Fünftel dieser Masse in dem Mittelpunkt. Man beweise, dass dieses Punktsystem dasselbe Trägheitsmoment hat, wie das Ellipsoid.

Beisp. 10. Eine Kugel vom Radius  $a$  und der Masse  $M$  hat dasselbe Trägheitsmoment wie ein System von vier materiellen Punkten, von denen jeder die Masse  $\frac{3M}{20} \left(\frac{a}{r}\right)^2$  hat und die so liegen, dass ihre Abstände vom Centrum, von denen jeder gleich  $r$  ist, gleiche Winkel miteinander machen und einem fünften materiellen Punkt, der im Mittelpunkt liegt und dem Rest der Masse der Kugel gleichkommt.

§ 39. Das Tetraeder. Die Trägheits- und Deviationsmomente eines Tetraeders bez. irgend welcher Axen, d. h. ein System materieller Punkte gleichen Moments zu finden.

$ABCD$  sei das Tetraeder. Durch einen Eckpunkt  $D$  lege man eine Ebene und nehme sie zur  $xy$ -Ebene.  $D$  sei der Flächeninhalt

der Basis  $ABC$ ;  $\alpha, \beta, \gamma$  die Abstände ihrer Eckpunkte von der  $xy$ -Ebene und  $p$  die Länge des Lothes von  $D$  auf die Basis  $ABC$ .

$PQR$  sei irgend ein Schnitt parallel zur Basis  $ABC$  und von der Dicke  $du$ , wenn  $u$  das Loth von  $D$  auf  $PQR$  ist. Das Dreieck  $PQR$  hat bez. der  $xy$ -Ebene dasselbe Trägheitsmoment wie drei in den Mittelpunkten der Seiten liegende gleiche materielle Punkte, von denen jeder einem Drittel seiner Masse gleichkommt. Das Volumen des Elements  $PQR$  ist  $\frac{u^2}{p^2} D du$ . Die Ordinaten der Mittelpunkte der Seiten  $AB, BC, CA$  sind bez.  $\frac{\alpha+\beta}{2}, \frac{\beta+\gamma}{2}, \frac{\gamma+\alpha}{2}$ . Daher sind die Ordinaten der Mittelpunkte von  $PQ, QR, RP$  der Aehnlichkeit der betreffenden Dreiecke wegen  $\frac{\alpha+\beta}{2} \frac{u}{p}, \frac{\beta+\gamma}{2} \frac{u}{p}, \frac{\gamma+\alpha}{2} \frac{u}{p}$ .

Das Trägheitsmoment des Dreiecks  $PQR$  bez. der  $xy$ -Ebene ist daher

$$\frac{1}{3} \frac{u^2}{p^2} D du \left\{ \left( \frac{\beta+\gamma}{2} \frac{u}{p} \right)^2 + \left( \frac{\gamma+\alpha}{2} \frac{u}{p} \right)^2 + \left( \frac{\alpha+\beta}{2} \frac{u}{p} \right)^2 \right\}.$$

Integriert man von  $u=0$  bis  $u=p$ , so erhält man das Trägheitsmoment des Tetraeders bez. der  $xy$ -Ebene

$$\frac{V}{10} (\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 + \beta\gamma + \gamma\alpha + \alpha\beta),$$

worin  $V$  das Volumen bedeutet. Werden materielle Punkte von je ein Zwanzigstel der Masse des Tetraeders in jede Ecke gebracht und der Rest der Masse, also vier Fünftel, im Schwerpunkt vereinigt, so würde das Trägheitsmoment dieser fünf Punkte bez. der  $xy$ -Ebene

$$V \frac{4}{5} \left( \frac{\alpha+\beta+\gamma}{4} \right)^2 + \frac{V}{20} \alpha^2 + \frac{V}{20} \beta^2 + \frac{V}{20} \gamma^2,$$

also das nämliche, wie dasjenige des Tetraeders sein.

Der Schwerpunkt dieser fünf Punkte ist derselbe wie derjenige des Tetraeders und zusammen haben sie dieselbe Masse wie das Tetraeder. Mithin sind nach § 13 die Trägheitsmomente der beiden Systeme bez. irgend einer durch den Schwerpunkt gehenden Ebene dieselben und nach dem nämlichen Paragraphen besteht diese Gleichheit für alle beliebigen Ebenen. Aus § 5 folgt dann weiter, dass auch die Trägheitsmomente bez. irgend einer Geraden gleich sind. *Die beiden Systeme sind daher gleichen Moments<sup>1)</sup>.*

§ 40. *Affine Transformationen.* Wenn der Abstand eines jeden Punktes einer im Raum gegebenen Figur von einer festen Ebene in einem bestimmten Verhältniss vergrößert oder verkleinert wird, so sagt man, die Figur werde *affin transformirt*. Durch drei successive affine Transformationen mit Hilfe von drei aufeinander rechtwinkligen

1) Siehe den Reye'schen Satz über die Ersetzung eines Körpers durch vier Punkte in Schlämilch's Z. S. X, 433.

Ebenen als Grundebenen kann die Figur oft vereinfacht werden. So kann irgend ein Tetraeder in ein regelmässiges Tetraeder und ein Ellipsoid in eine Kugel transformirt werden. In diesem letzteren Falle geht jeder Halbmesser des Ellipsoids in einen Kugelhalbmesser über, der „die zu dem Ellipsoidhalbmesser oder dessen Endpunkt gehörige excentrische Linie“ heissen soll.

Wird die Grundebene, mit Hilfe welcher die Figur affin transformirt wird, parallel zu sich selbst in eine von ihrer früheren Lage um  $D$  abstehende Lage bewegt, so wird offenbar an der transformirten Figur keine Formveränderung hervorgebracht. Ist  $n$  das bestimmte Transformationsverhältniss, so wird damit die transformirte Figur lediglich durch einen Raum  $nD$  senkrecht zur Grundebene bewegt. Wir können daher annehmen, die Grundebene gehe durch irgend einen uns passenden Punkt.

§ 41. Sind zwei Körper gleichen Trägheitsmoments, so sind es auch ihre affinen Bilder.

Ist der Coordinatenanfang der gemeinschaftliche Schwerpunkt, so sind die beiden Körper derart, dass  $\Sigma m = \Sigma m'$ ;  $\Sigma mx = 0$ ,  $\Sigma m'x' = 0$  etc.,  $\Sigma mx^2 = \Sigma m'x'^2$ ,  $\Sigma myz = \Sigma m'y'z'$  etc., wenn sich die Buchstaben ohne Strich auf den einen, diejenigen mit Strich auf den andern Körper beziehen. Wenn nun beide Körper von der  $xy$ -Ebene aus in dem bestimmten Verhältniss  $1:n$  affin transformirt werden, so wird ein Punkt, dessen Coordinaten  $(x, y, z)$  sind, nach  $(x, y, nz)$  und  $(x', y', z')$  nach  $(x', y', nz')$  verlegt. Auch die Massenelemente  $m, m'$  werden  $nm, nm'$ . Offenbar werden die obigen Identitäten durch diese Aenderungen nicht alterirt; die transformirten Körper bleiben daher von gleichem Trägheitsmoment.

Die affine Transformation einer Trägheitsellipse einer ebenen materiellen Fläche ist eine Trägheitsellipse ihrer affinen Transformation.

Die Figur werde von der  $x$ -Axe als Grundlinie aus so transformirt, dass ein Punkt  $(x, y)$  nach  $(x, y')$  versetzt wird, wobei  $y' = ny$  ist, und dass jedes Flächenelement  $m$  zu  $m'$  wird, wobei  $m' = nm$  ist. Es ergibt sich

$$\Sigma mx^2 = \frac{1}{n} \Sigma m'x^2, \quad \Sigma mxy = \frac{1}{n^2} \Sigma m'xy', \quad \Sigma my^2 = \frac{1}{n^3} \Sigma m'y'^2.$$

Die Trägheitsellipsen der ursprünglichen Figur und ihrer Transformation sind

$$\begin{aligned} \Sigma my^2 X^2 - 2 \Sigma mxy XY + \Sigma mx^2 Y^2 &= M \varepsilon^4, \\ \Sigma m'y'^2 X'^2 - 2 \Sigma m'xy' X'Y' + \Sigma m'x^2 Y'^2 &= M' \varepsilon'^4. \end{aligned}$$

Um die erstere zu transformiren, setze man  $X' = X$ ,  $Y' = nY$ . Die erste Gleichung geht in Folge der obigen Identitäten, wenn man  $\varepsilon'^2 = \varepsilon^4 n^2$  setzt, in die zweite über.



§ 42. Beisp. 1. Man sieht leicht ein, dass eine Centraellipse einer Quadratfläche der eingeschriebene Kreis ist. Transformirt man die Figur zuerst mit Hilfe einer Seite als Grundlinie und darauf mit Hilfe einer Diagonale als Grundlinie, so wird aus dem Quadrat nacheinander ein Rechteck und ein Parallelogramm. Daher ist eine Centralträgheitsellipse eines Parallelogramms der ihm eingeschriebene Kegelschnitt, der die Seiten in ihren Mittelpunkten berührt.

Beisp. 2. Wenn man durch affine Transformation ein gleichseitiges Dreieck in ein beliebiges umändert, so lassen sich die Resultate einiger früherer Paragraphen ableiten; die Methode wird jedoch am besten durch ihre Anwendung auf ein Tetraeder erklärt.

Beisp. 3. Da jedes Ellipsoid auf diese Art aus einer Kugel abgeleitet werden kann, so folgt aus § 38, Beisp. 10, dass jeder ellipsoidische Körper von der Masse  $M$  gleiche Trägheitsmomente hat mit einem System von *erstens* vier materiellen Punkten, von denen jeder die Masse  $\frac{3M}{20} \cdot \frac{1}{n^3}$  besitzt und auf einem ähnlichen Ellipsoid, dessen lineare Dimensionen  $n$  Mal so gross sind, als die des materiellen Ellipsoids, derart liegt, dass die excentrischen Linien (§ 40) der Punkte gleiche Winkel miteinander machen, und *zweitens* einem fünften materiellen Punkt, der im Schwerpunkt liegt und dem Rest der Masse des Ellipsoids gleichkommt.

Da dieses materielle Ellipsoid als ein Legendre'sches Ellipsoid für irgend einen gegebenen Körper betrachtet werden kann, so hat jeder beliebige Körper gleiche Trägheitsmomente mit einem System von fünf materiellen Punkten, die in der oben beschriebenen Art auf einem dem Legendre'schen Ellipsoid des Körpers ähnlichen Ellipsoid vertheilt sind.

Beisp. 4. Man zeige, dass der Körper eines schiefen Kegels, dessen Basis eine Ellipse ist, gleiche Trägheitsmomente hat, wie ein System von drei materiellen Punkten, von denen jeder ein Zehntel der Masse des Kegels enthält und die so auf dem Umfang der Basis vertheilt werden, dass die Unterschiede ihrer excentrischen Anomalien gleich sind, einem vierten Punkt, der drei Zehntel des Kegels gleichkommt und im Mittelpunkt der die Spitze mit dem Schwerpunkt der Basis verbindenden Geraden liegt, und einem fünften Punkt, der den Rest der Masse des Kegels enthält und im Schwerpunkt seines Volumens liegt.

§ 43. *Ein Ellipsoid von gleichem Trägheitsmoment mit irgend einem Tetraeder zu finden.*

Die Trägheitsmomente eines regelmässigen Tetraeders bez. aller durch den Schwerpunkt  $O$  gehenden Ebenen sind nach § 23 gleich. Wenn  $r$  der Radius der eingeschriebenen Kugel ist, so findet man aus § 39 leicht, dass das Moment für die einer Seitenfläche parallele Ebene  $M \frac{3r^2}{5}$  ist. Beschreibt man nun eine Kugel

mit dem Radius  $\varrho = r\sqrt{3}$ , deren Centrum im Schwerpunkt liegt und deren Masse der Masse des Tetraeders gleichkommt, so haben diese Kugel und das Tetraeder gleiche Trägheitsmomente. Daraus, dass durch die affine Transformation der Schwerpunkt jeder Seitenfläche in den Schwerpunkt der transformirten Seitenfläche fällt, folgt, dass das Ellipsoid, mit welchem ein Tetraeder von gleichem Moment ist, mit dem in das Tetraeder eingeschriebenen und jede Seitenfläche in ihrem Schwerpunkt berührenden Ellipsoid ähnlich und ähnlich gelegen ist, aber im Verhältniss von  $1:\sqrt{3}$  grössere lineare Dimensionen hat. Man sieht auch leicht ein, dass die Kugel mit dem Radius  $\varrho = r\sqrt{3}$  jede Kante des regelmässigen Tetraeders in ihrem Mittelpunkt berührt. Daraus folgt, dass das Ellipsoid von gleichem Moment mit einem Tetraeder jede Kante in ihrem Mittelpunkt berührt und seinen Mittelpunkt im Schwerpunkt des Volumens hat.

Beisp. 1. Wenn  $E^2$  die Summe der Quadrate der Kanten eines Tetraeders,  $I^2$  die Summe der Quadrate der Inhalte der Seitenflächen und  $V$  das Volumen

ist, zu beweisen, dass die Halbaxen des in das Tetraeder eingeschriebenen Ellipsoids, welches jede Seitenfläche in ihrem Schwerpunkt berührt und dessen Centrum im Schwerpunkt des Tetraeders liegt, die Wurzeln der Gleichung

$$q^6 - \frac{E^2}{2^4 \cdot 3} q^4 + \frac{F^2}{2^4 \cdot 3^2} q^2 - \frac{V^2}{2^6 \cdot 3} = 0$$

sind und dass, wenn diese Wurzeln die Werthe  $\sqrt{q_1}, \sqrt{q_2}, \sqrt{q_3}$  haben, die Trägheitsmomente für die Hauptebenen des Tetraeders  $M \frac{3q_1}{5}, M \frac{3q_2}{5}, M \frac{3q_3}{5}$  sind.

Beisp. 2. Wenn in dem Schwerpunkt  $E$  einer Seitenfläche ein Loth von der Länge  $EP = 4q^2 p$  errichtet wird, worin  $p$  das Loth von der gegenüberliegenden Ecke des Tetraeders auf diese Seitenfläche bezeichnet, abdaun ist  $P$  ein Punkt auf der Hauptebene, welcher der Wurzel  $q$  der cubischen Gleichung entspricht.

§ 44. Es lassen sich stets vier materielle Punkte von gleicher Masse finden, die mit irgend einem gegebenen begrenzten Körper von gleichem Moment sind.

$O$  sei der Schwerpunkt des Körpers;  $Ox, Oy, Oz$  die Hauptachsen von  $O$ . Die Trägheitsmomente bez. der Coordinatenebenen seien  $M\alpha^2, M\beta^2$  und  $M\gamma^2$ . Nach § 34 muss die Masse jedes materiellen Punktes  $\frac{1}{4}M$  sein.  $x_1, y_1, z_1, \dots, x_4, y_4, z_4$  seien die gesuchten Coordinaten der vier Punkte. Diese zwölf Coordinaten müssen dann den neun Gleichungen genügen

$$\begin{aligned} \sum x^2 &= 4\alpha^2, \quad \sum y^2 = 4\beta^2, \quad \sum z^2 = 4\gamma^2, \quad \sum xy = 0, \quad \sum yz = 0, \quad \sum xz = 0, \\ \sum x &= 0, \quad \sum y = 0, \quad \sum z = 0. \end{aligned}$$

Setzen wir nun  $x_1 = \alpha\xi_1, x_2 = \alpha\xi_2$  etc.  $y_1 = \beta\eta_1, y_2 = \beta\eta_2$  etc.  $z_1 = \gamma\zeta_1, z_2 = \gamma\zeta_2$  etc. erhalten wir neun Gleichungen zur Bestimmung der zwölf Coordinaten  $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_4, \eta_1, \eta_2, \dots, \eta_4, \zeta_1, \zeta_2, \dots, \zeta_4$ , welche von den ersteren sich nur dadurch unterscheiden, dass  $\alpha, \beta, \gamma$  die Grössen  $\alpha^2, \beta^2, \gamma^2$  durch die Einheit ersetzt wurde. Die sonstige Bedeutung der Ausdrücke aus, dass das Trägheitsellipsoid der vier Punkte für  $O$  eine Ellipse haben muss. Den Gleichungen wird daher genügt, wenn die vier Punkte, deren Coordinaten mit griechischen Lettern bezeichnet sind, die Ecken eines gegebenen Tetraeders sind (vergl. § 23, Beisp. 2). Dieses Tetraeder kann man sich als eine Kugel vom Radius  $\frac{1}{3}$  eingeschrieben denken. Transformirt man statt dieser Kugel in ein Ellipsoid von den Halbachsen  $\alpha\beta\gamma$ , so geht das regelmäßige Tetraeder in ein schiefes über. Die Eckpunkte dieses schiefen Tetraeders sind die gesuchten Punkte gleichen Moments.

Auf dieselbe Art kann man beweisen, dass sich stet drei materielle Punkte von gleicher Masse finden lassen, die mit irgend einer ebenen begrenzten Fläche von gleichem Moment sind. Wenn  $M\alpha^2, M\beta^2$  und Null die Trägheitsmomente der materiellen Fläche bez. der Hauptebenen für den Schwerpunkt sind, so erhält man als Resultat, dass diese Punkte auf der Ellipse  $\beta^2 x^2 + \alpha^2 y^2 = 2\alpha^2 \beta^2$  liegen müssen. Man findet auch, dass, wenn einer dieser Punkte,  $\varepsilon$   $ED$ , angenommen wird, die andern beiden Punkte  $E$  und  $F$  die Endpunkte der Sehne sind, welche im Punkt  $N$  durch die Verlängerung von  $ED$  halbiert wird, wobei  $ON = \frac{1}{2} OD$ .

§ 45. Momente von höherer Potenz. Diese Momente sind zwar in andern Wissenschaften von Nutzen, werden aber in der Dynamik nicht oft gebraucht. Es reicht deshalb aus, einige allgemeine Resultate anzuführen, deren Beweise dem Leser überlassen bleiben.

$d\sigma$  sei irgend ein Element einer Fläche oder eines Volumens, nach dem speciellen Fall.  $z$  sei seine auf irgend eine Ebene  $xy$  lo-

### § 46. Anwendung der Theorie der Inversion auf die Ermittlung von Trägheitsmomenten.

Ein von einem festen Koordinatenanfang  $O$  nach irgend einem Punkt  $P$  einer Figur gezogener Radiusvector möge nach einem solchen Punkt  $P'$  verlängert werden, dass das Rechteck  $OP \cdot OP' = \kappa^2$  ist, wenn  $\kappa$  irgend eine gegebene Grösse vorstellt. Bewegt sich nun  $P$  längs der ganzen gegebenen Figur, so beschreibt  $P'$  eine andre Figur, die invers zu der gegebenen genannt wird.

$(x, y, z)$  seien die Coordinaten von  $P$ ;  $(x', y', z')$  die von  $P'$ ;  $r, r'$  die Radiusvectoren;  $dv, dv'$  die auf Polarcoordinaten bezogenen Elemente des Volumens;  $\varrho, \varrho', dm, dm'$  ihre respectiven Dichtigkeiten und Massen,  $d\omega$  die sowohl zu  $dv$  als  $dv'$  gehörige körperliche Ecke bei  $O$ . Dann ist

$$dv' = r'^2 d\omega dr' = \left(\frac{\kappa}{r}\right)^6 r^2 d\omega dr = \left(\frac{\kappa}{r}\right)^6 dv$$

und da  $\frac{x'}{r'} = \frac{x}{r}$ , so erhält man  $x'^2 dv' = \left(\frac{\kappa}{r}\right)^{10} x^2 dv$ . Nun ist  $dm = \varrho dv$ ,

$dm' = \varrho' dv'$ . Nehmen wir an  $\frac{\varrho'}{\varrho} = \left(\frac{r}{\kappa}\right)^{10}$ , so wird  $\Sigma x'^2 dm' = \Sigma x^2 dm$  mit ähnlichen Identitäten für alle andern Trägheits- und Deviationsmomente.

Ist der Körper eine materielle Fläche oder ein Bogen, so ist das Verhältniss von  $dv'$  zu  $dv$  ein anderes. Man erhält alsdann  $\frac{dv'}{dv} = \left(\frac{\kappa}{r}\right)^4$  bez.  $\left(\frac{\kappa}{r}\right)^2$ . Man kommt jedoch zu ähnlichen Resultaten, die man sämmtlich in den folgenden Satz zusammenfassen kann:

**Satz I.** *Irgend ein Körper werde durch Inversion bez. eines beliebigen Punktes  $O$  in einen andern übergeführt. Wenn die Dichtigkeiten der entsprechenden Punkte mit  $\varrho, \varrho'$  und ihre Abstände von  $O$  mit  $r, r'$  bezeichnet werden und  $\varrho' = \varrho \left(\frac{\kappa}{r}\right)^n$  ist, so haben die beiden Körper gleiche Trägheitsmomente bez. aller durch  $O$  gehenden Geraden. Dabei ist  $n=10, 8$ , oder  $6$ , je nachdem der Körper ein Volumen, eine Fläche oder ein Bogen ist.*

Es ergibt sich auch, dass die beiden Körper dieselben Hauptachsen für den Punkt  $O$  und dieselben reciproken Trägheitsellipsoide haben.

Zu dem folgenden Satz kommt man durch Benutzung der Methode Lord Kelvin's zur Ermittlung der Potentiale sich anziehender Körper durch Inversion.

**Satz II.** *Irgend ein Körper werde in einen andern Körper durch Inversion bez. eines Punktes  $O$  übergeführt. Wenn die Dichtigkeiten der sich entsprechenden Punkte  $P, P'$  mit  $\varrho, \varrho'$ , ihre Abstände von  $O$  mit  $r, r'$  bezeichnet werden und  $\varrho' = \varrho \left(\frac{\kappa}{r}\right)^n$  gesetzt wird, so ist das Trägheitsmoment des zweiten Körpers bez. irgend eines Punktes  $C'$  demjenigen des ersten Körpers für den entsprechenden Punkt  $C$  gleich, multiplicirt mit einer der gleichen Grössen  $\left(\frac{\kappa}{OC}\right)^2$  oder  $\frac{OC'}{OC}$ . Dabei ist  $n=8, 6$  oder  $4$ , je nachdem der Körper ein Volumen, eine Fläche oder ein Bogen ist.*

Um dies zu beweisen, betrachten wir den Fall, in welchem der Körper ein Volumen ist. Aus der Aehnlichkeit der Dreiecke folgt  $CP \cdot r' = C'P'$ .  $OC$ . Verfährt man nun ebenso wie früher, so erhält man

$$\varrho dv (CP)^2 \left(\frac{\kappa}{OC}\right)^2 = \varrho' dv' (C'P')^2.$$

Da dies für jedes Element gilt, so folgt daraus der Satz unmittelbar.

**Beisp.** Die Dichtigkeit des Körpers einer Kugel variirt umgekehrt wie die zehnte Potenz des Abstandes von einem äusseren Punkt  $O$ . Man beweise, dass das Trägheitsmoment der Kugel bez. einer durch  $O$  gehenden Geraden dasselbe ist, als wenn die Kugel homogen wäre und ihre Dichtigkeit derjenigen der hete-

rogenen Kugel in dem Punkt, in welchem die von  $O$  gezogene Tangente die Kugel trifft, gleich käme. Man beweise, dass die Massen der beiden Kugeln gleich gewesen wären, wenn die Dichtigkeit umgekehrt wie die sechste Potenz des Abstandes von  $O$  variiert hätte. Unter welcher Bedingung haben sie einen gemeinschaftlichen Schwerpunkt? Math. Tripos.<sup>1)</sup>

§ 47. Das Druckcentrum. Wenn eine ebene Lamelle in eine homogene Flüssigkeit eingetaucht wird, so ist der Druck auf das Flächenelement, wie in der Hydrostatik gezeigt wird, normal zur Ebene und dem Product aus dem Flächeninhalt des Elements und der Tiefe unter einer festen horizontalen Ebene, der *wirklichen Oberfläche*, proportional. Aus Sätzen der Statik ergibt sich leicht, dass das Centrum dieser parallelen Kräfte in der Ebene der Lamelle liegt und sich nicht ändert, wenn man die Kräfte beliebig um ihre Angriffspunkte dreht, vorausgesetzt, dass sie parallel bleiben. Dieser Punkt heisst in der Hydrostatik *das Druckcentrum*.

Ist der Schnitt der Lamelle mit der wirklichen Oberfläche die  $x$  Axe und liegt die zu ihr senkrechte  $y$ -Axe in der Ebene der Lamelle, so ist nach den gewöhnlichen Formeln für das Centrum paralleler Kräfte

$$\begin{array}{ll} X & \text{Deviationsmoment bez. } Ox, \text{ } Oy \\ & \text{das Moment der Fläche um } Ox' \\ Y & \text{Trägheitsmoment bez. } Ox \\ & \text{das Moment der Fläche um } Ox' \end{array}$$

Besitzt die gegebene Fläche gleiches Trägheitsmoment wie Punkte von der Masse  $m_1, m_2$  etc. und sind  $(x_1, y_1), (x_2, y_2)$  etc. die Coordinaten dieser materiellen Punkte, so ist

$$X = \frac{\sum m x y}{\sum m y}, \quad Y = \frac{\sum m y^2}{\sum m y}.$$

Dies sind aber die Formeln zur Ermittlung des Schwerpunkts von Punkten, deren Massen  $m_1 y_1, m_2 y_2$  etc. proportional sind und welche dieselben Coordinaten wie die vorigen haben. Es besteht daher der Satz:

*Wenn irgend eine materielle Ebene gleiches Trägheitsmoment wie einer Reihe von materiellen Punkten hat, so fällt das Druckcentrum der Fläche mit dem Schwerpunkt dieser Punkte zusammen, falls deren Massen im Verhältniss zu ihrer Tiefe multiplicirt werden.*

So ist z. B. das Druckcentrum eines vollständig untergetauchten Dreiecks der Schwerpunkt dreier in den Mittelpunkten der Seiten angebrachten Gewichte, von denen jedes der Tiefe des Punktes, an welchem es angebracht wurde, proportional ist.

Wir beschränken uns in diesem Paragraphen auf die Betrachtung der hydrostatischen Eigenschaften des Punktes, bemerken aber, dass

1) Das grosse mathematische Examen in Cambridge (50 in for honours).

diese Koordinaten von so grossem Nutzen sind, daß man sie auch in die Dynamik übernommen hat. Aus Gleichung (1) des nächsten Paragraphen folgt, daß  $X$  die Abscisse des Hauptpunktes der  $x$ -Achse ist, so daß die Projektion des Druckmittelpunktes gegen eine Ebene mit ihrem Schnitt mit der wirklichen Oberfläche der Tragfläche als  $x$ -Schnitt ist. In Kap. III wird auch gezeigt werden, daß die Ordinaten  $Y$  und  $Z$  Abstand des Schwingungsmittelpunktes von der Aufhängerachse bezeichnen. Auf diese Weise lassen sich die Resultate der Hydrostatik mit der Dynamik übertragen und umgekehrt.

Da die Koordinaten  $X$ ,  $Y$  nur von dem Verhalten des Tragflächen- und Deviationsmomente und der Lage des Schwerpunkt abhängen, so haben offenbar zwei Flächen gleichen Moment mit der Druckmittelpunkt.

Beisp. 1. Man beweise, daß, wenn  $p, q, r$  zwei beliebige, nicht verschwindend in eine Flüssigkeit getauchten Linien sind, die durch denselben Schwerpunkt koordinaten (vergl. § 17, Beisp. 11) eine Druckmittelpunkt haben, so ist das Dreieck selbst bezogen auf  $\frac{1}{3}(1 + \sqrt{3})$ ,  $\frac{1}{3}(1 - \sqrt{3})$ ,  $\frac{1}{3}(1 - \sqrt{2})$  bezogen,  $s = p + q + r$ .

Der Beweis kann sofort durchsetzen, wenn man die Schwerpunkte der Mittelpunkten der Seiten gelegentlich der Seiten  $BC$ ,  $CA$ ,  $AB$  als  $1, 2, 3$  bezeichnet und nacheinander die Momente  $M_1, M_2, M_3$  der Linien  $1, 2, 3$  auf der  $x$ -Achse bestimmt.

Beisp. 2. Irgend eine vertikal stehende, in der  $xy$ -Ebene liegende, nicht winklige Axen  $Ox, Oy$  gegeben, deren Ursprung  $O$  der Schwerpunkt ist. Die Tiefe des Schwerpunkt  $OC = h$  ist gegeben. Die  $xy$ -Ebene ist die Oberfläche der Flüssigkeit nach unten. Die  $z$ -Achse ist die positive Seite der  $y$ -Achse, was man sich durch eine Drehung der  $xy$ -Ebene um  $90^\circ$  vorstellen kann.  $R$  und  $F$  seien die Tragheitsmomente der Fläche  $F$  auf der  $x$ - und  $y$ -Achse. Nimmt man die Momente von  $O$  an, so sind die Druckmittelpunkte

$$X = \frac{R \sin^2 \alpha - F \sin \alpha}{I_{xy}}, \quad Y = \frac{F \sin \alpha - R \cos^2 \alpha}{I_{xy}},$$

worin  $\alpha$  den Flächenmittelpunkt bezeichnet.

Beisp. 3. Wenn sich die Fläche  $F$  in der  $xy$ -Ebene befindet, so ist die Ebene dreht, so ist der Unterschied der Druckmittelpunkte  $X$  und  $Y$  und im Raum ein Kreis. Die Hauptachsen  $X_1, Y_1$  der Fläche  $F$  sind die Hauptachsen der Ebene, die durch den Schwerpunkt  $O$  geht. Die  $xy$ -Ebene liegt in der durch den Schwerpunkt  $O$  gehenden Ebene.

Beisp. 4. In einer beliebigen Ebene  $xy$  befindet sich ein Punkt  $P$  bez. der Flächenelemente  $dF$  der Fläche  $F$  der Abstand  $r$  von  $P$  bedeutet. Man rechnet sich die Druckmittelpunkte  $X$  und  $Y$  ständig untergetauchten mit dem Abstand  $r$  von  $P$  in der  $xy$ -Ebene. Fläche eines Dreieck  $\frac{aH_1 + bH_2 + cH_3}{aH_1 + bH_2 + cH_3}$  (vergl. § 17, Beisp. 11) hat, was die Bedeutung hat.

Beisp. 5. In rotierenden Flüssigkeiten (vergl. § 17, Beisp. 11) ist  $P = \rho(a + bz + cz^2)$  gegeben, worin  $\rho$  den Abstand  $r$  von  $P$  bedeutet. Man zeige, daß der Unterschied der Druckmittelpunkte  $X$  und  $Y$  der Flüssigkeit enthaltenen Gegend ist.

(1) der ganze Druck  $= \int (a + bz + cz^2) d\sigma = (a + b\bar{z})\sigma + c\sigma k^2$  ist, worin  $\bar{z}$  die Ordinate des Schwerpunkts der Fläche  $\sigma$  und  $\sigma k^2$  ihr Trägheitsmoment bez. der  $z$ -Axe darstellt;

(2) der Verticaldruck  $= \iint (a + bz + cz^2) dx dy = aP + bV + cPh'^2$  ist, worin  $P$  die Projection von  $\sigma$  auf die  $xy$ -Ebene,  $V$  das zwischen  $\sigma$  und seiner Projection gelegene Volumen und  $Ph'^2$  das Trägheitsmoment der Projection  $P$  bez. der  $z$ -Axe darstellt.

Offenbar kann man in allen diesen Fällen die Werthe der Integrale im Allgemeinen mit Hülfe der in diesem Kapitel angegebenen Regeln sofort niederschreiben, so dass es in den meisten Fällen nicht nöthig ist, wirklich zu integrieren.

**§ 48. Die Hauptaxen der Systeme.** Eine Gerade ist gegeben; man soll ermitteln, für welchen auf ihr liegenden Punkt sie eine Hauptaxe des Systems ist, und wenn ein solcher Punkt existirt, die beiden andern Hauptaxen für diesen Punkt finden.

Der Punkt wird passend der *Hauptpunkt der Geraden* genannt.

Man nehme die Gerade als  $z$ -Axe und irgend einen Punkt  $O$  in ihr als Coordinatenanfang.  $C$  sei der Punkt, für welchen sie eine Hauptaxe ist und  $Cx'$ ,  $Cy'$  seien die beiden andern Hauptaxen.

Es sei  $CO = h$ ,  $\theta$  der Winkel zwischen  $Cx'$  und  $Ox$ . Man erhält dann

$$\left. \begin{aligned} x' &= x \cos \theta + y \sin \theta \\ y' &= -x \sin \theta + y \cos \theta \\ z' &= z - h \end{aligned} \right\}$$

und daraus

$$\left. \begin{aligned} \Sigma mx'z' &= \cos \theta \Sigma mxz + \sin \theta \Sigma myz \\ &\quad - h (\cos \theta \Sigma mx + \sin \theta \Sigma my) \end{aligned} \right\} = 0 \quad \cdot \cdot \quad (1),$$

$$\left. \begin{aligned} \Sigma my'z' &= -\sin \theta \Sigma mxz + \cos \theta \Sigma myz \\ &\quad - h (-\sin \theta \Sigma mx + \cos \theta \Sigma my) \end{aligned} \right\} = 0 \quad \cdot \cdot \quad (2),$$

$$\Sigma mx'y' = \Sigma m(y^2 - x^2) \frac{\sin 2\theta}{2} + \Sigma maxy \cos 2\theta = 0 \quad \cdot \cdot \quad (3).$$

Aus der letzten Gleichung folgt

$$\tan 2\theta = \frac{2 \Sigma maxy}{\Sigma m(x^2 - y^2)} = \frac{2F}{B - A} \quad \cdot \cdot \cdot \quad (4)$$

nach der früheren Bezeichnungsweise. Den Gleichungen (1) und (2) muss durch denselben Werth von  $h$  genügt werden. Durch Elimination von  $h$  erhält man  $\Sigma mxz \Sigma my = \Sigma myz \Sigma mx$  als Bedingung dafür, dass die  $z$ -Axe für irgend einen auf ihr liegenden Punkt eine Hauptaxe ist. Substituirt man den Werth von  $\Sigma mxz$  resp.  $\Sigma myz$  in (1), so findet man

$$h = \frac{\Sigma myz}{\Sigma my} = \frac{\Sigma mxz}{\Sigma mx} \quad \cdot \cdot \cdot \quad (5).$$

Die Gleichung (5) drückt die Bedingung aus, unter welcher die  $z$ -Axe eine Hauptaxe für einen auf ihr liegenden Punkt ist und der Werth von  $h$  gibt die Lage dieses Punktes an.

Ist  $\Sigma mxz = 0$  und  $\Sigma myz = 0$ , so wird den beiden Gleichungen (1) und (2) durch  $h = 0$  genügt. Sie sind daher die hinreichenden und nothwendigen Bedingungen dafür, dass die  $z$ -Axe für den Coordinatenanfang eine Hauptaxe ist.

Wenn das System eine ebene Lamelle ist und die  $z$ -Axe in irgend einem Punkt senkrecht auf der Ebene steht, so ist  $z = 0$  und sind daher die Bedingungen  $\Sigma mxz = 0$  und  $\Sigma myz = 0$  erfüllt. Deshalb ist eine der Hauptaxen für irgend einen Punkt einer ebenen Lamelle eine in diesem Punkt auf der Ebene senkrechte Gerade.

Ist die Fläche eine Rotationsfläche, welche von zwei auf der Umdrehungsaxe senkrechten Ebenen begrenzt wird, so ist ihre Axe für jeden auf ihr liegenden Punkt eine Hauptaxe.

Gleichung (4) setzt uns ferner in den Stand, wenn eine Hauptaxe gegeben ist, die beiden andern zu finden. Ist  $\theta = \alpha$  der erste Werth von  $\theta$ , so ergeben sich die übrigen aus  $\theta = \alpha + \frac{1}{2}n\pi$ . Alle diese Werthe bestimmen mithin immer wieder dieselben Axen.

§ 49. Da (4) die Grösse  $h$  nicht enthält, so sind die Hauptaxen, wenn die  $z$ -Axe in mehr als einem Punkt eine Hauptaxe ist, für diese Punkte parallel. In diesem Fall muss der Gleichung (5) durch mehr als einen Werth von  $h$  genügt werden. Da aber  $h$  nur in der ersten Potenz in der Gleichung auftritt, so ist dies nur möglich, wenn

$$\Sigma mx = 0, \quad \Sigma my = 0,$$

$$\Sigma mxz = 0, \quad \Sigma myz = 0$$

ist. Die Axe muss daher durch den Schwerpunkt gehen und eine Hauptaxe für den Coordinatenanfang sein und mithin (da der Coordinatenanfang beliebig gewählt werden kann) eine Hauptaxe für jeden auf ihr liegenden Punkt sein.

Wenn die Hauptaxen für den Schwerpunkt als Axen der  $x, y, z$  angenommen werden, so wird den Gleichungen (1) und (2) durch alle Werthe von  $h$  genügt. Wenn daher eine Gerade eine Hauptaxe für den Schwerpunkt ist, so ist sie für jeden in ihr liegenden Punkt eine Hauptaxe.

Läuft die gegebene Gerade einer Hauptaxe für den Schwerpunkt  $G$  parallel, so ist offenbar die gegebene Linie eine Hauptaxe für die Projection von  $G$  auf sie. Denn wenn man den Coordinatenanfang  $O$  in der Projection annimmt und  $G\xi, G\eta, G\zeta$  ein paralleles Axensystem ist, so folgt aus § 13, dass, weil  $\Sigma m\xi\xi, \Sigma m\eta\xi$ , und  $\bar{z}$  Null sind, auch  $\Sigma mxz$  und  $\Sigma myz$  Null sein muss.

§ 50. Das System möge auf eine zur gegebenen Geraden senkrechte Ebene so projecirt werden, dass die Verhältnisse der Massenelemente zu einander unverändert bleiben. Die gegebene Gerade, welche als  $z$ -Axe angenommen wurde, schneidet diese Ebene in  $O$  und

ist eine Hauptaxe der Projection für  $O$ , da das projecirte System als ebene Lamelle die Bedingungen  $\Sigma m x z = 0$ ,  $\Sigma m y z = 0$  erfüllt. Daraus, dass  $z$  in Gleichung (4) nicht auftritt, folgt, dass, wenn die gegebene Gerade eine Hauptaxe für irgend einen auf ihr liegenden Punkt  $C$  ist, die beiden andern Hauptaxen für  $C$  den Hauptaxen des projecirten Systems für  $O$  parallel sind. Diese letzten können mit Hülfe des Satzes in § 52 oft leicht gefunden werden.

§ 51. Beisp. 1. Von den Hauptaxen eines rechtwinkligen Dreiecks für den Durchschnittspunkt der den rechten Winkel einschliessenden Seiten  $a$  und  $b$  steht eine senkrecht auf seiner Ebene und bilden die beiden andern mit den Seiten die

$$\text{Winkel } \frac{1}{2} \arctan \frac{ab}{a^2 - b^2}.$$

Nach § 48 ist  $\tan 2\theta = \frac{2I'}{B - A}$  und, nach § 35,  $A = M \frac{a^2}{6}$ ,  $B = M \frac{b^2}{6}$ ,

$$I' = M \frac{ab}{12}.$$

Beisp. 2. Von den Hauptaxen des Quadranten einer Ellipse für den Mittelpunkt steht die eine senkrecht auf der Ebene und bilden die beiden andern mit den Hauptdurchmessern die Winkel  $\frac{1}{2} \arctan \frac{4}{\pi} \frac{ab}{a^2 - b^2}$ , worin  $a$  und  $b$  die Halbachsen der Ellipse sind.

Beisp. 3. Die Hauptaxen eines Würfels für irgend einen Punkt  $P$  sind die Verbindungslinie von  $P$  mit  $O$ , dem Schwerpunkt des Würfels, und zwei beliebige durch  $P$  gehende Gerade, die senkrecht zueinander und zu  $OP$  sind.

Beisp. 4. Man beweise, dass der Ort eines Punktes  $P$ , für welchen eine der Hauptaxen einer gegebenen Geraden parallel ist, eine gleichseitige Hyperbel ist, in deren Ebene der Schwerpunkt des Körpers liegt und deren eine Asymptote der gegebenen Geraden parallel ist. Wenn aber die gegebene Gerade einer der Hauptaxen für den Schwerpunkt parallel läuft, so ist der Ort von  $P$  diese Hauptaxe oder die auf ihr senkrechte Hauptebene.

Man nehme den Schwerpunkt zum Coordinatenanfang und eine Coordinatenaxe parallel zur gegebenen Geraden.

Beisp. 5. Der Hauptpunkt der Seite  $AB$  einer dreieckigen Scheibe  $ABC$  halbirte den Abstand zwischen dem Mittelpunkt dieser Seite und dem Fusspunkt des von der gegenüberliegenden Ecke auf die Seite gefällten Loths.

Beisp. 6. Die Kante eines Tetraeders ist nur dann eine Hauptaxe für irgend einen auf ihr liegenden Punkt, wenn sie senkrecht zur gegenüberliegenden Kante ist (Jullien, Problèmes de Mécanique rationelle).

Wenn umgekehrt diese Bedingung erfüllt wird, so ist die Kante eine Hauptaxe für einen Punkt  $C$ , welcher so liegt, dass  $OC = \frac{2}{5} ON$ , worin  $N$  der Mittelpunkt der Kante und  $O$  der Fusspunkt des lothrechten Abstandes zwischen ihr und der gegenüberliegenden Kante ist.

Beisp. 7. Die Axen  $Ox$ ,  $Oy$  mögen eine solche Lage haben, dass das Deviationsmoment  $I'$  oder  $\Sigma mxy$  Null ist. Wenn  $A$  und  $B$  die Trägheitsmomente bez. dieser Axen sind, zu beweisen, dass das Deviationsmoment für zwei zu einander senkrechte Axen  $Ox'$ ,  $Oy'$ , die in der Ebene  $xy$  liegen,

$$I'' = \frac{1}{2}(A - B) \sin 2\theta$$

ist, worin  $\theta$  den Winkel  $xOx'$ , von  $Ox$  aus in positiver Richtung genommen, bedeutet.



§ 52. **Trägheitsbrennpunkte.**<sup>1)</sup> Wenn die Lage der Hauptaxen  $Ox$ ,  $Oy$ ,  $Oz$  für den Schwerpunkt  $O$  und die Trägheitsmomente bez. ihrer gegeben sind, die Lage der Hauptaxen für einen beliebigen in der Ebene  $xy$  gelegenen Punkt  $P$  und die Trägheitsmomente bez. dieser Axen zu finden.

Die Masse des Körpers sei  $M$ ;  $A$ ,  $B$  die Trägheitsmomente bez. der Axen  $Ox$ ,  $Oy$ , und  $A$  möge grösser als  $B$  sein. Wenn  $S$  und  $H$  zwei auf der Axe des grössten Trägheitsmoments diesseits und jenseits vom Koordinatenanfang so gelegene Punkte sind, dass  $OS = OH = \sqrt{\frac{A-B}{M}}$  ist, so heissen diese Punkte die *Trägheitsbrennpunkte* für diese *Hauptebene*.

Da die Punkte in einer der Hauptaxen für den Schwerpunkt liegen, so sind die Hauptaxen für  $S$  und  $H$  parallel den Koordinatenaxen und die Trägheitsmomente bez. dieser in der  $xy$ -Ebene gelegenen Axen resp.  $A$  und  $B + M \cdot OS^2 = A$ . Da dieselben gleich sind, so ist jede durch  $S$  oder  $H$  in der  $xy$ -Ebene gehende Gerade eine Hauptaxe für diesen Punkt und das Trägheitsmoment bez. derselben gleich  $A$ .

Ist  $P$  ein Punkt in der  $xy$ -Ebene, so ist eine der Hauptaxen für  $P$  senkrecht zur  $xy$ -Ebene. Denn, wenn  $p$ ,  $q$  die Coordinaten von  $P$  sind, so ist diese Linie eine Hauptaxe unter der Bedingung, dass

$$\Sigma m(x-p)z = 0, \quad \Sigma m(y-q)z = 0$$

sind, welche offenbar erfüllt ist, weil der Schwerpunkt zum Koordinatenanfang und die Hauptaxen zu Coordinatenaxen gewählt wurden.

Die beiden andern Hauptaxen kann man auf folgende Art finden. Wenn die Trägheitsmomente bez. zweier in einer Hauptebene liegender, sich im Punkt  $P$  schneidender Geraden, einander gleich sind, so halbiren die Hauptaxen für  $P$  die Winkel, welche diese beiden Geraden miteinander machen. Denn die Axen der für  $P$  als Mittelpunkt construirten Trägheitsellipse halbiren die Winkel zwischen irgend zwei gleichen Radienvectoren.

Verbindet man  $P$  mit  $S$  und  $H$ , so ist das Trägheitsmoment bez.  $SP$  sowohl als bez.  $HP$  gleich  $A$ . Die Halbierungslinien  $PG$ ,  $PT$  des Winkels  $SPH$  und seines Nebenwinkels sind daher die Hauptaxen für  $P$ . Beschreibt man mithin mit  $S$  und  $H$  als Brennpunkten irgend eine Ellipse oder Hyperbel, so sind die Tangente und Normale irgend eines Punktes derselben die Hauptaxen für diesen Punkt.

§ 53. Zieht man irgend eine Gerade  $MN$  durch den Koordinatenanfang  $O$ , welche mit der  $x$ -Axe den Winkel  $\theta$  bildet und fällt von  $S$  und  $H$  Lothe  $SM$ ,  $HN$  auf sie, so ist das Trägheitsmoment bez.  $MN$

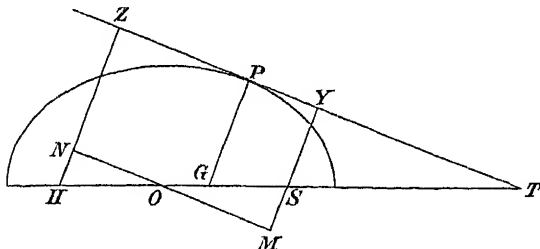
<sup>1)</sup> In der Technik wird die Bezeichnung *Fixpunkte des Querschnitts* gebraucht.

$$A \cos^2 \theta + B \sin^2 \theta = A - (A - B) \sin^2 \theta = A - M \cdot (OS \sin \theta)^2 = A - M \cdot SM^2.$$

Zieht man ferner durch  $P$  eine Parallele  $PT$  zu  $MN$  und fällt von  $S$ ,  $H$  die Lothe  $SY$ ,  $HZ$  auf sie, so ist das Trägheitsmoment bez.  $PT$

$$\begin{aligned} &= \text{dem Moment bez. } MN + M \cdot MY^2 \\ &= A + M(MY - SM)(MY + SM) \\ &= A + M \cdot SY \cdot HZ. \end{aligned}$$

Auf dieselbe Art kann man beweisen, dass das Trägheitsmoment bez. einer die



Verbindungsline von  $H$  und  $S$  schneidenden Linie  $PG$  um die Masse multiplicirt mit dem Product der Lothe von  $S$  und  $H$  auf  $PG$  kleiner als  $A$  ist.

Beschreibt man daher mit  $S$  und  $H$  als Brennpunkten irgend eine Ellipse oder Hyperbel, so ist das Trägheitsmoment bez. aller Tangenten an eine dieser Curven constant.

Daraus folgt, dass die Trägheitsmomente bez. der Hauptaxen für  $P$  gleich  $B + M \left( \frac{SP + HP}{2} \right)^2$  sind.

Denn für  $a$  und  $b$  als Halbaxen der Ellipse ist  $a^2 - b^2 = OS^2 = \frac{A - B}{M}$  und daher

$$A + M \cdot SY \cdot HZ = A + Mb^2 = B + Ma^2 = B + M \left( \frac{SP + HP}{2} \right)^2.$$

Die Hyperbel kann man auf ähnliche Art behandeln.

§ 54. Diese Schlussweise lässt sich auf Punkte ausdehnen, die in einer beliebigen gegebenen Ebene liegen, die durch den Schwerpunkt  $O$  des Körpers geht.  $Ox$ ,  $Oy$  mögen solche Axen in der gegebenen Ebene sein, dass das Deviationsmoment bez. ihrer Null ist (§ 23). Man bestimme die Punkte  $S$  und  $H$  wie zuvor derart, dass  $OS^2$  sowohl als  $OH^2$  dem Unterschied zwischen den Trägheitsmomenten für  $Ox$  und  $Oy$  dividirt durch die Masse gleich sind. Man ziehe durch  $S$  eine Parallele  $Sy'$  zur  $y$ -Axe, dann ist das Deviationsmoment bez.  $Sx$ ,  $Sy'$  der Summe derjenigen bez.  $Ox$ ,  $Oy$  und des Deviationsmoments der ganzen in  $O$  concentrirten Masse bez.  $Sx$ ,  $Sy'$  gleich. Diese letzten sind aber Null, daher ist der Schnitt des Trägheitsellipsoids für  $S$  ein Kreis und das Trägheitsmoment bez. jeder durch  $S$  gehenden in der Ebene  $xOy$  liegenden Geraden dasselbe und dem für  $Ox$  gleich. Man kann dann zeigen, dass die Trägheitsmomente für  $PH$  und  $PS$  gleich sind, dass also die Halbirungslinien  $PG$ ,  $PT$  des Winkels  $SPH$  und seines Nebenwinkels die Hauptdurchmesser des Schnitts des Trägheitsellipsoids für  $P$  mit der gegebenen Ebene sind. Weiter folgt dann, dass die Trägheitsmomente bez. der Tangenten an einen Kegelschnitt, der  $S$  und  $H$  zu Brennpunkten hat, dieselben sind.

§ 55. Beisp. 1. Die Trägheitsbrennpunkte einer elliptischen Scheibe zu finden. Die Trägheitsmomente bez. der grossen und kleinen Axe sind  $\frac{1}{4} Mb^2$  und  $\frac{1}{4} Ma^2$ .

Die kleine Axe ist daher die Axe des grössten Trägheitsmoments. Die Trägheitsbrennpunkte liegen daher in der *kleinen* Axe und haben einen Abstand vom Mittelpunkt  $= \frac{1}{2} \sqrt{a^2 - b^2}$ , also die Hälfte des Abstandes der geometrischen Brennpunkte vom Centrum.

Beisp. 2. Zwei materielle Punkte, von denen jeder die Masse  $m$  hat, werden auf die Endpunkte der kleinen Axe einer elliptischen Scheibe von der Masse  $M$  gelegt. Man beweise, dass die Haupttaxen für jeden Punkt des Umfangs der Ellipse die Tangente und Normale an die Ellipse sind, vorausgesetzt, dass  $\frac{m}{M} = \frac{5}{8} \frac{c^2}{1 - 2c^2}$ .

Beisp. 3. Für die Punkte, welche Trägheitsbrennpunkte genannt wurden, sind zwei der Hauptmomente gleich. Man zeige, dass im Allgemeinen die Behauptung nicht richtig wäre, ein Punkt existire, derart, dass die Trägheitsmomente für alle durch ihn gezogenen Axen dieselben sind und suche die Bedingungen, unter welchen es einen solchen Punkt gibt. *Wenn solche Punkte in einem festen Körper vorkommen, kann man sie die Trägheitskugelpunkte<sup>1)</sup> dieses Körpers nennen.*

Man beziehe den Körper auf die Haupttaxen für den Schwerpunkt.  $P$  sei der gesuchte Punkt,  $(x, y, z)$  seine Coordinaten. Da das Trägheitsellipsoid für  $P$  eine Kugel sein soll, so sind die Deviationsmomente bez. aller sich in  $P$  schneidender rechtwinkliger Axen Null. Daher ist, nach § 13,  $xy = 0$ ,  $yz = 0$ ,  $zx = 0$ . Daraus folgt, dass zwei der drei Grössen  $x, y, z$  Null sein müssen, dass also der Punkt in einer der Haupttaxen für den Schwerpunkt liegen muss. Wir wollen sie die  $z$ -Axe nennen. Da die Trägheitsmomente bez. dreier durch  $P$  parallel zu den Coordinatenaxen gezogenen Axen  $A + Mz^2$ ,  $B + Mz^2$  und  $C$  sind, so können sie nur dann gleich sein, wenn  $A = B$  und beide kleiner als  $C$  sind. Es gibt also dann zwei solcher Punkte auf der Axe des nicht gleichen Trägheitsmoments, welche für alle Axen gleiches Moment aufzuweisen haben. (Poisson, Mécanique und Binet.)

Beisp. 4. Die Kugelpunkte der Oberfläche einer Halbkugel sind der Mittelpunkt und ein Punkt auf der Oberfläche. Man suche auch die Kugelpunkte einer massiven Halbkugel.

Nach § 5, Beisp. 8 sind die Trägheitsmomente für jede durch das Centrum gehende Axe dieselben. Daher ist das Centrum der eine Kugelpunkt. Daraus, dass der Schwerpunkt den Abstand zwischen beiden Punkten halbirt, folgt dann die Lage des andern.

§ 56. Die Anordnung der Haupttaxen. *Wenn die Lage der Hauptaxen für den Schwerpunkt  $O$  und die Trägheitsmomente bez. ihrer gegeben sind, die Lage der Haupttaxen<sup>2)</sup> und die Hauptmomente für jeden andern Punkt  $P$  zu finden.*

Der Körper möge auf seine Haupttaxen für den Schwerpunkt  $O$  bezogen werden,  $A, B, C$  seine Hauptmomente und die Masse des Körpers der Einheit gleich sein. Man construire eine mit dem reciproken Trägheitsellipsoid confocale Fläche zweiten Grades, und die Quadrate ihrer Halbachsen seien  $a^2 = A + \lambda$ ,  $b^2 = B + \lambda$ ,  $c^2 = C + \lambda$ . Wir wollen das Trägheitsmoment bez. einer Berührungsebene suchen.

1) Dieser im Deutschen unbekannte Ausdruck wird hier der Kürze wegen gebraucht.

2) Von den folgenden Sätzen sind einige von Lord Kelvin und Mr. Townsend gleichzeitig im *Mathematical Journal* 1846 veröffentlicht worden. Ihre Beweise weichen von den hier gegebenen ab. Vgl. auch Binet (Journ. de l'école Polytechn. Cah. XVI p. 41, 1811).

$(\alpha, \beta, \gamma)$  seien die Stellungswinkel einer Berührungsebene. Das Trägheitsmoment bez. einer durch  $O$  gehenden Parallelebene ist

$$\frac{1}{2}(A + B + C) - (A \cos^2 \alpha + B \cos^2 \beta + C \cos^2 \gamma).$$

Das Trägheitsmoment in Bezug auf die Berührungsebene findet man durch Addition des Quadrats des lothrechten Abstandes, nämlich

$$(A + \lambda) \cos^2 \alpha + (B + \lambda) \cos^2 \beta + (C + \lambda) \cos^2 \gamma,$$

beider Ebenen gleich

$$\frac{1}{2}(A + B + C) + \lambda = \frac{1}{2}(B + C - A) + \lambda^2.$$

*Die Trägheitsmomente in Bezug auf alle Berührungsebenen an eine mit dem reciproken Trägheitsellipsoid confocale Fläche zweiten Grades sind daher dieselben.*

*Diese Ebenen sind sämtlich Hauptebenen für den Berührungspunkt.* Denn die Berührungsebene, welche man parallel zu einer beliebigen durch den Berührungspunkt  $P$  gehenden Ebene gelegt hat, liegt, falls die confocale Fläche ein Ellipsoid ist, weiter als diese Ebene vom Koordinatenanfang entfernt. Das Trägheitsmoment bez. einer beliebigen durch  $P$  gehenden Ebene ist daher kleiner als das Trägheitsmoment bez. einer Berührungsebene im Punkt  $P$  an das confocale Ellipsoid. Das heisst aber, dass die Berührungsebene an das Ellipsoid die Hauptebene des grössten Moments ist. Ebenso ist die Berührungsebene an das confocale zweischalige Hyperboloid, welches durch  $P$  geht, die Hauptebene des kleinsten Moments. Die Hauptebene des mittleren Moments ist folglich die Berührungsebene an das confocale einschalige Hyperboloid.

Durch einen gegebenen Punkt  $P$  lassen sich drei confocale Flächen legen; die Normalen auf diese Flächen sind die Hauptaxen für  $P$ . Nach § 5, Beisp. 3 ist die Hauptaxe des *kleinsten* Moments normal auf dem confocalen *Ellipsoid* und die des grössten Moments normal auf dem confocalen zweischaligen Hyperboloid.

§ 57. Das Trägheitsmoment bez. des *Punktes*  $P$  ist nach § 14  $\frac{1}{2}(A + B + C) + OP^2$ . Daher sind nach § 5, Beisp. 3 die Trägheitsmomente bez. der auf den drei confocalen Flächen, deren Parameter  $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$  sind, im Punkt  $P$  senkrecht stehenden Geraden bez.

$$OP^2 - \lambda_1, \quad OP^2 - \lambda_2, \quad OP^2 - \lambda_3.$$

§ 58. Beschreibt man irgend eine andere confocale Fläche und zieht einen Berührungskegel an sie, dessen Spitze in  $P$  liegt, so sind die Axen dieses Kegels bekanntlich die Normalen auf die drei confocalen Flächen im Punkt  $P$ . Dadurch erhält man eine zweite Construction für die durch den Punkt  $P$  gehenden Hauptaxen.

Wenn die confocale Fläche ohne Ende abnimmt, bis sie sich auf einen Focalkegelschnitt reducirt, so sind offenbar die Hauptdurchmesser des Systems die Hauptdurchmesser eines Kegels, dessen Spitze in  $P$  liegt und dessen Basis ein Focalkegelschnitt des reciproken Central-ellipsoids ist.

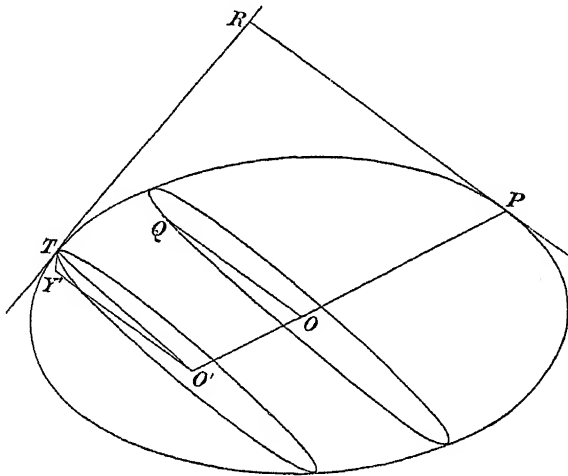
Beisp. Man beweise, dass das Trägheitsmoment für jede Erzeugende des Kegels, dessen Spitze in  $P$  liegt und der dem von  $P$  aus an das reciproke Ellipsoid gezogenen Berührungskegel reciprok ist, das nämliche bleibt. Math. Tripos, 1895.

§ 59. Wollen wir nur *eine* Fläche zweiten Grades in Betracht ziehen, so können wir dazu das confocale durch  $P$  gehende Ellipsoid benutzen. Bekanntlich<sup>1)</sup> sind die Normalen zu den beiden andern

1) Die folgenden Sätze kann man in Büchern über Raumgeometrie finden, sie lassen sich aber auch so beweisen.

Das confocale Ellipsoid möge nahe bei  $P$  vorbeigehen und sich  $P$  unendlich nähern. Die Basis des einhüllenden Kegels ist schliesslich die Indicatrix und da der Kegel zuletzt zur Berührungsebene wird, so ist eine seiner Axen schliesslich senkrecht auf der Ebene der Indicatrix. In jedem Kegel sind nun zwei seiner Axen den Hauptdurchmessern eines beliebigen senkrecht zur dritten Axe geführten Schnittes parallel. Daher sind die Axen des einhüllenden Kegels die Normale zur Fläche und zwei den Hauptdurchmessern der Indicatrix parallele Linien. Alle parallelen Schnitte eines Ellipsoids sind aber ähnlich und ähnlich gelegen; die Hauptdurchmesser der Indicatrix sind daher den Hauptdurchmessern des Mittelpunktschnittes parallel, welcher parallel zur Berührungsebene im Punkt  $P$  geführt wird.

Um die Hauptmomente zu finden, kann man auf folgende Art verfahren. Zieht man eine Berührungsebene an das Ellipsoid, welche senkrecht auf einem



Radiusvector  $OQ$  des zu  $OP$  conjugirten Diametralschnittes steht, so liegen der Berührungspunkt  $T$ ,  $OQ$  und  $OP$  in einer Ebene, wenn  $OQ$  eine Axe des Schnittes ist. Denn legt man durch  $T$  einen der Diametralebene parallelen Schnitt, ist  $O'$  sein Centrum und  $O'Y'$  ein von  $O'$  auf die in  $T$  berührende Tangentialebene gefälltes Loth, so liegen  $OQ$ ,  $O'Y'$  und  $OP$  in einer Ebene. Man betrachte nun

confocalen Flächen Tangenten an die Krümmungscurven des Ellipsoids und den Hauptdurchmessern des parallel zur Berührungsebene in  $P$  durch den Mittelpunkt geführten Schnittes parallel. Sind  $D_1, D_2$  diese Haupthalbmesser, so ist bekanntlich

$$\lambda_2 = \lambda_1 - D_1^2, \quad \lambda_3 = \lambda_1 - D_2^2.$$

Legen wir daher durch irgend einen Punkt  $P$  die Fläche zweiten Grades

$$\frac{x^2}{A+\lambda} + \frac{y^2}{B+\lambda} + \frac{z^2}{C+\lambda} = 1$$

und sind die Coordinatenaxen die Hauptaxen für den Schwerpunkt, dann sind die Hauptaxen für  $P$  die Normale an diese Fläche zweiten Grades und zwei Gerade, welche den Axen des durch den Mittelpunkt parallel mit der Berührungsebene im Punkt  $P$  geführten Schnittes parallel sind. Ferner sind, wenn diese Axen mit  $2D_1$  und  $2D_2$  bezeichnet werden, die Hauptmomente für  $P$

$$OP^2 - \lambda, \quad OP^2 - \lambda + D_1^2, \quad OP^2 - \lambda + D_2^2.$$

Beisp. Wenn zwei Körper denselben Schwerpunkt, dieselben Hauptaxen für den Schwerpunkt haben und wenn die Differenzen ihrer Hauptmomente bez. einander gleich sind, so haben diese Körper dieselben Hauptaxen für alle Punkte.

§ 60. Die Bedingung dafür, dass eine Gerade eine Hauptaxe ist. Wenn die Coordinatenaxen die Hauptaxen für den Schwerpunkt sind, einen Ausdruck für die Bedingung zu finden, unter welcher eine gegebene Gerade für einen auf ihr liegenden Punkt eine Hauptaxe ist und diesen Punkt zu finden.

Sind die Gleichungen der gegebenen Geraden

$$\frac{x-f}{l} = \frac{y-g}{m} = \frac{z-h}{n} \quad (1),$$

dann muss sie in dem Punkt, in welchem die Gerade eine Hauptaxe ist, auf einer Fläche zweiten Grades

$$\frac{x^2}{A+\lambda} + \frac{y^2}{B+\lambda} + \frac{z^2}{C+\lambda} = 1 \quad (2)$$

senkrecht stehen.

den Schnitt, dessen Centrum  $O$  ist;  $O'Y'$  steht senkrecht auf der Tangente, welche die Ellipse in  $T$  berührt.  $O'Y', O'T$  fallen daher nur dann zusammen, wenn  $O'Y'$  die Richtung einer Axe der Ellipse hat. Der Schnitt ist aber dem Diametralschnitt ähnlich, dem er parallel gezogen ist.  $OQ$  ist mithin eine Axe des Diametralschnitts.

$PR$  sei eine durch  $P$  parallel  $OQ$  gezogene Gerade, welche die in  $T$  berührende Ebene in  $R$  trifft. Dann sind  $RP, RT$  zwei auf einander senkrechte Tangenten an die Ellipse  $PQT$ . Mithin ist

$$OR^2 = \text{der Summe der Quadrate der Halbaxen der Ellipse} = OP^2 + OQ^2,$$

weil  $OP, OQ$  conjugirte Durchmesser sind.

Das Trägheitsmoment bez.  $PR$ , eines Lothes auf eine Berührungsebene, ist, wie oben gezeigt wurde,  $OR^2 - \lambda$ ; es ist daher das Trägheitsmoment bez. einer Geraden, welche durch  $P$  parallel zur Axe  $OQ$  gezogen wird,  $OP^2 + OQ^2 - \lambda$ .

Combinirt man die Gleichung der Normalen zu der Fläche (2) mit (1), so erhält man

$$\frac{x}{A+\lambda} = \mu l, \quad \frac{y}{B+\lambda} = \mu m, \quad \frac{z}{C+\lambda} = \mu n \cdot \cdot \cdot \cdot (3).$$

Diesen sechs Gleichungen müssen dieselben Werthe von  $x, y, z, \lambda$  und  $\mu$  genügen. Setzt man die Werthe von  $x, y, z$  aus (3) in (1) ein, so findet man

$$A\mu - \frac{f}{l} = B\mu - \frac{g}{m} = C\mu - \frac{h}{n}$$

und durch Gleichsetzung der aus diesen Gleichungen sich ergebenden Werthe von  $\mu$

$$\frac{\frac{f}{l} - \frac{g}{m}}{A - B} = \frac{\frac{g}{m} - \frac{h}{n}}{B - C} = \frac{\frac{h}{n} - \frac{f}{l}}{C - A} \cdot \cdot \cdot \cdot (4).$$

Dies ist offenbar nur *eine* Gleichung und stellt die gesuchte Bedingung dar, unter welcher die Gerade für einen auf ihr liegenden Punkt eine Hauptaxe ist.

Substituirt man die Ausdrücke für  $x, y, z$  aus (3) in (2), so erhält man die Gleichung

$$\lambda (l^2 + m^2 + n^2) = \frac{1}{\mu^2} - (Al^2 + Bm^2 + Cn^2),$$

welche nur einen Werth für  $\lambda$  liefert. Hat man die Werthe von  $\lambda$  und  $\mu$  gefunden, so bestimmen die Gleichungen (3) die Coordinaten  $x, y, z$  des Punktes, für welchen die Gerade eine Hauptaxe ist.

Die geometrische Bedeutung dieser Bedingung kann man durch folgende von Townsend im *Mathematical Journal* entwickelte Betrachtungen finden. Die Normale und die Berührungsebene in jedem Punkt einer Fläche zweiten Grades treffen irgend eine Hauptebene in einem Punkt und einer Geraden, welche der Pol und die Polare in Bezug auf den in dieser Ebene liegenden Focalkegelschnitt sind. Um daher zu finden, ob irgend eine angenommene Gerade eine Hauptaxe ist oder nicht, lege man eine Ebene senkrecht zur Geraden und verlängere die Ebene sowohl wie die Gerade, bis sie irgend eine Hauptebene für den Schwerpunkt treffen. Ist die Durchschnittslinie der Ebene parallel zu der Polarlinie des Durchschnittspunktes der Geraden in Bezug auf den Focalkegelschnitt, so ist die Gerade eine Hauptaxe, sonst nicht. Den Punkt ferner, für welchen sie eine Hauptaxe ist, findet man, indem man durch die Polarlinie eine Ebene senkrecht zur Geraden legt. Der Durchschnittspunkt ist der gesuchte Punkt.

Die analytische Bedingung (4) ist eben der Ausdruck dafür, dass die Polarlinie dem Schnitt der Ebene parallel ist.

§ 61. Beisp. 1. Man zeige, dass die Gerade  $a(x-a) = b(y-b) = c(z-c)$  für einen auf ihr liegenden Punkt eine Hauptaxe eines Ellipsoids ist, dessen Halbachsen  $abc$  sind.

Beisp. 2. Man zeige, dass irgend eine auf einer Lamelle gezogene Gerade eine Hauptaxe dieser Lamelle für irgend einen Punkt ist. Wo liegt dieser Punkt, wenn die Gerade durch den Schwerpunkt geht?

Beisp. 3. Ist eine Ebene  $\frac{x}{f} + \frac{y}{g} + \frac{z}{h} - 1 = 0$  gegeben, so gibt es immer

einen auf ihr liegenden Punkt, für welchen sie eine Hauptebene ist. Auch ist dieser Punkt der Durchschnittspunkt mit der Geraden  $fx - A = gy - B = hz - C$ .

Beisp. 4. Sind zwei Punkte  $P, Q$  so gelegen, dass eine Hauptaxe für  $P$  eine Hauptaxe für  $Q$  schneidet und legt man dann zwei Ebenen durch  $P$  und  $Q$  senkrecht zu diesen Hauptaxen, so ist ihre Durchschnittslinie eine Hauptaxe für den Punkt, in dem sie von der Ebene getroffen wird, welche die Hauptaxen für  $P$  und  $Q$  enthält. (Townsend.)

Denn die Hauptaxen für  $P, Q$  mögen eine Hauptebene für den Schwerpunkt in  $p, q$ , die beiden senkrechten Ebenen dieselbe Hauptebene in den Linien  $LN, MN$  treffen. Die senkrechten Ebenen mögen sich ferner in  $RN$  schneiden.  $RN$  steht dann senkrecht auf der Ebene, welche die Punkte  $P, Q, p, q$  enthält. Da nun die Polarlinien für  $p$  und  $q$  die Geraden  $LN, MN$  sind, so folgt, dass  $pq$  die Polare des Punktes  $N$  ist. Die Gerade  $RN$  genügt also dem Kriterium des letzten Paragraphen.

Beisp. 5. Wenn  $P$  irgend ein Punkt in einer Hauptebene des Schwerpunkts ist, dann liegt jede Axe, die durch  $P$  geht und für irgend einen Punkt eine Hauptaxe ist, in einer von zwei zu einander senkrechten Ebenen. Die eine dieser Ebenen ist die Hauptebene des Schwerpunkts und die andre steht senkrecht auf der Polarlinie von  $P$  in Bezug auf den Focalkegelschnitt. Auch ist der Ort aller Punkte  $Q$ , für welche  $QP$  eine Hauptaxe ist, ein durch  $P$  gehender Kreis, dessen Mittelpunkt in der Hauptebene liegt. (Townsend.)

Beisp. 6. Die Rückkehrcurve der abwickelbaren Fläche, welche die Enveloppe der Ebenen ist, die normal zu einer Krümmungslinie auf einer confocalen Fläche zweiten Grades gezogen werden, ist eine Curve solcher Art, dass alle ihre Tangenten Hauptaxen für irgend einen in ihnen gelegenen Punkt sind.

§ 62. Der Ort gleicher Momente. *Den Ort der Punkte zu finden, für welche zwei Hauptträgheitsmomente einander gleich sind.*

Die Hauptmomente für einen Punkt  $P$  sind

$$I_1 = OP^2 - \lambda, \quad I_2 = OP^2 - \lambda + D_1^2, \quad I_3 = OP^2 - \lambda + D_2^2.$$

Setzt man  $I_1 = I_2$ , so wird  $D_1 = 0$ ; der Punkt  $P$  liegt daher auf dem elliptischen Focalkegelschnitt des reciproken Trägheitsellipsoids.

Setzt man  $I_2 = I_3$ , so ist  $D_1 = D_2$ ;  $P$  ist also ein Nabelpunkt eines mit dem reciproken Trägheitsellipsoid confocalen Ellipsoids. Der Ort dieser Nabelpunkte ist der hyperbolische Focalkegelschnitt.

Im ersten Fall ist  $\lambda = -C$  und  $D_2$  der zu  $OP$  conjugirte Halbmesser des Focalkegelschnitts. Daher ist  $D_2^2 + OP^2 =$  der Summe der Quadrate der Halbaxen  $= A - C + B - C$ . Die drei Hauptmomente sind daher  $I_1 = I_2 = OP^2 + C$ ,  $I_3 = A + B - C$  und die Axe des nicht gleichen Moments ist eine Tangente an den Focalkegelschnitt.

Der zweite Fall kann in derselben Weise behandelt werden, wenn man ein confocales Hyperboloid benutzt. Man erhält  $I_2 = I_3 = OP^2 + B$ ,  $I_1 = A + C - B$  und die Axe des ungleichen Moments ist eine Tangente an den Focalkegelschnitt.

Man kommt zu denselben Resultaten, wenn man die §§ 57 und 58 combinirt. Der Kegel, welcher das reciproke Trägheitsellipsoid einhüllt und dessen Spitze in  $P$  liegt, muss nach diesen Paragraphen ein gerader Kegel sein, wenn zwei Haupt-



momente für den Punkt  $P$  einander gleich sind. Aus der Raumgeometrie ist aber bekannt, dass dies nur der Fall ist, wenn seine Spitze auf einem Focal kegelschnitt liegt. Die ungleiche Axe ist dann eine Tangente an diesen Kegelschnitt.

§ 63. *Die Curven auf einer confocalen Fläche zweiten Grades zu finden, für welche ein Trägheitsmoment einer gegebenen Grösse  $I$  gleich ist.*

*Erstens.* Das Trägheitsmoment bez. einer Geraden, die senkrecht auf der confocalen Fläche zweiten Grades steht, ist  $OP^2 - \lambda$ . Bleibt es constant, so ist  $OP$  constant und die gesuchte Curve ist der Schnitt dieser Fläche zweiten Grades mit einer concentrischen Kugel. Eine solche Curve ist ein sphärischer Kegelschnitt.

*Zweitens.* Betrachten wir die Punkte, für welche das Trägheitsmoment bez. einer Tangente constant ist.

Man construirt irgend zwei confocale Flächen, deren grösste Halbachsen  $a$  und  $a'$  sind, und ziehe irgend zwei Berührungsebenen an sie, die sich rechtwinklig schneiden. Das Trägheitsmoment bez. ihrer Durchschnittslinie ist die Summe der Trägheitsmomente bez. der beiden Ebenen und daher

$$B + C - A + a^2 + a'^2.$$

*Die Trägheitsmomente bez. der Durchschnittslinien aufeinander senkrechter Ebenen, welche dieselben confocalen Flächen berühren, sind also einander gleich.*

Sind  $a, a', a''$  die grössten Halbachsen der drei confocalen Flächen, welche sich im Punkt  $P$  treffen, dann ist, da confocale Flächen sich rechtwinklig schneiden, das Trägheitsmoment bez. einer Tangente an die Durchschnittslinie der confocalen Flächen  $a', a''$

$$I_1 = B + C - A + a'^2 + a''^2.$$

Die Durchschnittslinie dieser beiden confocalen Flächen ist für jede von ihnen eine Krümmungslinie. *Die Trägheitsmomente bez. der Tangenten an irgend eine Krümmungslinie sind daher einander gleich und diese Tangenten sind Hauptachsen für den Berührungspunkt.*

An die Fläche zweiten Grades  $a$  ziehe eine Tangente  $PT$ , welche mit den Tangenten an die Krümmungslinien für den Berührungspunkt  $P$  die Winkel  $\varphi$  und  $\frac{1}{2}\pi - \varphi$  macht. Sind  $I_2, I_3$  die Momente bez. der Tangenten an diese Krümmungslinien, so ist das Trägheitsmoment bez. der Tangente  $PT$

$$\begin{aligned} & I_2 \cos^2 \varphi + I_3 \sin^2 \varphi \\ &= B + C - A + (a'^2 + a''^2) \cos^2 \varphi + (a^2 + a'^2) \sin^2 \varphi. \end{aligned}$$

Längs einer geodätischen Linie auf der Fläche zweiten Grades  $a$  ist aber  $a'^2 \sin^2 \varphi + a''^2 \cos^2 \varphi$  constant. *Die Trägheitsmomente bez. der Tangenten an irgend eine geodätische Linie der Fläche zweiten Grades sind daher einander gleich.*

§ 64. Beisp. 1. Wenn eine Gerade irgend zwei confocale Flächen berührt, deren grösste Halbachsen  $a, a'$  sind, so ist das Trägheitsmoment bez. ihrer  $B + C - A + a^2 + a'^2$ .

Beisp. 2. Wenn ein Körper auf seine Hauptaxen für den Schwerpunkt bezogen wird, zu zeigen, wie die Coordinaten des Punktes  $P$  gefunden werden, für welchen die drei Hauptmomente den drei gegebenen Grössen  $I_1, I_2, I_3$  gleich sind, Jullien, Problèmes de Méc. II. Cap. V, § 4.

Die elliptischen Coordinaten von  $P$  sind offenbar  $a^2 = \frac{1}{2}(I_2 + I_3 - I_1 - B - C + A)$  etc.; die Coordinaten  $(x, y, z)$  kann man dann mit Hilfe der Formeln Dr. Salmon's (Anal. Geom. des Raums, I, § 160) finden

$$x^2 = \frac{a^2 a'^2 a''^2}{(A - B)(A - C)} \text{ etc.}$$

Beisp. 3. Berühren zwei aufeinander senkrechte Ebenen zwei confocale Flächen mit den grössten Halbachsen  $a, a'$  und sind  $\alpha, \alpha'$  die Werthe von  $a, a'$  für confocale Flächen, welche die Durchschnittslinie der Ebenen berühren, dann ist  $\alpha^2 + \alpha'^2 = a^2 + a'^2$  und das Deviationsmoment bez. der beiden Ebenen  $(a^2 a'^2 - \alpha^2 \alpha'^2)^{\frac{1}{2}}$ .

§ 65. Die Fläche gleichen Moments. Der Ort aller Punkte, für welche eines der Hauptträgheitsmomente des Körpers einer gegebenen Grösse gleich ist, wird eine *Fläche gleichen Moments* genannt.

Um die Gleichung einer solchen Fläche zu finden, braucht man nur  $I_1 = \text{Const.}$  zu setzen; man erhält dann  $\lambda = r^2 - I$ . Durch Substitution in die Gleichung der confocalen Fläche zweiten Grades wird die Gleichung der Fläche

$$\frac{x^2}{x^2 + y^2 + z^2 + A - I} + \frac{y^2}{x^2 + y^2 + z^2 + B - I} + \frac{z^2}{x^2 + y^2 + z^2 + C - I} = 1.$$

Durch irgend einen Punkt  $P$  auf einer Fläche gleichen Moments lege man eine confocale Fläche zweiten Grades derart, dass die Hauptaxe eine Krümmungslinie der Fläche zweiten Grades berührt. Nach § 63 ist einer der Schnitte der Fläche gleichen Moments mit dieser Fläche zweiten Grades die Krümmungslinie. Mithin ist die Hauptaxe für  $P$ , bez. welcher das Trägheitsmoment  $I$  ist, eine Tangente an die Fläche gleichen Moments.

Man construire ferner die confocale Fläche zweiten Grades, welche durch  $P$  geht, derart, dass die Hauptaxe in  $P$  normal steht, dann ist einer der Schnitte der Fläche gleichen Moments mit dieser Fläche zweiten Grades der durch  $P$  gehende sphärische Kegelschnitt. Da die Normale auf der Fläche zweiten Grades die Hauptaxe ist, so berührt sie, wie eben gezeigt wurde, die Fläche gleichen Moments. Die Berührungsebene an die Fläche gleichen Moments ist daher die Ebene, welche die auf der Fläche zweiten Grades senkrechte Gerade und die Tangente an den sphärischen Kegelschnitt enthält.

Um ein Loth vom Mittelpunkt  $O$  auf diese Berührungsebene zu fallen, können wir das gewöhnliche geometrische Verfahren einschlagen.  $PP'$  sei eine Tangente an den sphärischen Kegelschnitt; von  $O$  falle ein Loth auf  $PP'$ , dies ist dann der Radiusvector  $OP$ , weil  $PP'$  eine

Tangente an die Kugel ist. In der Berührungsebene ziehe eine Linie von  $P$  aus senkrecht zu  $PP'$ , sie ist dann die Normale  $PQ$  der Fläche zweiten Grades. Von  $O$  falle das Loth  $OQ$  auf diese Normale,  $OQ$  steht dann senkrecht auf der Berührungsebene. Daraus ergibt sich die folgende Construction:

*Ist  $P$  irgend ein Punkt auf einer Fläche gleichen Moments, deren Parameter  $I$  ist und  $OQ$  ein Loth vom Mittelpunkt auf die Berührungsebene, so ist  $PQ$  die Hauptaxe für  $P$ , bez. welcher das Trägheitsmoment  $I$  ist.*

Die Fläche gleichen Moments wird eine Fresnel'sche Wellenfläche, wenn  $I$  grösser als das grösste Hauptträgheitsmoment für den Schwerpunkt ist. Die allgemeine Form dieser Fläche ist zu bekannt, als dass wir nöthig hätten, hier näher auf sie einzugehen. Sie besteht aus zwei Schalen, welche eine concentrische Kugel und ein Rotationsellipsoid werden, wenn zwei der Hauptmomente für den Schwerpunkt gleich sind. Wenn die Hauptmomente ungleich sind, so hat die Fläche zwei Arten von Singularitäten.

(1) Die beiden Schalen schneiden sich in einem Punkt  $P$  in der Ebene der grössten und kleinsten Momente. Im Punkt  $P$  gibt es einen Berührungskegel an die Fläche. Zieht man eine Berührungsebene an diesen Kegel und vom Schwerpunkt  $O$  ein Loth  $PQ$  auf diese Berührungsebene, so ist  $PQ$  eine Hauptaxe für  $P$ . Es gibt daher unendlich viele Hauptaxen für  $P$ , da sich unendlich viele Berührungsebenen an den Kegel legen lassen. Für irgend einen gegebenen Punkt existiren aber nicht mehr als drei Hauptaxen, es sei denn, dass zwei der Hauptaxen gleich wären, in welchem Fall der Ort der Hauptaxen eine Ebene ist. Der Punkt  $P$  liegt daher auf einem Focalkegelschnitt und der Ort aller Linien  $PQ$  ist eine auf dem Kegelschnitt normale Ebene. Der Punkt  $Q$  liegt auf einer Kugel vom Durchmesser  $OP$ , der Ort der Punkte  $Q$  ist mithin ein Kreis.

(2) Die beiden Schalen haben eine gemeinsame Berührungsebene, welche die Fläche längs einer Kurve berührt. Diese Kurve ist ein Kreis, dessen Ebene senkrecht auf der Ebene der grössten und kleinsten Momente steht. Fällt man von  $O$  ein Loth  $OP'$  auf die Ebene des Kreises, so ist  $P'$  ein Punkt auf ihm. Ist  $R$  ein beliebiger zweiter Punkt auf dem Kreis, so ist  $RP'$  die Hauptaxe für  $R$ . Es gibt mithin einen kreisförmigen Ring von Punkten, für welche die Hauptaxe durch denselben Punkt geht und die Trägheitsmomente bez. dieser Hauptaxen gleich sind.

Man kann die Gleichung der Fläche gleichen Moments auch dazu benutzen, die drei Hauptmomente für irgend einen Punkt mit den Coordinaten  $(x, y, z)$  zu ermitteln. Schaffen wir aus der Gleichung die Brüche weg, so erhalten wir für  $I$  eine cubische Gleichung, deren Wurzeln die drei Hauptmomente liefern.

Soll man z. B. den Ort aller Punkte finden, für welche irgend eine symmetrische Function der drei Hauptmomente einer gegebenen Grösse gleich ist, so kann man diese symmetrische Function durch die Coefficienten der cubischen Gleichung auf die gewöhnliche Art ausdrücken. Man erhält damit die Gleichung des Orts.

Beisp. 1. Wenn eine Fläche gleichen Moments eine mit dem reciproken central-ellipsoid confocale Fläche zweiten Grades schneidet, so sind die Schnittpunkte ein sphärischer Kegelschnitt und eine Krümmungslinie. Wenn aber die Fläche zweiten Grades ein Ellipsoid ist, so können beide zugleich nicht reell sein.

Denn nehmen wir an, die Fläche schneide das Ellipsoid in beiden Kurven und  $P$  sei ein Punkt auf der Krümmungslinie,  $P'$  ein solcher auf dem sphärischen Kegelschnitt, dann ist, nach § 39,  $OP'^2 \pm D_1^2 = OP^2$ , welches kleiner als  $A \pm \lambda$  ist. Es ist aber  $OP'^2 \pm D_1^2 \pm D_2^2 = A \pm B \pm C \pm 3\lambda$ , also  $D_2^2 > B \pm C \pm 2\lambda \pm A \pm 2\lambda$ . Mithin müsste  $D_2$  grösser als der grösste Radiusvector des Ellipsoids sein, welches unmöglich ist.

Beisp. 2. Man suche den Ort aller Punkte eines Körpers, für welche

1. die Summe der Hauptmomente einer gegebenen Grösse  $I$  gleichkommt;
2. die Summe der drei Produkte der Hauptmomente, wenn man je zwei als Factoren zusammenstellt, gleich  $I^2$  ist;
3. das Product der Hauptmomente  $I^3$  gleichkommt.

Die Resultate sind

1. eine Kugel vom Radius

$$\left\{ \begin{aligned} I &= A + B + C, \\ M &= 1, \end{aligned} \right. \in \mathbb{R}_1$$

2. ein Kegel

$$4(A^2 + B^2 + C^2 + 4ABC + 3(A^2 + B^2 + C^2) + 2AB + 2BC + 2CA) = I^2,$$

3. ein Kegel

$$4AB^2 + 4B^2C + 4C^2A + 4A^2B + 4B^2C + 4C^2A + 4A^2B = I^3.$$

wo  $A = A(x, y, z)$  und  $B, C$  ähnliche Ausdrücke sind.

## Kapitel II.

### Das D'Alembert'sche Princip etc.

§ 66. Die Principien, nach welchen sich die Bewegung eines einzelnen materiellen Punktes, an dem gegebene Kräfte angreifen, bestimmen lässt, findet man in jedem Buch, das die Dynamik der materiellen Punkte behandelt. Sie heissen die drei Bewegungsgesetze. Es wird gezeigt, dass, wenn  $(x, y, z)$  die Coordinaten des Massenpunktes zur Zeit  $t$ , bezogen auf drei im Raum festliegende rechtwinklige Axen,  $m$  seine Masse und  $X, Y, Z$  die Componenten der Kräfte parallel den Axen sind, die Bewegung durch Auflösung der Simultangleichungen

$$m \frac{d^2x}{dt^2} = X, \quad m \frac{d^2y}{dt^2} = Y, \quad m \frac{d^2z}{dt^2} = Z$$

gefunden werden kann.

Betrachten wir einen starren Körper als eine Sammlung materieller Punkte, die durch unveränderliche Beziehungen miteinander verbunden sind, so lassen sich die Gleichungen für die verschiedenen Punkte nach den eben erwähnten Principien niederschreiben. Die an jedem Punkt wirkenden Kräfte sind jedoch nicht mehr bekannt, da sie zum Theil von der gegenseitigen Einwirkung der Punkte aufeinander hervorgerufen werden.

Wir setzen voraus, (1) die Wirkung zweier Massenpunkte aufeinander geschehe längs ihrer Verbindungslinie und (2) die Wirkung und Gegenwirkung zwischen beiden seien gleich und entgegengesetzt. Sind  $n$  materielle Punkte vorhanden, so ergeben sich  $3n$  Gleichungen und, wie aus der Statik bekannt ist,  $3n - 6$  unbekannte Reactionen. Um die Bewegung zu ermitteln, müssen diese unbekannten Grössen eliminirt werden. Wir erhalten so schliesslich sechs Gleichungen und diese reichen, wie wir sogleich sehen werden, zur Bestimmung der Bewegung des Körpers hin.

Wenn verschiedene starre Körper gegenseitig auf einander einwirken, so wird das Problem noch complicirter. Doch brauchen wir weder auf diesen noch auf den vorigen Fall näher einzugehen, da D'Alembert eine Methode gefunden hat, nach welcher man alle nöthigen Gleichungen erhält, ohne nöthig zu haben, die Bewegungsgleichungen

der verschiedenen Massenpunkte aufzustellen und ohne eine andre Annahme über die Natur der gegenseitigen Einwirkungen zu machen als die folgende, welche man als eine natürliche Folge der Bewegungsgesetze ansehen kann:

*Die inneren Wirkungen und Gegenwirkungen eines Systems starrer sich bewegnender Körper halten sich gegenseitig das Gleichgewicht.*

§ 67: *Erklärung des D'Alembert'schen Princips.* Bei der Anwendung dieses Princips wird mit Vortheil der Ausdruck *Effectivkraft* gebraucht, der sich so definiren lässt.

Wenn ein materieller Punkt als Theil eines starren Körpers sich bewegt, so steht er unter der Einwirkung von äusseren gegebenen Kräften und der Molukularreactionen der übrigen materiellen Punkte. Denken wir uns diesen Punkt von dem Rest des Körpers getrennt und alle diese Kräfte entfernt, so existirt eine einzelne Kraft, welche ihm unter denselben Anfangsbedingungen die nämliche Bewegung ertheilen würde, die er zuvor hatte. Diese Kraft heisst die Effectivkraft des Punktes. Sie ist offenbar die Resultante der auf den Punkt wirkenden gegebenen und Molekularkräfte.

Ist  $m$  die Masse des Punktes,  $(x, y, z)$  seine Coordinaten bez. festliegender rechtwinkliger Axen zur Zeit  $t$ , so sind seine Beschleunigungen  $\frac{d^2x}{dt^2}$ ,  $\frac{d^2y}{dt^2}$ ,  $\frac{d^2z}{dt^2}$ . Wird nun die Resultante dieser letzteren mit  $f$  bezeichnet, so wird, wie in der Dynamik der Massenpunkte gezeigt wird, die Effectivkraft durch  $mf$  gemessen.

Bezeichnet man mit  $F$  die Resultante der gegebenen, mit  $R$  die Resultante der Molekularkräfte, die an dem Punkt angreifen, so ist  $mf$  die Resultante von  $F$  und  $R$ . Wird nun  $mf$  im entgegengesetzten Sinn genommen, so halten sich  $F$ ,  $R$  und  $mf$  das Gleichgewicht.

Dasselbe gilt für jeden materiellen Punkt eines jeden Körpers des Systems. Auf diese Art erhält man eine Gruppe von Kräften von derselben Art wie  $R$ , eine zweite Gruppe von solchen, die mit  $F$  und eine dritte von solchen, die mit  $mf$  gleichartig sind. Diese drei Gruppen bilden ein im Gleichgewicht befindliches Kräftesystem. Nach dem D'Alembert'schen Princip hält sich nun das Kräftesystem der Gruppe  $R$  für sich allein das Gleichgewicht. Daraus folgt, dass die Gruppe  $F$  im Gleichgewicht mit der Gruppe  $mf$  ist.

*Wenn daher Kräfte an jedem Punkt des Systems angebracht werden, welche den Effectivkräften gleich sind, aber in entgegengesetzter Richtung wirken, so halten diese den gegebenen Kräften Gleichgewicht.*

Mit Hülfe dieses Princips reducirt sich die Lösung eines dynamischen auf diejenige eines statischen Problems. Das Verfahren ist folgendermassen. Zuerst wählt man geeignete Grössen, mittelst welcher die Lage des Systems im Raum bestimmt werden kann. Dann drückt man die an jedem Element wirkenden Effectivkräfte durch diese Grössen aus.

Diese im umgekehrten Sinn genommen, sind mit den gegebenen Kräften im Gleichgewicht. Schliesslich lassen sich die Bewegungsgleichungen für jeden starren Körper aufstellen, indem man die Componenten nach drei Richtungen und die Momente bez. dreier Geraden bildet, wie es in der Statik gewöhnlich geschieht.

§ 68. Vor der Veröffentlichung des D'Alembert'schen Princip's ist eine grosse Anzahl dynamischer Probleme gelöst worden. Man findet sie in den älteren Jahrgängen der Memoiren von St. Petersburg, Berlin und Paris, in den Werken von Johann Bernoulli und den *Opuscula* von Euler. Sie erfordern meistens die Bestimmung der Bewegungen verschiedener Körper, die unter dem Einfluss der Schwere stehen oder nicht und einander ziehen oder stossen mit Hilfe von Fäden oder Hebeln, an welchen sie befestigt sind oder längs welcher sie gleiten können und welche, nachdem ihnen am Anfang ein gewisser Anstoss gegeben ist, sich dann selbst überlassen oder gezwungen werden sich auf gegebenen Linien oder Flächen zu bewegen.

Das Postulat von Huyghens: „Gewichte, welche durch die Schwerkraft in Bewegung gesetzt werden, können sich nicht so bewegen, dass ihr gemeinsamer Schwerpunkt sich über den Ort erhebt, von welchem er gefallen ist“, war allgemein eines der zur Lösung dienenden Principien; dazu bedurfte man aber immer noch anderer Principien und es war viel Scharfsinn und Geschicklichkeit nöthig, um in jedem Fall das passende zu entdecken. Solche Probleme waren eine Zeit lang eine Art von Kraftprobe für die Mathematiker. Der von D'Alembert 1742 in einem Mémoire der Pariser Akademie vorgelegte und in seinem *Traité de mécanique* (II<sup>ème</sup> partie, Chap. I) 1743 vollständig begründete Satz machte dieser Art von Turnieren ein Ende, indem er eine directe und allgemeine Methode bot, jedes denkbare Problem zu lösen oder wenigstens in Gleichungen zu bringen. Die mechanischen Schwierigkeiten wurden auf diese Weise auf rein mathematische reducirt. Siehe Montucla Vol. III p. 615 oder Whewell's *History of the Inductive Sciences*.

D'Alembert sagt wörtlich: „Soient  $A, B, C$ , etc. les corps, qui composent le système et supposons qu'on leur ait imprimé les mouvements  $a, b, c$ , etc. qu'ils soient forcés, à cause de leur action mutuelle, de changer dans les mouvements  $a, b, c$ , etc. Il est clair qu'on peut regarder le mouvement  $a$  imprimé au corps  $A$  comme composé du mouvement  $a$ , qu'il a pris, et d'un autre mouvement  $\alpha$ ; qu'on peut de même regarder les mouvements  $b, c$  etc. comme composés des mouvements  $b, \beta; c, \gamma$ ; etc. d'où il s'ensuit que le mouvement des corps  $A, B, C$ , etc. entr'eux aurait été le même, si au lieu de leur donner les impulsions  $a, b, c$ , on leur eût donné à-la-fois les doubles impulsions  $a, \alpha; b, \beta$ ; etc. Or par la supposition les corps  $A, B, C$ , etc. ont pris d'eux-mêmes les mouvements  $a, b, c$ , etc. donc les mouvements  $\alpha, \beta, \gamma$ , etc. doivent être tels qu'ils ne dérangent rien dans les mouvements  $a, b, c$ , etc. c'est-à-dire que si les corps n'avoient reçu que les mouvements  $\alpha, \beta, \gamma$ , etc. ces mouvements auraient dû se détruire mutuellement et le système demeurer en repos. De là résulte le principe suivant pour trouver le mouvement de plusieurs corps qui agissent les uns sur les autres. Decomposez les mouvements  $a, b, c$ , etc. imprimés à chaque corps, chacun en deux autres  $a, \alpha; b, \beta; c, \gamma$ ; etc. qui soient tels que si l'on n'eût imprimé aux corps que les mouvements  $a, b, c$ , etc. ils eussent pu conserver les mouvements sans se nuire réciproquement; et que si on ne leur eût imprimé que les mouvements  $\alpha, \beta, \gamma$ , etc. le système fût demeuré en repos; il est clair que  $a, b, c$ , etc. seront les mouvements que ces corps prendront en vertu de leur action. Ce qu'il fallait trouver.“

§ 69. Ueber das D'Alembert'sche Princip macht Sir G. Airy folgende Bemerkungen:

„Ich habe verschiedene Erklärungen bez. Besprechungen dieses Satzes gesehen, die mir fehlerhaft zu sein scheinen. Der Satz an sich ist weder ein neues physikalisches Princip noch ein Zusatz zu schon existirenden physikalischen Principien; er ist eine passende Combination mechanischer Erwägungen, welche in einem gedrängten Verfahren von grosser Eleganz zum Ausdruck kommen.

Der nicht ausgesprochene Gedanke, der die ganze Untersuchung beherrscht, ist dieser: Man kann sich jede Menge von Materie in irgend einer zusammengesetzten mechanischen Combination so vorstellen, als enthielte sie zwei verschiedene Eigenschaften: — erstens die des Zusammenhanges in sich selbst, der Empfänglichkeit für Druckkraft und des Zusammenhanges mit anderen solchen Mengen, aber nicht der Trägheit und nicht der Empfänglichkeit für Annahme von Bewegungsgrösse — zweitens der discreten Moleküle der Materie, die durch das Connexionsgerüst an ihrer Stelle gehalten werden, für von aussen mitgetheilte Bewegungsgrösse empfänglich sind und Trägheit besitzen. Die Vereinigung erzeugt ein imponderables Gerüst, welches ponderable materielle Punkte trägt.

Die Action äusserer bewegender Kräfte auf irgend einen materiellen Punkt sucht nun eine gewisse Beschleunigung dieses Punktes hervorzubringen, hat aber im Allgemeinen ihre volle Wirkung nicht. Was verhindert sie daran? Es ist der Druck des Gerüsts, welcher durch die Differenz zwischen der gegebenen bewegenden Kraft und der Effectivkraft gemessen wird. So hat jeder Theil des Gerüsts eine Druckkraft auszuhalten, die von diesem Unterschied abhängt. Das ganze mechanische System, wie complicirt es auch sei, kann man nun als ein System von Gerüsten auffassen, von denen jedes Druckkräften unterliegt und in Folge ihrer Combination jedes den anderen Kräfte mittheilt.

Welche Bewegungsgesetze gehen nun aus diesem Zusammenhang hervor? Die Kräfte sind Druckkräfte, die auf imponderable Gerüste wirken und sie müssen sich den Gesetzen des statischen Gleichgewichts entsprechend das Gleichgewicht halten. Denn sonst müsste eine augenblickliche Veränderung in der vorausgesetzten Bewegung vor sich gehen und diese Veränderung wäre von einer momentanen Aenderung der effectiven Kraft der Moleküle begleitet, welche einen dem Gleichgewicht entsprechenden anderen Druck hervorbringen würde. (Man bemerke, dass nicht die Bewegungsgrösse, sondern die bewegende Kraft momentan geändert werden kann.)

Wir kommen so zu dem Schluss, dass die Summe aller Unterschiede zwischen der an jedem Molekül angreifenden bewegenden Kraft und der thatsächlichen effectiven Kraft durch den ganzen Bau hindurch sich statisch das Gleichgewicht halten muss. Fasst man daher die sämmtlichen gegebenen bewegenden Kräfte in eine Gruppe und die Effectivkräfte in eine andre zusammen, so kommt man zu dem Resultat, dass die gegebenen bewegenden Kräfte durch den ganzen Bau hindurch den Effectivkräften das Gleichgewicht halten. So wird das D'Alembert'sche Princip gewöhnlich ausgesprochen.

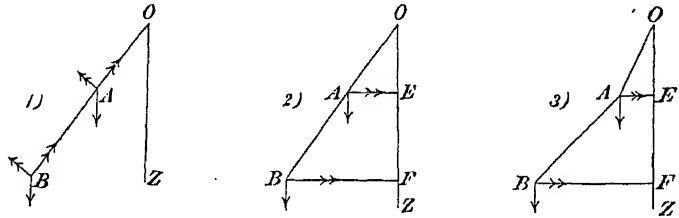
§ 70. Beispiel zu D'Alembert's Princip. *Ein nicht schwerer Stab OAB kann sich in einer verticalen Ebene frei um ein glattes festes Scharnier bei O drehen. Zwei schwere Punkte, deren Massen  $m$  und  $m'$  sind, werden an dem Stab bei A und B angebracht und schwingen mit ihm. Man soll die Bewegung finden.*

Die Schwingungsbewegung eines einzelnen materiellen Punktes wird in der Elementardynamik behandelt. Es wird dort nachgewiesen, dass die Zeitdauer einer kleinen Schwingung der Quadratwurzel aus dem Radius des beschriebenen Kreises proportional ist. In unserm Problem haben wir zwei materielle Punkte, die Kreisbogen von ver-



schiedenen Radien in derselben Zeit beschreiben. Jeder Punkt muss daher die Bewegung des andern beeinflussen. Der Punkt mit dem kürzeren Radius beschleunigt die Bewegung des andern und wird selbst durch die langsamere Bewegung des letzteren verzögert. Wir haben die resultirende Bewegung zu finden.

Durch das D'Alembert'sche Princip sind wir in den Stand gesetzt, das dynamische Problem auf ein gewöhnliches statisches zurückzuführen, welches uns, nach den Regeln der Statik gelöst, die Differentialgleichungen der Bewegung liefert.



Man setze  $OA = a$ ,  $OB = b$  und der Winkel, den der Stab  $OAB$  mit der Verticalen  $OZ$  macht, sei  $\theta$ . Der Massenpunkt  $A$  beschreibt einen Kreisbogen; seine Effectivkräfte sind daher, wie aus der Elementardynamik bekannt ist,  $ma \frac{d^2\theta}{dt^2}$  und  $ma(\frac{d\theta}{dt})^2$ , wovon die erstere die Richtung der Tangente an den Kreisbogen nach der Seite hin hat, nach welcher  $\theta$  zunimmt und die letztere längs des Radius  $AO$  nach  $O$  zu gerichtet ist. Ebenso sind die am Punkt  $B$  in der Richtung der Tangente und des Radius wirkenden Effectivkräfte bez.  $m'b \frac{d^2\theta}{dt^2}$  und  $m'b(\frac{d\theta}{dt})^2$ . In Fig. 1 sind die Richtungen dieser Kräfte durch die doppelten Pfeile dargestellt, während die einfachen Pfeile die Richtungen der Gewichte  $mg$  und  $m'g$  der materiellen Punkte bezeichnen.

Nach D'Alembert's Princip sind die vier Effectivkräfte in der umgekehrten Richtung genommen mit den Gewichten der Punkte im Gleichgewicht. Um nicht die unbekannte Reaction bei  $O$  und die Reactionen zwischen den Punkten und dem Stab einführen zu müssen, wollen wir die Momente des ganzen Systems um  $O$  nehmen. Die Kräfte  $ma(\frac{d\theta}{dt})^2$  und  $m'b(\frac{d\theta}{dt})^2$  haben keine Momente, da sie in der Richtung  $BAO$  wirken. Die Momente der beiden andern sind  $ma^2 \frac{d^2\theta}{dt^2}$  und  $m'b^2 \frac{d^2\theta}{dt^2}$ . Nimmt man sie in umgekehrter Richtung und addirt die Momente der Gewichte, so erhält man

$$(ma^2 + m'b^2) \frac{d^2\theta}{dt^2} + (ma + m'b)g \sin \theta = 0. \quad (1)$$

Dies ist die Differentialgleichung der Bewegung. Wird sie aufgelöst und die beiden willkürlichen Constanten durch die Anfangsbedingungen bestimmt, so erhält man  $\theta$  als Function der Zeit. Doch lässt sich das Resultat auch auf kürzerem Wege finden, ohne auf die analytische Lösung einzugehen.

Setzen wir  $m' = 0$  und schreiben  $l$  für  $a$ , so muss die Gleichung (1) die Bewegung eines *einzelnen Massenpunktes* ergeben, der in einem Kreis vom Radius  $l$  schwingt.

Diese Bewegung wird mithin dargestellt durch

$$l \frac{d^2 \theta}{dt^2} + g \sin \theta = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2).$$

Die Gleichung ist von derselben Form, wie (1). Der Stab schwingt daher ebenso, als ob die beiden Punkte verbunden wären und sich im Abstand  $l = \frac{ma^2 + m'b^2}{ma + m'b}$  vom Scharnier  $O$  befänden.

Als Variation dieses Problems stellen wir uns die Aufgabe, die *Bewegung zu finden, wenn der Stab  $OAB$  sich um die Verticale als conisches Pendel mit gleichförmiger Winkelgeschwindigkeit bewegt, indem der Winkel  $\theta$ , den  $OAB$  mit der Verticalen macht, constant bleibt.*

Auch hier beschreiben die Massenpunkte Kreise, nur sind die Kreisebenen horizontal und ihre Mittelpunkte liegen in  $E$  und  $F$  (Fig. 2, S. 56). Da die Bewegung um die Verticale gleichförmig ist, so hat die Componente der Effectivkraft für  $A$  längs der Tangente an die Bahn von  $A$  den Werth Null, während die in der Richtung des Radius  $AE$  von  $A$  nach  $E$  wirkende Effectivkraft  $ma \sin \theta (d\varphi/dt)^2$  ist, wenn man unter  $\varphi$  den Winkel versteht, den die Ebene  $ZOA$  mit irgend einer festen durch  $OZ$  gehenden Ebene macht. Ebenso hat die ganze Effectivkraft bei  $B$  die Richtung des Radius  $BF$  und ist gleich  $m'b \sin \theta (d\varphi/dt)^2$ .

Die Richtungen dieser Effectivkräfte sind in Fig. 2, S. 56 durch die doppelten Pfeile dargestellt. Dreht man sie um und nimmt die Momente um  $O$ , wie zuvor, so erhält man

$$-(ma^2 + m'b^2) \sin \theta \cos \theta \left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2 + (ma + m'b) g \sin \theta = 0.$$

Die Winkelgeschwindigkeit  $d\varphi/dt$  der Ebene  $ZOA$  um die Verticale ist daher durch

$$\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2 = \frac{(ma + m'b)g}{(ma^2 + m'b^2) \cos \theta} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (4)$$

gegeben mit Ausnahme des Falles, in welchem der Stab vertical ist.

Auch hier zeigt das Resultat, dass die Bewegung des Stabes  $OAB$  um die Verticale ebenso vor sich geht, als wenn die materiellen Punkte in einen einzelnen vereinigt und in demselben Abstand von  $O$ , wie bei dem ersten Problem, angebracht würden.

Wir sind bei diesen Beispielen der in § 67 gegebenen Regel gefolgt. Wir suchen zuerst einen Ausdruck für die Effectivkräfte, wie ihn die Dynamik der Massenpunkte bietet. Wir drehen diese Effectivkräfte um und drücken die Gleichgewichtsbedingungen durch Gleichungen aus. Diese sind dann die Bewegungsgleichungen.

Beisp. 1. Wenn drei materielle Punkte an dem Stab in verschiedenen Abständen von  $O$  angebracht werden, die Bewegung zu finden, (1) wenn das System in

Beisp. 2. Wenn die zwei materiellen Punkte an  $O$  mittelst zweier Fäden  $OA$ ,  $AB$ , wie Fig. 3, S. 56 zeigt, befestigt sind und sich das System um die Verticale mit der gleichförmigen Winkelgeschwindigkeit  $d\varphi/dt$  dreht, so ist

$$(m \cdot AE \cdot OE + m' \cdot BF \cdot OF) \left( \frac{d\varphi}{dt} \right)^2 = (m \cdot AE + m' \cdot BF) g.$$

§ 71. Die Aufstellung der allgemeinen Bewegungsgleichungen der Systeme starrer Körper mittelst des D'Alembert'schen Princip.

Sind  $(x, y, z)$  die Coordinaten des materiellen Punktes  $m$  zur Zeit  $t$ , auf irgend ein System rechtwinkliger im Raum festliegender Axen bezogen, so sind  $d^2x/dt^2$ ,  $d^2y/dt^2$ ,  $d^2z/dt^2$  die Beschleunigungen des Punktes. Sind dann ferner  $X$ ,  $Y$ ,  $Z$  die Componenten parallel zu den Coordinatenaxen der an demselben Punkt angreifenden, gegebenen bewegenden Kräfte, so befinden sich nach D'Alembert's Princip die Kräfte

$$m \left( X - \frac{d^2x}{dt^2} \right), \quad m \left( Y - \frac{d^2y}{dt^2} \right), \quad m \left( Z - \frac{d^2z}{dt^2} \right)$$

mit ähnlichen an jedem andern Massenpunkt wirkenden Kräften zusammen im Gleichgewicht. Daraus folgt, wie die Statik lehrt, die Gleichung

$$\Sigma m \frac{d^2x}{dt^2} = \Sigma m X$$

und zwei ähnliche Gleichungen für  $y$  und  $z$ , welche man durch Zerlegung in die Componenten parallel den Axen erhält. Nimmt man die Momente um die Axen, so ergibt sich für die  $x$ -Axe

$$\Sigma m \left( y \frac{d^2z}{dt^2} - z \frac{d^2y}{dt^2} \right) = \Sigma m (yZ - zY)$$

und ähnliche Ausdrücke für  $zx$  und  $xy$ .

Diese Gleichungen lassen sich in die bequemere Form bringen

$$\left. \begin{aligned} \frac{d}{dt} \Sigma m \frac{dx}{dt} &= \Sigma m X \\ \frac{d}{dt} \Sigma m \frac{dy}{dt} &= \Sigma m Y \\ \frac{d}{dt} \Sigma m \frac{dz}{dt} &= \Sigma m Z \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (A).$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{d}{dt} \Sigma m \left( y \frac{dz}{dt} - z \frac{dy}{dt} \right) &= \Sigma m (yZ - zY) \\ \frac{d}{dt} \Sigma m \left( z \frac{dx}{dt} - x \frac{dz}{dt} \right) &= \Sigma m (zX - xZ) \\ \frac{d}{dt} \Sigma m \left( x \frac{dy}{dt} - y \frac{dx}{dt} \right) &= \Sigma m (xY - yX) \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (B).$$

Drückt man die Beschleunigungen in Polarcoordinaten aus, so erhält man auf dieselbe Art ein andres aber gleichwerthiges System von Bewegungsgleichungen.

§ 72. **Die Coordinaten der Körper.** Die Gleichungen in § 71 sind die allgemeinen Bewegungsgleichungen der dynamischen Systeme. Sie sind jedoch in dieser Form äusserst unhandlich. Wenn das betrachtete System ein starrer Körper und nicht nur eine endliche Anzahl einzelner materieller Punkte ist, so sind die sämtlichen  $\Sigma$  bestimmte Integrale. Auch gibt es dann unendlich viele  $x$ ,  $y$  und  $z$ , die miteinander durch unendlich viele geometrische Gleichungen verbunden sind. Man muss daher, wie in § 67 angedeutet wurde, eine endliche Anzahl von Grössen, welche die Lage des Körpers im Raum bestimmen, zu finden suchen und die Effectivkräfte durch diese Grössen ausdrücken. Diese Grössen heissen *die Coordinaten des Körpers*. In der theoretischen Dynamik ist es von der grössten Wichtigkeit, diese Coordinaten passend zu wählen. Sie sollten so sein, dass sie (1) als Function der Zeit die Bewegung des Körpers passend bestimmen und dass (2) die durch sie ausgedrückten dynamischen Gleichungen so einfach als nur möglich sind.

Zuerst wollen wir untersuchen, wie viele Coordinaten zur Bestimmung der Lage eines Körpers nöthig sind.

Die Lage eines Körpers im Raum ist gegeben, wenn wir die Coordinaten eines seiner Punkte und die Winkel kennen, welche zwei in dem Körper festliegende Gerade mit den Coordinatenaxen machen. Zwischen diesen sechs Winkeln bestehen drei geometrische Beziehungen, so dass die Lage eines Körpers von *sechs* unabhängigen Variablen, d. h. drei Coordinaten und drei Winkeln abhängig gemacht werden kann. Diese Variablen wollen wir zu Coordinaten des Körpers nehmen.

Offenbar können wir die Coordinaten  $(x, y, z)$  eines Massenpunktes  $m$  eines Körpers durch die Coordinaten dieses Körpers und Grössen ausdrücken, die bekannt sind und während der Bewegung constant bleiben. Wir wollen zuerst annehmen, das System bestehe nur aus einem einzelnen Körper. Substituiren wir diese Ausdrücke für  $x$ ,  $y$ ,  $z$  in die Gleichungen (A) und (B) des § 71, so erhalten wir sechs Gleichungen zur Bestimmung der sechs Coordinaten des Körpers in Ausdrücken der Zeit. So wird die Bewegung gefunden. Besteht das System aus mehreren Körpern, so erhalten wir, jeden für sich betrachtend, sechs Gleichungen für jeden Körper. Bestehen irgend welche unbekannte Reactionen zwischen den Körpern, so sind diese in  $X$ ,  $Y$ ,  $Z$  enthalten. Jeder Reaction entspricht eine geometrische Beziehung, welche die Bewegung der Körper verbindet. Im Ganzen erhalten wir daher eine genügende Anzahl von Gleichungen, um die Bewegung des Systems bestimmen zu können.

Geht die Bewegung in einem Raum von zwei Dimensionen vor sich, so reduciren sich die sechs Coordinaten auf *drei*. Es sind dies die beiden Coordinaten des in dem Körper festliegenden Punktes und der Winkel, den eine in dem Körper festliegende Gerade mit einer im Raum festliegenden macht.

§ 73. Zunächst wollen wir versuchen, die durch Zerlegung in Componenten erhaltenen Bewegungsgleichungen (A) durch eine geeignete Wahl der Coordinaten zu vereinfachen. Wir müssen zu diesem Zweck die Componente der Bewegungsgrösse und die Componente der Effectivkräfte eines Systems für irgend eine Richtung suchen.

Ist die gegebene Richtung die  $x$ -Axe und sind  $(x, y, z)$  die Coordinaten eines Punktes von der Masse  $m$ , so ist die Componente seiner Bewegungsgrösse in der gegebenen Richtung  $m \, dx/dt$  und also für das ganze System  $\Sigma m \, dx/dt$ . Sind nun  $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$  die Coordinaten des Schwerpunkts des Systems und  $M$  seine Masse, so ist  $M\bar{x} = \Sigma m x$ , daher  $M \frac{d\bar{x}}{dt} = \Sigma m \frac{dx}{dt}$ .

*Die Componente der Bewegungsgrösse eines Systems in irgend einer Richtung ist daher der ganzen Masse gleich, multiplicirt mit der Componente der Geschwindigkeit des Schwerpunkts.*

*Das heisst, die lineare Bewegungsgrösse bleibt für ein System dieselbe, wenn man die ganze Masse in seinem Schwerpunkt vereinigt.*

*Ebenso ist die Componente der Effectivkräfte eines Systems in irgend einer Richtung der ganzen Masse gleich, multiplicirt mit der Componente der Beschleunigung des Schwerpunkts.*

Aus diesem Satz geht hervor, dass es vortheilhaft sein wird, die Coordinaten des Schwerpunkts eines jeden starren Körpers in dem System als drei der Bestimmungsstücke dieses Körpers zu nehmen. Wir können alsdann die Componente der Effectivkräfte für irgend eine Richtung in einfacher Form ausdrücken.

§ 74. Schliesslich wollen wir die Bewegungsgleichungen (B), welche die Momente um die Axen darstellen, durch eine passende Wahl der drei übrigen Bestimmungsstücke zu vereinfachen suchen. Zu diesem Zweck müssen wir das Moment der Bewegungsgrösse und das Moment der Effectivkräfte um irgend eine Gerade suchen.

Nimmt man die gegebene Gerade zur  $x$ -Axe, dann ist, wie in der Statik,  $yZ - zY$  das Moment einer Kraft bez. der  $x$ -Axe und, ersetzt man  $Y$  und  $Z$  durch  $\frac{dy}{dt}$  und  $\frac{dz}{dt}$ , das Moment der Bewegungsgrösse bez. der  $x$ -Axe

$$\Sigma m \left( y \frac{dz}{dt} - z \frac{dy}{dt} \right).$$

Dies ist ein Ausdruck zweiten Grades. Substituiren wir nun  $y = \bar{y} + y'$ ,  $z = \bar{z} + z'$ , so erhalten wir nach § 14

$$\Sigma m \left( y' \frac{dz'}{dt} - z' \frac{dy'}{dt} \right) + M \left( \bar{y} \frac{d\bar{z}}{dt} - \bar{z} \frac{d\bar{y}}{dt} \right),$$

worin  $M$  die Masse des betrachteten Systems oder Körpers ist.

Das zweite Glied des Ausdrucks ist das Moment um die  $x$ -Axe der Bewegungsgrösse einer Masse  $M$ , die sich mit dem Schwerpunkt bewegt.

Das erste Glied ist das Moment um eine durch den Schwerpunkt gehende, der  $x$ -Axe parallele Gerade nicht der wirklichen Bewegungsgrößen der verschiedenen materiellen Punkte, sondern ihrer Bewegungsgrößen *in Bezug* auf den Schwerpunkt. Liegt irgend ein specieller Körper vor, so hängt dieses Glied also nur von der relativen Bewegung des Körpers um seinen Schwerpunkt ab. Bei der Ermittlung seines Werthes können wir daher annehmen, der Schwerpunkt sei dadurch in den Zustand der Ruhe gebracht, dass man jedem Punkt des Systems eine Geschwindigkeit ertheilt, die derjenigen des Schwerpunkts gleich und entgegengesetzt ist. Daraus folgt:

*Das Moment der Bewegungsgrösse eines Systems um eine Gerade wird dem Moment der Bewegungsgrösse der ganzen Masse, welche im Schwerpunkt vereinigt und sich mit ihm bewegend gedacht wird, gleich, wenn man das Moment der Bewegungsgrösse des Systems in Bezug auf den Schwerpunkt um eine Gerade hinzufügt, welche parallel zur gegebenen Geraden durch den Schwerpunkt geht.*

Ebenso gilt dieser Satz auch, wenn man statt Bewegungsgrösse des Systems „Effectivkraft“ setzt.

Nimmt man eine Gerade durch den Schwerpunkt als Axe  $Ox$ , so wird das Moment der *relativen* Bewegungsgrößen um sie demjenigen der *thatsächlichen* gleich.

Aus diesem Satz geht hervor, dass es von Vortheil sein wird, die Winkelbewegung eines Körpers auf ein System von Coordinatenaxen zu beziehen, die durch den Schwerpunkt gehen. Ein allgemeiner Ausdruck für das Moment der effectiven Kräfte für irgend eine durch den Schwerpunkt gehende Gerade lässt sich passender Weise jetzt noch nicht entwickeln. Unter verschiedenen Umständen sind verschiedene Ausdrücke von Vortheil. Namentlich drei Fälle sind zu beachten: (1) wenn der Körper um eine sowohl im Körper als im Raum festliegende Axe rotirt; (2) wenn die Bewegung in einem Raum von zwei Dimensionen stattfindet; (3) der Euler'sche Ausdruck, wenn der Körper um einen festen Punkt rotirt. Man findet diese Fälle bez. am Anfang des dritten und vierten Kapitels und im fünften behandelt.

§ 75. Ein starrer Körper drehe sich um einen im Körper festliegenden Punkt  $O$ , wie z. B. den Schwerpunkt;  $O\xi$ ,  $O\eta$ ,  $O\xi$  sei ein neues in dem Körper festliegendes System rechtwinkliger Axen. Die gewöhnlichen Formeln für die Transformation von Axen geben dann

$$y = l\xi + m\eta + n\xi, \quad z = \lambda\xi + \mu\eta + \nu\xi,$$

worin die Richtungscosinusse  $(l, m, n)$ ,  $(\lambda, \mu, \nu)$  Functionen der Zeit sind. Das Axenmoment der Bewegungsgrößen für die  $x$ -Axe ist daher

$$\Sigma m \left( y' \frac{dy'}{dt} - z' \frac{dz'}{dt} \right) = A \Sigma m \xi^2 + B \Sigma m \eta^2 + C \Sigma m \xi \eta + \text{etc.},$$

worin  $A = l \, d\lambda/dt - \lambda \, dl/dt$  und  $B, C$  etc. ähnliche Functionen der Richtungscosinusse sind. Nun bleiben  $\Sigma m \xi^2$ ,  $\Sigma m \eta^2$ , etc. und auch die Coefficienten  $A, B$ , etc. für irgend ein System von materiellen Punkten, welches mit dem gegebenen Körper von gleichem Trägheitsmoment ist, dieselben. Daraus folgt, dass das

Den entsprechenden allgemeinen Ausdruck für die Winkelbewegungsgrösse haben wir hier noch nicht nöthig.

§ 78. **Unabhängigkeit von Translation und Rotation.** Wir können nun zwei wichtige Sätze aufstellen, welche zwar unmittelbar aus den eben erhaltenen Resultaten folgen, die wir aber des besseren Verständnisses halber aus den Anfangsprincipien ableiten wollen.

(1) *Die Bewegung des Schwerpunkts eines unter dem Einfluss irgend welcher Kräfte stehenden Systems bleibt dieselbe, wenn man die ganze Masse in dem Schwerpunkt vereinigt und alle Kräfte parallel zu ihrer früheren Richtung an diesen Punkt verlegt.*

(2) *Die Bewegung eines unter dem Einfluss irgend welcher Kräfte stehenden Körpers um seinen Schwerpunkt bleibt dieselbe, wenn der Schwerpunkt festgelegt wird und dieselben Kräfte auf den Körper wirken.*

Da nach den Gleichungen (A)

$$\Sigma m \frac{d^2 x}{dt^2} = \Sigma m X$$

und da, wenn  $x, \bar{y}, \bar{z}$  die Coordinaten des Schwerpunkts sind,  $\bar{x} \Sigma m = \Sigma m x$  ist, so folgt

$$\frac{d^2 \bar{x}}{dt^2} \Sigma m = \Sigma m X$$

und ebenso für die übrigen Gleichungen.

Dies sind aber die Gleichungen, welche die Bewegung einer Masse  $\Sigma m$  unter der Einwirkung der Kräfte  $\Sigma m X$ , etc. darstellen. Damit ist der erste Satz bewiesen.

Aus einer der Gleichungen (B)

$$\Sigma m \left( x \frac{d^2 y}{dt^2} - y \frac{d^2 x}{dt^2} \right) = \Sigma m (x Y - y X)$$

wird, wenn man  $x = \bar{x} + x', y = \bar{y} + y', z = \bar{z} + z'$  setzt, nach § 14

$$\Sigma m \left( x' \frac{d^2 y'}{dt^2} - y' \frac{d^2 x'}{dt^2} \right) + \left( \bar{x} \frac{d^2 \bar{y}}{dt^2} - \bar{y} \frac{d^2 \bar{x}}{dt^2} \right) \Sigma m = \Sigma m (x' Y - y' X).$$

Nun kann man die Coordinatenachsen durchaus willkürlich annehmen. Wir wollen sie so wählen, dass der Schwerpunkt in dem betrachteten Moment durch den Coordinatenanfang geht. Es wird dann  $\bar{x} = 0$ ,  $\bar{y} = 0$ ;  $d\bar{x}/dt$ ,  $d\bar{y}/dt$  müssen dagegen nicht nothwendiger Weise Null sein. Die Gleichung wird dann

$$\Sigma m \left( x' \frac{d^2 y'}{dt^2} - y' \frac{d^2 x'}{dt^2} \right) = \Sigma m (x' Y - y' X).$$

Diese Gleichung enthält die Coordinaten des Schwerpunkts nicht, gilt für jeden einzelnen Moment der Bewegung und ist daher immer richtig. Sie bildet aber mit den beiden andern aus (B) folgenden Gleichungen zusammen genau die Gleichungen der Momente, welche man erhalten würde, wenn man den Schwerpunkt als festliegenden Punkt betrachtete und ihn zum Coordinatenanfang für die Axen der Momente nähme.

§ 79. Diese beiden wichtigen Sätze werden bez. die Principien der Erhaltung der Bewegungen der Translation und Rotation genannt. Der erste wurde von Newton als vierter Zusatz zu seinem dritten Bewegungsgesetz gegeben und später von D'Alembert und Montucla verallgemeinert. Der zweite ist neueren Ursprungs und scheint gleichzeitig von Euler, Bernoulli und Chevalier d'Arcy entdeckt worden zu sein.

Noch ein anderer Name ist diesen Sätzen gegeben worden. Sie bilden zusammen *das Princip der Unabhängigkeit der Bewegungen der Translation und Rotation*. Die Bewegung des Schwerpunkts bleibt dieselbe, wenn man die ganze Masse in ihm vereinigt und ist daher von der Rotation vollständig unabhängig. Die Bewegung um den Schwerpunkt ist dieselbe, als wenn dieser Punkt fest läge und ist daher von der Bewegung dieses Punktes unabhängig.

§ 80. Durch das erste Princip wird das Problem, die Bewegung des Schwerpunkts eines noch so complicirten Systems zu finden, darauf reducirt, die Bewegung eines einzelnen Massenpunktes zu ermitteln. Durch das zweite reducirt sich das Problem, die Winkelbewegung eines freien Körpers im Raum zu finden, darauf, die Bewegung dieses Körpers um einen festen Punkt zu bestimmen.

**Beispiel zum ersten Princip.** Bei der Benutzung des ersten Principes ist zu beachten, dass die gegebenen Kräfte am Schwerpunkt *parallel* zu ihrer früheren Richtung angebracht werden müssen. Wenn sich z. B. ein starrer Körper unter der Wirkung einer Centralkraft bewegt, so ist die Bewegung des Schwerpunkts im Allgemeinen *nicht* dieselbe, wenn die ganze Masse im Schwerpunkt vereinigt wird, und die centrale Kraft *alsdann* auf ihn wirkt. Der Satz sagt vielmehr, man solle zuerst die Anziehung der Centralkraft für jedes Element des Körpers feststellen, die Bewegung des Schwerpunkts bleibe dieselbe, wenn man *diese* Kräfte parallel zu ihren ursprünglichen Richtungen an dem Schwerpunkt angreifen lässt.

Wenn die gegebenen Kräfte stets parallel einer festen Geraden wirken oder wenn sie nach festen Centren gerichtet sind und variiren, wie der Abstand von diesen Centren, alsdann bleibt die Grösse und Richtung ihrer Resultanten dieselbe, ob wir uns den Körper in seinen Schwerpunkt concentrirt denken oder nicht. In den meisten Fällen jedoch muss man zuerst die Resultante der gegebenen Kräfte suchen, wie sie in Wirklichkeit auf den Körper wirken, ehe er in seinem Schwerpunkt vereinigt wurde.

§ 81. **Beispiel zu dem zweiten Princip.** Nehmen wir an, die Erde rotire um eine durch ihren Schwerpunkt gehende Axe und unterliege den Anziehungen der Sonne und des Mondes. Das zweite Princip belehrt uns dann, dass, wenn die resultirende Anziehung dieser Körper



durch den Schwerpunkt der Erde geht, die Rotation um die Axe in keiner Weise beeinflusst wird. Welche Bahn auch der Schwerpunkt der Erde im Raum verfolgen mag, die Rotationsaxe behält ihre feste Richtung im Raum und die Winkelgeschwindigkeit bleibt constant. Daraus lassen sich unmittelbar zwei wichtige Schlüsse ziehen. Wie man weiss, beschreibt der Schwerpunkt der Erde eine Bahn um die Sonne, die sehr nahezu in einer Ebene liegt und hängt der Wechsel der Jahreszeiten im Wesentlichen von der Neigung der Erdaxe gegen diese Ebene ab. Die Permanenz der Jahreszeiten ist damit festgestellt. Eine zweite Folgerung ist die, dass die Länge des Sternentages unveränderlich ist, weil die Winkelgeschwindigkeit constant bleibt.

Genau genommen geht die Resultante der Anziehungskräfte der Sonne und des Monds auf die einzelnen materiellen Punkte nicht durch den Schwerpunkt der Erde, weil die Erde keine vollkommene Kugel ist, deren Schichten gleicher Dichtigkeit concentrische Kugeln wären. Da aber die ellipsoidischen Schichten nur wenig von der Kugel abweichen, so wird die Rotationsbewegung der Erde nur in geringem Grade afficirt. Trotzdem wirkt die Sonne z. B. mit ungleichen Kräften auf die Theile des Erdäquators, welche ihr näher liegen und auf die weiter entfernten. Die Anziehungskraft der Sonne hat daher *das Bestreben*, die Erde um eine in der Ebene des Aequators senkrecht zu dem Radiusvector der Sonne liegende Axe zu drehen. Die allgemeine Wirkung dieses Kräftepaars auf die Rotation der Erde ist sehr bemerkenswerth; wir werden später beweisen, dass (1) die Rotationsperiode der Erde unverändert bleibt und (2) dass, wenn auch die Richtung der Erdaxe im Raum nicht länger festliegt, die Axe doch im Ganzen die gleiche Neigung gegen die Ebene der Erdbewegung um die Sonne beibehält. Somit bleibt die Permanenz der Jahreszeiten, so weit diese Ursachen in Betracht kommen, unberührt.

§ 82. Allgemeine Methode der Anwendung des D'Alembert'schen Principis. Das allgemeine in der Dynamik zu lösende Problem kann man so fassen:

Eine Anzahl starrer Körper übt sowohl aufeinander als auf feste Punkte, Curven oder Flächen Druck aus und unterliegt der Einwirkung gegebener Kräfte; ihre Bewegung zu finden.

Das D'Alembert'sche Princip wird zur Lösung dieser Aufgabe auf die folgende Art benutzt.

$x, y, z$  seien die Coordinaten des Schwerpunkts irgend eines dieser Körper, auf drei rechtwinklige im Raum festliegende Axen bezogen. Drei andre Coordinaten dieses Körpers mögen so gewählt werden, dass die drei Momente der Bewegungsgrösse des Körpers um drei rechtwinklige, der Richtung nach festliegende und durch den Schwerpunkt gehende Axen sich auf passende Weise durch sie ausdrücken lassen.  $h_1, h_2, h_3$  seien diese drei Momente der Bewegungsgrösse und  $M$  die Masse. Die Effectivkräfte des Körpers sind dann gleichwerthig mit den drei Effectivkräften  $M \frac{d^2x}{dt^2}, M \frac{d^2y}{dt^2}, M \frac{d^2z}{dt^2}$  und den drei Effectivpaaren  $\frac{dh_1}{dt}, \frac{dh_2}{dt}, \frac{dh_3}{dt}$ . Die drei Effectivkräfte greifen an dem Schwerpunkt parallel den Axen  $x, y$  bez.  $z$  an und die drei Kräftepaare wirken

mögen auf ähnliche Art ausgedrückt werden.

Nimmt man nun diese sämtlichen Effectivkräfte und Paare im umgekehrten Sinn, so halten sie den gegebenen Kräften das Gleichgewicht. Die Gleichgewichtsgleichungen findet man durch Zerlegung in solchen Richtungen und indem man die Momente um solche Geraden nimmt, die am passendsten sind. Statt die Effectivkräfte umzudrehen, ist es gewöhnlich praktischer, die gegebenen und Effectivkräfte auf die verschiedenen Seiten der Gleichungen zu schreiben.

Nimmt man jeden Körper für sich, so erhält man auf diese Weise mittelst der drei Componenten und drei Momente sechs Bewegungsgleichungen für jeden Körper.

Wenn zwei starre Körper gegeneinander oder gegen ein festes Hinderniss Druck ausüben, so erhält man eine oder mehrere unbekannte Reactionen. Im Allgemeinen gibt es aber auch ebensoviele Gleichungen, durch welche die Berührungsbedingungen ausgedrückt werden. Die Art, wie man diese Bedingungen niederschreibt, wird in den folgenden Kapiteln erklärt.

Wir erhalten so ebensoviele Gleichungen, als Coordinaten und Reactionen vorhanden sind. Manchmal kann man durch geeignete Wahl der Richtung der Componenten oder der Geraden, um welche die Momente genommen werden, ebenso wie in der Statik der Einführung einiger dieser Reactionen in die Gleichungen aus dem Wege gehen. Dadurch wird die Anzahl der zu bildenden Gleichungen reducirt. Man kann auch manchmal diese Reactionen dadurch vermeiden, dass man für zwei Körper die Componenten und Momente so nimmt, als ob sie für den Augenblick nur einen Körper bildeten.

Diese Differentialgleichungen sind dann zu lösen. Die verschiedenen Verfahrensarten werden später erklärt werden. Im Allgemeinen kann man ein Integral durch eine Methode finden, die das Princip *der lebendigen Kraft* heisst. Wir werden eine Regel angeben, nach welcher sich dieses Integral niederschreiben lässt, ohne vorher die Bewegungsgleichungen aufgestellt zu haben.

Wir haben uns hier darauf beschränkt, die Gleichungen durch Zerlegung in Componenten und Bildung der Momente zu suchen. Man kann jedoch auch anders verfahren. Lagrange hat z. B. eine Methode, die Bewegungsgleichungen zu bilden, angegeben, durch welche ausser anderen Vortheilen die Arbeit, die Reactionen zu eliminiren, vermieden wird.

§ 83. Die Anwendung des D'Alembert'schen Princips auf Momentankräfte. Wenn eine Kraft  $F$  auf einen Massenpunkt  $m$  immer in derselben Richtung wirkt, so ist die Bewegungsgleichung

$$m \frac{dv}{dt} = F,$$

worin  $v$  die Geschwindigkeit des Massenpunktes zur Zeit  $t$  bedeutet. Wirkt nun die Kraft während des Zeitintervalles  $T$  und sind  $v, v'$  die Geschwindigkeiten am Anfang und Ende desselben, so ist

$$m(v' - v) = \int_0^T F' dt.$$

Nimmt man nun an, die Kraft  $F'$  wachse unbegrenzt, während das Intervall  $T$  unbegrenzt abnimmt, so kann das Integral eine endliche Grenze haben. Diese Grenze sei  $P$ . Die Gleichung lautet dann

$$m(v' - v) = P.$$

Die Geschwindigkeit hat in dem Intervall  $T$  zu- oder abgenommen von  $v$  bis  $v'$ . Nimmt man an, die Geschwindigkeit sei endlich geblieben und ist  $F'$  ihr grösster Werth innerhalb des Intervalls, so ist der durchlaufene Raum kleiner als  $FT$ . Weil aber beim Uebergang zur Grenze dieser Werth verschwindet, so hat sich der Massenpunkt, während die Kraft  $F'$  auf ihn wirkte, nicht bewegt. *Er hatte keine Zeit sich zu bewegen, seine Geschwindigkeit aber hat sich geändert, sie ist von  $v$  zu  $v'$  übergegangen.*

Man kann annehmen, das richtige Mass für eine Kraft sei gefunden, wenn sich aus ihm alle Wirkungen der Kraft ableiten lassen. Handelt es sich um endliche Kräfte, so ist sowohl die Orts- als die Geschwindigkeitsänderung des Massenpunktes zu bestimmen. Man muss daher die ganze Wirkungszeit in Elementarzeiten theilen und die Wirkung der Kraft während einer jeden derselben bestimmen. Bei unendlich grossen Kräften jedoch, die eine unbegrenzt kurze Zeit wirken, ist die Ortsveränderung Null und die Aenderung der Geschwindigkeit das einzige Element, das zu bestimmen bleibt. Es ist deshalb angezeigt, die ganze zur Wirkung gekommene Kraft in ein Mass zu vereinigen. Eine solche Kraft heisst eine *Momentan-* oder *Stosskraft*. Sie kann definiert werden als die Grenze einer Kraft, die unendlich gross ist, aber nur während einer unendlich kurzen Zeit wirkt. In der Natur gibt es selbstverständlich solche Kräfte nicht; doch gibt es Kräfte, wie z. B. der Stoss eines Hammers, die sehr gross sind und nur sehr kurze Zeit wirken. Diese lassen sich als Stosskräfte behandeln und die Resultate werden mehr oder weniger genau ausfallen je nach der Grösse der Kraft und der Kürze der verfloßenen Zeit. Man kann sie auch als endliche Kräfte behandeln und die kleine Verrückung des Körpers während der kurzen Zeit der Wirkung der Kraft auffinden.

Die Grösse  $P$  kann man zum Mass der Kraft nehmen. *Eine Stosskraft wird durch die ganze in Folge des Stosses erzeugte Bewegungsgrösse gemessen.*

§ 84. Bei der Bestimmung der Wirkung einer Momentankraft auf einen Körper kann man die Wirkung aller endlichen zu derselben Zeit auf den Körper wirkenden Kräfte vernachlässigen.

Denn wirkt gleichzeitig mit einer Momentankraft eine endliche Kraft  $f$  auf einen Körper, so erhält man wie oben

$$v' - v = \frac{\int_0^T F dt}{m} + \frac{\int_0^T f dt}{m} = \frac{P}{m} + \frac{fT}{m}.$$

In der Grenze verschwindet aber  $fT$ . Ebenso kann die Kraft  $f$  aus der Gleichung für die Momente weggelassen werden.

§ 85. Aufstellung der allgemeinen Bewegungsgleichungen für ein System, auf welches eine beliebige Zahl von Momentankräften zugleich wirkt.

$u, v, w; u', v', w'$  seien die Geschwindigkeiten eines Punktes von der Masse  $m$  parallel zu den Axen genau vor und genau nach der Wirkung der Momentankräfte.  $X', Y', Z'$  seien die Componenten der Momentankraft am Punkt  $m$  parallel den Axen.

Nach der bisherigen Bezeichnungsweise erhält man die Gleichung

$$\Sigma m \frac{d^2 x}{dt^2} = \Sigma m X$$

und durch Integration

$$\Sigma m (u' - u) = \Sigma m \int_0^T X dt = \Sigma X' \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

und ebenso:

$$\Sigma m (v' - v) = \Sigma Y' \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2),$$

$$\Sigma m (w' - w) = \Sigma Z' \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3).$$

Integriert man ferner die Gleichung

$$\Sigma m \left( x \frac{d^2 y}{dt^2} - y \frac{d^2 x}{dt^2} \right) = \Sigma m (x Y' - y X'),$$

so erhält man

$$\Sigma m \left( x \frac{dy}{dt} - y \frac{dx}{dt} \right) = \Sigma m [x \int Y dt - y \int X dt],$$

wobei  $x, y$  als Constante zu betrachten sind, weil die Dauer  $T$  des Stosses so kurz ist, dass der Körper keine Zeit hat, sich zu bewegen (§ 83), d. h. also, man kann die Aenderungen von  $x$  und  $y$  während dieses Intervalls vernachlässigen. Nimmt man die Grenzen, so wird

$$\Sigma m [x(v' - v) - y(u' - u)] = \Sigma (x Y' - y X') \quad . \quad . \quad (4)$$

und ebenso

$$\Sigma m [y(w' - w) - z(v' - v)] = \Sigma (y Z' - z Y') \quad . \quad . \quad (5),$$

$$\Sigma m [z(u' - u) - x(w' - w)] = \Sigma (z X' - x Z') \quad . \quad . \quad (6).$$

Bezeichnung der Bewegungszustände *nach* der Wirkung der Stosskraft, während dieselben Buchstaben ohne Strich die entsprechenden Zustände *vor* dieser Wirkung bezeichnen sollen. Da die Aenderungen in der Richtung und Grösse der Geschwindigkeiten der verschiedenen Punkte der Körper die einzigen Gegenstände der Untersuchung sind, so sollen die Bewegungsgleichungen durch diese Geschwindigkeiten ausgedrückt werden.

§ 86. Bei der Anwendung des D'Alembert'schen Princip's auf die Momentankräfte ist nur die Art, wie die Effectivkräfte gemessen werden, zu ändern. Sind  $(u, v, w)$ ,  $(u', v', w')$  die Componenten der Geschwindigkeit eines Punktes gerade vor und gerade nach dem Stoss und ist  $m$  die Masse des Punktes, so werden die Effectivkräfte durch  $m(u' - u)$ ,  $m(v' - v)$ ,  $m(w' - w)$  gemessen. Die Grösse  $mf$  in § 67 ist als das Mass der Stosskraft anzusehen, welche, wenn der Punkt von dem Rest des Körpers getrennt wäre, diese Aenderungen der Bewegungsgrösse hervorbringen würde.

Wenden wir auf unsern Fall die Bezeichnung der §§ 73 und 74 an, so ist die Componente der Effectivkraft in der Richtung der  $z$ -Axe die Differenz der Werthe von  $\Sigma m dz/dt$  gerade vor und gerade nach dieser Wirkung der Stosskräfte und dies kommt der Differenz der Werthe von  $M d\bar{z}/dt$  in denselben Augenblicken gleich. Ebenso ist das Moment der Effectivkräfte bez. der  $z$ -Axe die Differenz der Werthe von

$$\Sigma m \left( x \frac{dy}{dt} - y \frac{dx}{dt} \right)$$

genau vor und genau nach der Wirkung der Stosskräfte.

Man kann daher den allgemeinen Satz in § 82 auf die Stosskräfte folgendermassen ausdehnen:

Sind  $(u, v, w)$ ,  $(u', v', w')$  die Componenten der Geschwindigkeit des Schwerpunkts eines starren Körpers von der Masse  $M$  gerade vor und gerade nach der Wirkung der Momentankräfte parallel zu irgend drei festliegenden rechtwinkligen Axen und  $(h_1, h_2, h_3)$ ,  $(h_1', h_2', h_3')$  die Momente der Bewegungsgrösse bez. des Schwerpunkts um drei rechtwinklige Axen, deren Richtung festliegt und die sich im Schwerpunkt schneiden und werden die Momente bez. gerade vor und nach dem Stoss genommen, so sind die Effectivkräfte des Körpers gleichwerthig mit den drei am Schwerpunkt parallel zu den rechtwinkligen Axen wirkenden Effectivkräften  $M(u' - u)$ ,  $M(v' - v)$ ,  $M(w' - w)$  zusammen mit den drei Effectivkräftepaaren  $(h_1' - h_1)$ ,  $(h_2' - h_2)$ ,  $(h_3' - h_3)$  um diese Axen.

Diese Effectivkräfte und Kräftepaare befinden sich, wenn man ihre Richtung im entgegengesetzten Sinn nimmt, im Gleichgewicht mit den gegebenen Kräften. Die Gleichgewichtsgleichungen lassen sich dann nach den Sätzen der Statik aufstellen.

§ 87. Beispiele. Beisp. 1. Zwei materielle in derselben Ebene sich bewegende Punkte werden in parallelen aber entgegengesetzten Richtungen fortgeschleudert mit Geschwindigkeiten, die ihrer Masse umgekehrt proportional sind. Man bestimme die Bewegung ihres Schwerpunkts.

Beisp. 2. Eine Person steht auf einem vollkommen glatten Tisch; man zeige, wie sie herunter kommen kann.

Beisp. 3. Man erkläre, wie eine auf einem Stuhl sitzende Person den Stuhl durch das Zimmer mittelst einer Reihe von Stößen zu bewegen vernag, ohne den Boden mit den Füßen zu berühren.

Beisp. 4. Es steht Jemand auf dem einen Ende eines vollständig rauhen Bretts, welches auf einem glatten Tisch liegt. Man bestimme, wenn er nach dem anderen Ende des Brettes geht, wie weit sich das Brett bewegen wird. Wenn er von dem Brett heruntertritt, wie lässt sich dann die noch folgende Bewegung des Brettes bestimmen?

Beisp. 5. Der Schwerpunkt einer aus einer Kanone geschossenen Bombe im leeren Raum bewegt sich längs einer Parabel und seine Bewegung wird durch das Platzen der Bombe nicht geändert.

Beisp. 6. Ein Stab drehe sich in einer horizontalen Ebene gleichmässig um einen seiner Endpunkte. Wenn er nun plötzlich entzwei bricht, wie bewegt sich jeder Theil?

Beisp. 7. Ein Würfel gleitet eine vollkommen glatte geneigte Ebene hinab, wobei vier seiner Kanten horizontal bleiben. Der Mittelpunkt der tiefsten Kante trifft auf ein kleines festes Hinderniss und ist gezwungen, stehen zu bleiben. Man bestimme, ob auch der Würfel stehen bleiben muss und zeige, dass die längs der Kante resultirende Stosskraft nicht längs der geneigten Ebene wirkt.

Beisp. 8. Zwei Personen A und B befinden sich auf einer vollkommen glatten horizontalen Ebene in dem Abstand  $a$  von einander. A wirft einen Ball nach B, welcher B nach einer Zeit  $t$  erreicht. Man zeige, dass A auf der Ebene mit der Geschwindigkeit  $\frac{ma}{Mt}$  zu gleiten anfängt, wenn  $M$  seine eigene Masse und  $m$  die des Balles ist. Ist die Ebene vollkommen rau, welcher Art sind in allgemeinen Ausdrücken die Druckkräfte zwischen A's Füßen und der Ebene, die ihn am Gleiten verhindert? Haben diese Druckkräfte eine einzelne Resultante?

Beisp. 9. Eine Kanone steht auf einer unvollkommenen rauhen horizontalen Ebene und wird mit einer solchen Ladung abgefeuert, dass die relative Geschwindigkeit der Kugel und Kanone in dem Augenblick, in dem die Kugel das Rohr verlässt,  $V$  ist.  $M$  sei die Masse der Kanone,  $m$  die der Kugel und  $\mu$  der Reibungscoefficient; man zeige, dass die Kanone die Strecke  $\left(\frac{mV}{M+m}\right)^2 \frac{1}{2\mu g}$  auf der Ebene zurückläuft.

Beisp. 10. Aus der Masse eines Würfels ist eine kugelförmige Aushöhlung vom Radius  $a$  derart herausgeschnitten, dass der Schwerpunkt der übrig bleibenden Masse in der durch den Mittelpunkt der Aushöhlung gehenden Verticalen liegt. Der cubische Körper ruht auf einer vollständig glatten horizontalen Ebene und das Innere der Aushöhlung ist vollständig rau. Eine Kugel von der Masse  $m$  und dem Radius  $b$  rollt an der Seite der Aushöhlung hinab und beginnt ihre Bewegung vom Zustand der Ruhe aus, in welchem sich ihr Mittelpunkt auf einer Höhe mit dem Centrum der Aushöhlung befindet. Man zeige, dass der cubische Körper, wenn die Kugel zum nächsten Mal zur Ruhe kommt, einen Weg  $\frac{2m(a-b)}{M+m}$  zurückgelegt hat, worin  $M$  die Masse des übrig bleibenden Theils des Würfels ist.

Würde das Resultat dasselbe sein, wenn die Aushöhlung glatt oder unvollkommen  
rauh wäre?

Beisp. 11. Zwei Eisenbahnlocomotiven, welche denselben Zug ziehen, sind durch eine lose Kette verbunden und gerathen mehrere Mal hintereinander in Collision mit einander. Die vordere Maschine ist oben etwas schwerer als unten und die Puffer sind bei beiden etwas tief angebracht. Man beobachtet, dass die Vorderräder der ersten Maschine auf und nieder springen. Welche dynamische Erklärung lässt sich für diese schwankende Bewegung geben? In welcher Höhe müssen die Puffer angebracht werden, damit sie vermieden wird? *Cambr. Trans.*, Vol. VII, 3, 1842; J. Power, *Disastrous effects of collision on railways*.

Beisp. 12. Sir C. Lyell erwähnt in seinem Bericht über das Erdbeben in Calabrien vom Jahr 1783 zwei Obeliskten, von denen jeder aus drei grossen lose aufeinander gelegten Steinen bestand. Nach dem Erdbeben fand man das Postament eines jeden Obeliskten auf seinem früheren Platz, die verschiedenen oberen Steine hatten sich aber zum Theil herumgedreht und waren um mehrere Zoll aus ihrer Lage verrückt, ohne herabzufallen. Es wurde daraus geschlossen, dass der Stoss, welcher den Bau erschütterte, eine horizontale und sich drehende Richtung gehabt habe. Man zeige, dass ein einfacher geradliniger Stoss eine solche Verschiebung hervorbringt, wenn die Resultante des Stosses auf jeden Stein nicht durch seinen Schwerpunkt geht.

Siehe Mallet's *Dynamics of earthquakes*. — Milne in seinen *Earthquakes* 1886, Seite 196 bespricht die letztere Erklärung und verweist auf einige ähnliche Fälle, die bei dem Erdbeben in Yokohama 1880 vorkamen.

---

### Kapitel III.

#### Bewegung um eine feste Axe.

§ 88. Die Fundamentalaufgabe. *Wenn sich ein starrer Körper frei um eine im Körper und im Raum festliegende Axe drehen kann, das Moment der Effectivkräfte um die Rotationsaxe zu finden.*

Die eine Bezugsebene sei irgend eine im Raum festliegende die Axe enthaltende Ebene und  $\theta$  sei der Winkel, den eine andre im Körper festliegende die Axe enthaltende Ebene mit ihr bildet.  $m$  sei die Masse eines Körperelements;  $r$  sein Abstand von der Axe und  $\varphi$  der Winkel, den die das Element  $m$  und die Axe enthaltende Ebene mit der Bezugsebene bildet.

Die Geschwindigkeit des Massenpunktes  $m$  ist  $r d\varphi/dt$  in einer Richtung, die senkrecht auf der durch die Axe und den Punkt gelegten Ebene steht. Das Moment der Bewegungsgrösse dieses Punktes um die Axe ist offenbar  $mr^2 d\varphi/dt$  und daher das Moment der Bewegungsgrössen aller Punkte  $\Sigma \left( mr^2 \frac{d\varphi}{dt} \right)$ . Da die Punkte des Körpers starr mit einander verbunden sind, so ist offenbar  $d\varphi/dt$  für jeden Punkt dasselbe und gleich  $d\theta/dt$ . Das Moment der Bewegungsgrössen aller Massenpunkte des Körpers ist mithin  $\Sigma mr^2 d\theta/dt$ , d. h. das Trägheitsmoment des Körpers für die Axe multiplicirt mit der Winkelgeschwindigkeit.

Die Beschleunigungen des Punktes  $m$  sind  $r d^2\varphi/dt^2$  und  $-r(d\varphi/dt)^2$  senkrecht zu  $r$  bez. in derselben Richtung, in welcher  $r$  gemessen wird; das Moment der bewegenden Kräfte von  $m$  um die Axe ist  $mr^2 d^2\varphi/dt^2$ ; das Moment der bewegenden Kräfte aller Punkte des Körpers bez. der Axe daher  $\Sigma (mr^2 d^2\varphi/dt^2)$ . Dieser Ausdruck ist aber aus demselben Grund wie vorher gleich  $\Sigma mr^2 d^2\theta/dt^2$ , d. h. gleich dem Trägheitsmoment des Körpers bez. der Axe multiplicirt mit der Winkelbeschleunigung.

§ 89. Die Bewegung eines Körpers um eine feste Axe unter der Einwirkung beliebiger Kräfte zu bestimmen.

Nach D'Alembert's Princip sind die Effectivkräfte im entgegengesetzten Sinn genommen mit den gegebenen Kräften im Gleichgewicht. Um die unbekannten Reactionen der Axe zu vermeiden, wollen wir die Momente um die Axe selbst nehmen.



*Erstens: Die Kräfte seien Momentankräfte.* Sind  $\omega$ ,  $\omega'$  die Winkelgeschwindigkeiten des Körpers grade vor und grade nach der Wirkung der Kräfte, so ist nach der Bezeichnung des vorigen Paragraphen

$$\omega \cdot \Sigma mr^2 - \omega' \cdot \Sigma mr^2 = L,$$

worin  $L$  das Moment der gegebenen Kräfte um die Axe bedeutet. Daraus folgt die Gleichung

$$\omega' - \omega = \frac{\text{Moment der Kräfte um die Axe}}{\text{Trägheitsmoment bez. der Axe}},$$

welche die durch die Wirkung der Kräfte erzeugte Aenderung in der Winkelgeschwindigkeit bestimmt.

*Zweitens: Die Kräfte seien endlich.* Nimmt man die Momente um die Axe, so erhält man

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} \cdot \Sigma mr^2 = L;$$

also 
$$\frac{d^2\theta}{dt^2} = \frac{\text{Moment der Kräfte um die Axe}}{\text{Trägheitsmoment bez. der Axe}}.$$

Aus dieser Gleichung erhält man durch Integration die Werthe von  $\theta$  und  $d\theta/dt$  für irgend eine Zeit. Bei der Lösung sind die beiden auftretenden Constanten durch die gegebenen Anfangswerthe von  $\theta$  und  $d\theta/dt$  zu bestimmen. Auf diese Art kann die ganze Bewegung gefunden werden.

§ 90. Daraus geht nun hervor, dass die Bewegung eines starren Körpers um eine feste Axe 1) von dem Moment der Kräfte um diese Axe und 2) von dem Trägheitsmoment des Körpers bez. der Axe abhängt. Ist  $Mk^2$  das Trägheitsmoment,  $k$  also der Trägheitsradius des Körpers, und wird die ganze Masse des Körpers in einen Punkt vereinigt und mit der festen Axe durch einen Stab ohne Trägheit verbunden, dessen Länge der Trägheitsradius  $k$  ist, und wirken auf dieses System Kräfte von demselben Moment wie vorher und wird das System mit denselben Anfangswerthen von  $\theta$  und  $d\theta/dt$  in Bewegung gesetzt, alsdann ist die ganze folgende Winkel- oder Kreisbewegung des Stabes dieselbe wie die des Körpers. *Man kann kurz sagen: Ein Körper, der sich um eine feste Axe dreht, ist dynamisch gegeben, wenn seine Masse und sein Trägheitsradius bekannt sind.*

§ 91. Beisp. *Ein vollkommen rauhes kreisförmiges horizontales Brett kann sich frei um eine durch seinen Mittelpunkt gehende verticale Axe bewegen. Ein Mann von gleichem Gewicht mit dem Brett tritt auf dasselbe und geht seinem Rand entlang. Welche Lage nimmt er im Raum ein, wenn er einen Rundgang vollendet hat?*

*a* sei der Radius des Bretts,  $Mk^2$  sein Trägheitsmoment bez. der verticalen Axe. Wenn nun  $\omega$  die Winkelgeschwindigkeit des Bretts,  $\omega'$  die des Mannes um die verticale Axe für eine gegebene Zeit sind und wenn  $F$  die zwischen den Füßen des Mannes und dem Brett wirkende Kraft bezeichnet, so ist die Bewegungsgleichung für das Brett nach § 88

$$Mk^2 \frac{d\omega}{dt} = -Fa \dots \dots \dots (1)$$

und die Bewegungsgleichung für den Mann nach § 78

$$Ma \frac{d\omega'}{dt} = F \dots \dots \dots (2).$$

Eliminirt man  $F$  und integrirt, so erhält man

$$k^2\omega + a^2\omega' = 0,$$

weil die Constante Null ist, da der Mann und das Brett vom Zustand der Ruhe ausgehen. Sind  $\theta$  und  $\theta'$  die von dem Brett und dem Mann um die verticale Axe beschriebenen Winkel, so ist  $\omega = d\theta/dt$ ,  $\omega' = d\theta'/dt$  und  $k^2\theta + a^2\theta' = 0$ .

Wird daher  $\theta' - \theta = 2\pi$  und  $k^2 = \frac{1}{2}a^2$ , so ist  $\theta' = \frac{2}{3}\pi$ . Dies ist der Winkel, den der Mann im Raum beschreibt. Geht der Mann mit der mittleren relativen Geschwindigkeit  $V$  an dem Rand des Brettes entlang, so ist  $\omega' - \omega = V/a$  und also  $\omega = -2V/3a$ , wodurch die mittlere Winkelgeschwindigkeit des Brettes gegeben ist.

§ 92. Das Pendel. *Ein Körper, auf welchen die Schwerkraft wirkt, bewegt sich nur um eine feste horizontale Axe; die Bewegung zu bestimmen.*

Legt man die durch die Axe gehende Verticalebene zu Grunde und nimmt als feste Ebene im Körper die Ebene, welche die Axe und den Schwerpunkt enthält, so ist die Bewegungsgleichung .

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} = \frac{\text{Moment der Kräfte}}{\text{Trägheitsmoment}} = -\frac{Mgh \sin \theta}{M(k^2 + h^2)} \dots \dots (1),$$

worin  $h$  den Abstand des Schwerpunkts von der Axe und  $Mk^2$  das Trägheitsmoment des Körpers für die durch seinen Schwerpunkt gehende und der festen Axe parallele Gerade bedeutet. Man erhält

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{gh}{k^2 + h^2} \sin \theta = 0 \dots \dots \dots (2).$$

Diese Gleichung lässt sich nicht so integriren, dass das Resultat aus einer endlichen Anzahl von Gliedern besteht; sind dagegen die Schwingungen klein, so kann man die dritten und höheren Potenzen von  $\theta$  vernachlässigen und erhält die Gleichung

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{gh}{k^2 + h^2} \theta = 0.$$

Die Zeitdauer einer vollständigen Schwingung ist daher  $2\pi \sqrt{\frac{k^2 + h^2}{gh}}$ . Wird  $h$  und  $k$  in Metern ausgedrückt und  $g = 9,81$  gesetzt, so liefert diese Formel die Zeit in Secunden.

Die Bewegungsgleichung für einen Punkt von beliebiger Masse, den man an einem Faden von der Länge  $l$  befestigt hat, ist

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{g}{l} \sin \theta = 0 \dots \dots \dots (3),$$

die man aus Gleichung (2) dadurch ableiten kann, dass man  $k = 0$ ,

$h = l$  setzt. Die Winkelbewegungen des Fadens und des Körpers sind daher bei denselben Anfangsbedingungen identisch, wenn

$$l = \frac{k^2 + h^2}{h} \cdot \dots \cdot \dots \cdot \dots \quad (4)$$

gesetzt wird.

Diese Länge heisst *die Länge des gleichwerthigen einfachen Pendels*.

Der Schwingungsmittelpunkt<sup>1)</sup>. Füllt man vom Schwerpunkt  $G$  des Körpers ein Loth auf die Rotationsaxe (Aufhängungsaxe), so heisst der Punkt  $C$ , in welchem das Loth diese Axe trifft, *der Aufhängungsmittelpunkt*. Verlängert man  $CG$  über  $G$  nach  $O$ , so dass  $CO = l$  wird, so heisst  $O$  *der Schwingungsmittelpunkt*. Wenn man die ganze Masse des Körpers (oder auch eine beliebige Masse) im Schwingungsmittelpunkt vereinigt und sie mittelst eines Fadens mit dem Aufhängungsmittelpunkt verbindet, so hat sie gleiche Winkelbewegung und Oscillationsdauer wie der Körper, wenn die Anfangszustände dieselben sind.

Der Gleichung (4) lässt sich eine andre Gestalt geben. Da  $CG = h$  und  $OG = l + h$  ist, so ergibt sich

$G(G' + G'')$	dem Quadrat des Trägheitsradius für $G$ ,
$G'(G' + G'')$	" " " " "
$G(G' - G'')$	" " " " "

Aus diesen Gleichungen folgt, wenn man  $O$  zum Aufhängungscentrum macht und die Aufhängungsaxe der Geraden, auf welche sich  $k$  bezieht, parallel laufen lässt, dass  $C'$  der Schwingungsmittelpunkt wird. *Das Schwingungs- und Aufhängungscentrum sind mithin vertauschbar und die durch diese Punkte bestimmten Schwingungszeiten dieselben.*

Ist die Oscillationsdauer gegeben, so ist  $l$  gegeben und die Gleichung (4) liefert zwei Werthe für  $h$ . Sind diese  $h_1, h_2$  und man beschreibt

1. Die Lage der Schwingungsmittelpunkte eines Körpers wurde zuerst von Huyghens in seinem im Jahr 1673 in Paris erschienenen der Theorie der Pendeln gewidmeten Werke *Horologium Oscillatorium* genau bestimmt. Die wichtigsten im Text gegebenen Sätze wurden von ihm entdeckt. Da D'Alembert's Princip damals nicht bekannt war, so musste Huyghens selbst einige Principien auffinden. Er ging von der Hypothese aus, dass der Schwerpunkt verschiedener Gewichte, welche durch die Schwerkraft in Bewegung gesetzt werden und durchaus beliebig aufeinander einwirken, nicht höher als bis zu dem Punkt steigen kann, von welchem er herabgefallen ist (§ 68). Huyghens meint, er nehme damit nur an, dass ein schwerer Körper sich nicht von selbst in die Höhe bewegen könne. Der nächste Schritt in der Beweisführung geschah durch den Satz, dass die Geschwindigkeiten der materiellen Punkte, wenn diese Punkte von einander getrennt und richtig geleitet werden, in jedem Augenblick derart sind, dass der Schwerpunkt in eine zweite Lage aufsteigt, welche *ebenso hoch* ist als die erste. Denn, lässt man die Punkte die letzte Lage verlassen, dieselbe Bahn rückwärts zurücklegen, und vereinigt sie dann wieder zu einem Pendel, so steigt der Schwerpunkt wieder zu seiner ersten Lage in die Höhe; wäre diese aber höher als die zweite, so würde man mit der Hypothese in Widerspruch gerathen. Dieses Princip liefert dieselbe Gleichung wie das moderne Princip der lebendigen Kraft. Der Rest seiner Ausführungen ist von keinem grossen Interesse.

zwei Cylinder mit der Geraden, auf welche der Trägheitsradius  $k$  sich bezieht, als Axe und  $h_1, h_2$  als Radien, so sind die Schwingungszeiten des Körpers um alle Erzeugungslinien dieser Cylinder dieselben und annähernd gleich  $2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$ .

Man beschreibe um dieselbe Axe einen dritten Cylinder, dessen Radius  $k$  ist. Weil nun  $l = 2k + \frac{(h-k)^2}{h}$  ist, so bleibt  $l$  immer grösser als  $2k$  und nimmt fortdauernd ab, solange  $h$  abnimmt und sich dem Werth  $k$  nähert. Die Länge des gleichwerthigen einfachen Pendels wird auf diese Art beständig kleiner, wenn sich die Aufhängungsaxe von aussen her dem Mantel dieses dritten Cylinders nähert. Wird die Aufhängungsaxe eine Erzeugungslinie des Cylinders, so ist die Länge des gleichwerthigen Pendels  $2k$ . Fällt die Aufhängungsaxe in das Innere des Cylinders und nähert sich dem Schwerpunkt, so nimmt die Länge des gleichwerthigen Pendels beständig zu, bis sie unendlich gross wird, wenn die Axe durch den Schwerpunkt selbst geht.

Die Schwingungsdauer ist daher am kürzesten, wenn die Axe eine Erzeugungslinie des Kreiscylinders vom Radius  $k$  ist. Die Zeit bez. der so gefundenen Axe ist jedoch kein absolutes Minimum; sie ist ein Minimum nur für die einer gegebenen Geraden im Körper parallelen Axe. Um die Axe zu finden, für welche die Zeit ein absolutes Minimum wird, muss man die Axe suchen, für die  $k$  ein Minimum ist. In § 23 ist nun bewiesen worden, dass die durch  $G$  gehende Axe, für welche das Trägheitsmoment den kleinsten oder grössten Werth hat, eine der Hauptaxen ist. Die Axe daher, für welche die Oscillationsdauer ein Minimum beträgt, läuft der durch  $G$  gehenden Hauptaxe parallel, für die das Trägheitsmoment am kleinsten ist. Wenn ferner  $Mk^2$  das Trägheitsmoment bez. dieser Axe bezeichnet, so befindet sich die Aufhängungsaxe in einem Abstand  $k$  von ihr, den man nach jeder beliebigen Richtung abmessen kann.

$$l = \frac{k^2 + h^2}{h}$$

§ 93. <sup>✓</sup> Beisp. 1. Man suche die Zeit einer kleinen Schwingung eines Würfels (1) wenn eine seiner Kanten, (2) wenn eine Diagonale einer Seitenfläche festliegt und die Axe in beiden Fällen horizontal ist. Man zeige, dass die Länge des einfachen gleichwerthigen Pendels im ersten Fall  $\frac{4}{3}\sqrt{2}a$ , im zweiten  $\frac{5}{3}a$  ist, worin  $2a$  die Länge der Kante des Würfels bedeutet.

Beisp. 2. <sup>✓</sup> Eine elliptische Lamelle ist der Art, dass der eine Parameter durch den Schwingungsmittelpunkt geht, wenn die Ellipse um den anderen Parameter als horizontale Axe schwingt; man beweise, dass die Excentricität  $\frac{1}{2}$  ist.

Beisp. 3. <sup>✓</sup> Ein Kreisbogen schwingt um eine durch seinen Mittelpunkt gehende auf seiner Ebene senkrechte Axe. Man beweise, dass die Länge des einfachen, gleichwerthigen Pendels von der Länge des Bogens unabhängig und dem doppelten Radius gleich ist.

Beisp. 4. <sup>✓</sup> Die Dichtigkeit eines Stabes variirt, wie der Abstand von dem einen Ende; man zeige, dass die auf ihm senkrechte Axe, für welche die Oscillationsdauer ein Minimum ist, den Stab in einem der beiden Punkte trifft, deren

versteht.

Beisp. 5. Man ermittle, welche Axe in der Fläche einer Ellipse festgelegt werden muss, damit die Dauer einer kleinen Schwingung ein Minimum sei. Man zeige, dass die Axe der grossen Axe parallel sein und die kleine Halbaxe halbiren muss.

Beisp. 6. Ein gleichförmiger Stock ist frei an dem einen Ende aufgehängt, während das andere sich dicht über dem Boden befindet. Dem Stock wird dann eine Winkelgeschwindigkeit in einer verticalen Ebene mitgetheilt und das Ende, an welchem er aufgehängt war, losgelassen, wenn er um einen Winkel von  $90^\circ$  gestiegen ist. Welche Anfangsgeschwindigkeit muss man ihm geben, wenn er beim Aufschlagen auf den Boden aufrecht stecken bleiben soll? Man zeige, dass die erforderliche Winkelgeschwindigkeit  $\omega$  durch  $\omega^2 = \frac{g}{2a} \left( 3 + \frac{p^2}{p+1} \right)$  gegeben ist, worin  $2p$  irgend ein ungradus Vielfache von  $\pi$  und  $2a$  die Länge des Stabes ist.

Beisp. 7. Zwei Körper können sich frei und unabhängig unter der Wirkung der Schwere um dieselbe horizontale Axe drehen; ihre Massen sind  $m, m'$ ; die Abstände ihrer Schwerpunkte von der Axe  $h, h'$  und die Längen ihrer einfachen gleichwerthigen Pendel  $L, L'$ . Man beweise, dass die Länge des gleichwerthigen Pendels, wenn sie in den Gleichgewichtslagen aneinander befestigt werden,  $\frac{mhL + m'h'L'}{mh + m'h}$  ist.

Die Länge dieses resultirenden gleichwerthigen Pendels liegt zwischen  $L$  und  $L'$ , falls  $h$  und  $h'$  dasselbe Vorzeichen haben.

Wenn ein schwerer Punkt  $m'$  an ein schwingendes Pendel befestigt wird, so folgt daraus, dass die Schwingungsperiode vergrössert oder vermindert wird, je nachdem der Befestigungspunkt von der Aufhängungsaxe weiter oder nicht so weit entfernt ist als das Schwingungscentrum.

Beisp. 8. Um eine Uhr, wie die grosse Westminsteruhr zu reguliren, ohne das Pendel anzuhalten, pflegt man auf eine an dem Pendel befestigte Schale ein kleines Gewicht hinzu zu legen oder wegzunehmen. Man zeige, dass die Schale in einem Abstand vom Aufhängungspunkt, welcher der halben Länge des einfachen gleichwerthigen Pendels gleichkommt, angebracht werden muss, wenn die gegebene Aenderung im Gang der Uhr durch die Zufügung eines möglichst kleinen Gewichts erreicht werden soll. Man zeige auch, dass ein kleiner Irrthum in der Lage der Schale auf die Schwere des erforderlichen Gewichts keinen Einfluss hat.

Beisp. 9. Ein kreisrunder Tisch vom Centrum  $O$  wird von drei Beinen  $AA', BB', CC'$  getragen, die auf einem vollkommen rauhen horizontalen Boden ruhen und ein schwerer Punkt  $P$  wird auf den Tisch gelegt. Plötzlich gibt ein Bein  $CC'$  nach; man zeige, dass der Tisch und der Punkt sich sofort trennen, wenn  $pc$  grösser als  $k^2$  ist, unter  $p$  und  $c$  die Abstände der Punkte  $P$  bez.  $O$  von der Linie  $AB$  verstanden, welche die oberen Enden der Beine verbindet, und unter  $k$  den Trägheitsradius des Tisches mit den noch übrigen Beinen für die Linie  $A'B'$ , welche die Fusspunkte der Beine verbindet.

Die Trennung erfolgt, wenn die Anfangsnormalbeschleunigung des Tisches bei  $P$  grösser als die des Punktes ist.

Beisp. 10. Ein nicht schwerer Faden wird um eine feste Ellipse gelegt, deren Ebene vertical ist, und die beiden Enden aneinander befestigt. Der Faden ist länger als der Umfang der Ellipse. Ein schwerer Punkt kann auf dem Faden frei gleiten und macht unter der Wirkung der Schwere kleine Schwingungen. Man beweise, dass das einfache gleichwerthige Pendel der Krümmungsradius der durch die Gleichgewichtslage des Punktes gehenden confocalen Ellipse ist.

§ 94. Die Einwirkung des Temperaturwechsels. Soll ein Pendel eine Uhr reguliren, so muss die Schwingungsdauer unveränderlich sein. Da alle Substanzen sich bei jedem Wechsel der Temperatur ausdehnen oder zusammenziehen, so ändert sich offenbar der Abstand des Schwerpunkts des Pendels von der Axe und das Trägheitsmoment für die beständig. Die Länge des einfachen gleichwerthigen Pendels hängt jedoch nicht von jedem dieser Elemente für sich genommen ab, sondern von ihrem Verhältniss zu einander. Können wir daher ein Pendel derart construiren, dass die Ausdehnung oder Zusammenziehung einer verschiedenen Theile dieses Verhältniss nicht ändert, so hat ein Temperaturwechsel keinen Einfluss mehr auf die Schwingungsdauer. Eine Beschreibung der verschiedenen Methoden, die zur Lösung dieser Aufgabe vorgeschlagen wurden, findet der Leser in jedem Buch über Uhren<sup>1)</sup>. Wir wollen hier der Erläuterung wegen nur eine einfache Construction angeben, welche viel gebraucht worden ist. Sie wurde von George Graham um das Jahr 1715 erfunden und von dem in Band 34 der *Phil. Trans.* 1726 (gedruckt 1728) beschrieben.

Eine schwere Flüssigkeit, wie z. B. Quecksilber, wird in einem nach unten Cylinder gegossen. Eben wird bemerkt, dass die Dichte der Flüssigkeit in Verbindungen mit dem Queck über eintritt, so dass die Dichte der Mischung nicht gross ist. Eine kleine Stange, deren oberes Ende mit einem Gewinde versehen ist, schraubt und auf die gewöhnliche Art an einem festen Punkt befestigt. Die abwärts gerichtete Ausdehnung der Flüssigkeit wird durch die Stange, die das Schwingungszentrum tiefer zu legen, während die nach oben gerichtete Ausdehnung des Queck über es zu erhöhen. Damit die Dichte der Mischung in der Bedingung die Lage des Schwingungszentrums nicht ändert, muss die Dichte der Mischung constant sein.

$Mk^2$  sei das Trägheitsmoment des Pendels um die Schwingungsaxe,  $c$  der Abstand ihrer gemeinsamen Schwerpunkte,  $l$  die Länge des Pendels vom Aufhängepunkt zum Schwingungszentrum,  $a$  der innere Radius des Cylinders,  $M$  die Masse des Quecksilbers,  $M_0$  die Masse, welche es im Cylinder einnimmt.

Das Trägheitsmoment des Quecksilbers um die Schwingungsaxe ist

$$\text{punkt senkrecht zu seiner Axe} = M_0 \left( \frac{k^2}{12} + \frac{a^2}{4} \right) + M \left( \frac{k^2}{12} + \frac{a^2}{4} \right)$$

Das Trägheitsmoment des ganzen Körpers um die Schwingungsaxe ist dann

$$M_0 \left[ \frac{k^2}{12} + \frac{a^2}{4} \right] + \left( \frac{k}{2} \right)^2 M + M_0 l^2$$

und das Moment der ganzen in einem schiefen Punkt ist dann  $M_0 l$ .

1) Reid's *on Clocks*; Denison's *lectures on Clocks*; *the Astronomer's Observatory*; *Weald's Series*, 1867; Captain Kater's *lectures on Measuring Instruments*; *Encyclopædia*, 1830. Von deutschen Büchern sind *Lehrbuch des Uhrmacherhandwerks* von H. Schmid, Wien, 1892; *Modernes Handbuch der Uhrmacherkunst* von K. Schmid, 1871; *Allg. Journ. für Uhrmacherkunst* (J. A. Schmid), 1871; *Compensation eines Secundenpendels für Temperaturänderungen* von A. Krüger, 1881; *Melde*, *Theorie und Praxis der astronomischen Zeitbestimmung*, 1876; *A. Krüger*, *Barometerecompensation am Pendel*, *Verh. Phys. Ges.*, 1880; *W. A. Nippoldt*, *Ein neues für Temperatur- und Luftdruckschwankungen compensirtes Pendel*, *Zeitschr. f. Instrumentenkunde*, 1889, p. 197.

$$Mn \left( l - \frac{h}{2} \right) + Mc.$$

Die Länge  $L$  des einfachen gleichwerthigen Pendels ist das Verhältniss dieser beiden Ausdrücke und reducirt

$$L = \frac{n \left( \frac{h^2}{3} - lh + l^2 + \frac{a^2}{4} \right) + k^2}{n \left( l - \frac{h}{2} \right) + c} \dots \dots \dots (1)$$

Die lineare Ausdehnung der Substanz, aus welcher der Stab und der Cylinder bestehen, sei  $\alpha$  und die des Quecksilbers  $\beta$  für jeden Grad des Thermometers. Wird das Fahrenheit'sche Thermometer benutzt, so ist nach Versuchen von Dulong und Petit  $\alpha = 0,000065668$ ,  $\beta = 0,0003336$ . Es sind daher  $\alpha$  und  $\beta$  so klein, dass man ihre Quadrate vernachlässigen kann. Bei der Berechnung der Höhe des Quecksilbers muss man berücksichtigen, dass der Cylinder sich auch nach der Seite ausdehnt, die bezügliche verticale Ausdehnung des Quecksilbers, also  $3\beta - 2\alpha$  ist, die wir mit  $\gamma$  bezeichnen wollen.

Wird nun die Temperatur eines jeden Theils um  $t^0$  erhöht, so vergrössern sich  $\alpha$ ,  $l$ ,  $k$ ,  $c$  im Verhältniss von  $1 + \alpha t : 1$ ,  $h$  dagegen im Verhältniss von  $1 + \gamma t : 1$ . Da  $L$  unverändert bleiben soll, so ist

$$\left( \frac{\partial L}{\partial a} a + \frac{\partial L}{\partial l} l + \frac{\partial L}{\partial k} k + \frac{\partial L}{\partial c} c \right) \alpha + \frac{\partial L}{\partial h} h \gamma = 0.$$

$L$  ist aber eine homogene Function erster Dimension, also

$$\frac{\partial L}{\partial a} a + \frac{\partial L}{\partial l} l + \frac{\partial L}{\partial k} k + \frac{\partial L}{\partial c} c + \frac{\partial L}{\partial h} h = L.$$

Durch Substitution erhält man daher die Bedingung

$$\frac{\alpha}{\alpha - \gamma} = \frac{h}{L} \frac{\partial L}{\partial h}.$$

Bedeuteten nun  $A$ ,  $B$  den Zähler und Nenner des Ausdrucks für  $L$  in Gleichung (1), so erhält man durch Differentiation, nachdem man rechts und links den natürlichen Logarithmus genommen hat,

$$\frac{1}{L} \frac{\partial L}{\partial h} = \frac{n \left( \frac{2}{3} h - l \right)}{A} + \frac{\frac{1}{2} n}{B} = \frac{n}{B} \left( \frac{\frac{2}{3} h - l}{L} + \frac{1}{2} \right).$$

Die gesuchte Bedingung ist mithin

$$\frac{\alpha}{3(\beta - \alpha)} = \frac{h}{l - \frac{h}{2} + \frac{c}{n}} \cdot \left( \frac{l - \frac{2}{3} h}{L} - \frac{1}{2} \right) \dots \dots \dots (2)$$

Diese Rechnung hat mehr theoretischen als praktischen Werth, weil die Zahlenwerthe von  $\alpha$  und  $\beta$  zum guten Theil von der Reinheit der Metalle und der Art, in welcher sie hergestellt wurden, abhängen. Man muss daher schliesslich zum Probiren seine Zuflucht nehmen. Wird der Gang der Uhr durch einen Temperaturwechsel alterirt, so ändert man die Masse des Quecksilbers im Cylinder um ein Geringes, bis sich durch weitere Versuche herausstellt, dass die Ausgleichung genügend ist.

Bei dieser Untersuchung haben wir  $\alpha$  und  $\beta$  als absolut constant vorausgesetzt, dies ist jedoch nur sehr annähernd richtig. Ein Temperaturwechsel von  $45^0 \text{ C}$  würde  $\beta$  um nicht ganz  $\frac{1}{50}$  seines Werthes ändern.

Hat man diese Berichtigungen gemacht, so ist die Compensation auch in einem andern Grund nicht genau richtig, weil nämlich vorausgesetzt wurde, dass eiserne Cylinder und das Quecksilber hätten dieselbe Temperatur. Die verschiedenen Materialien aber, aus denen das Pendel besteht, absorbiren die Wärme in verschiedener Geschwindigkeit; während sich daher die Temperatur ändert, wird der Gang der Uhr noch einen kleinen Fehler aufweisen.

Die ganze Länge eines Sekundenpendels der 1. Art betragt ungefähr 1117 mm (44 engl. Zoll), dessen Ausdehnung und Zusammenziehung durch eine Quecksilbersäule in dem Cylinder von etwa 178 mm 7 engl. Zoll Länge compensirt wird. Der Radius des Cylinders ist gewöhnlich etwa 25 mm 1 engl. Zoll lang. Das Gewicht des Quecksilbers beträgt dann  $1\frac{1}{2} - 5\frac{1}{2}$  Kilogramme und das Gesamtgewicht mit Einschluss des Cylinders, der Stange und des Gewichtes etwa 6,5 Kilogramm.

Beisp. Als erste Annäherung betrachte man das Quecksilber als das Gewicht, während der Cylinder und die Stange nur so viel Masse besitzen sollte, dass sie das Quecksilber tragen können. Wir setzen ferner an,  $h$  und  $u$  seien soviel kleiner als  $L$ , dass wir ihre Quadrate im Verhältniss zu  $L$  vernachlässigen können. Man beweise, dass man an Gleichung (1) setzt:  $L = l - \frac{1}{2}k$  und an Gleichung (2)  $h = \frac{1}{2}L$ .

§ 95. Der Auftrieb der Luft. Eine weitere Ursache der Fehlbewertung der Pendeluhr liegt im dem Auftrieb der Luft. *Es ist eine allgemeine Eigenschaft, an der Schwerpunkt des Volumens der Pendelmasse genau denselben Punkt, an dem die verdrängten Luft gleichkommt.* Eine ähnliche Eigenschaft der Körperausdehnung suchung in § 92 setzt uns in den Stand, die in Rechnung zu ziehen.  $V$  sei das Volumen des Pendels;  $D$  die Dichtigkeit der Luft;  $k_1, k_2, \dots$  die Schwerpunkte der Masse bez. des Volumens von der Aufhängungsaxe.  $Ml^2$  das Trägheitsmoment der Masse um die Aufhängungsaxe. Ferner setzen wir voraus, dass das Pendel bei jeder Ebene symmetrisch, wodurch die Masse ausserdem die beiden Schwerpunkte enthält.

Die Bewegungsgleichung ist dann

$$Ml^2 \frac{d^2\theta}{dt^2} = -Mgh_1 \sin\theta + V D (h_2 - h_1) \sin\theta$$

Daraus folgt mit der ersten Annäherung, dass das Pendel ein äusserst werthiges Pendel ist,

$$\frac{k^2}{l} = h_1 - h_2 + \frac{V D}{M} \quad (3)$$

Die Leichtigkeit der Luft ist nun so klein, dass man sich auf die ersten Glieder beschränken welche durch den Höhenunterschied  $h_1 - h_2$  bedingt sind.  $h_1$  ist der Werth der rechten Seite der Gleichung (3) wenn  $h_2 = 0$  ist, d. h.  $h_1 = D$ . Wenn man an, die that sächliche Dichtigkeit der Luft  $\frac{1}{2} D$  zu setzen, so erhält man die Länge des Sekundenpendels, so wie man sie gewöhnlich findet,  $l = \frac{g}{4\pi^2} \frac{M}{M + \frac{1}{2}M}$ .

und mithin  $\frac{\delta l}{l} = \frac{h_2 + \frac{1}{2} V D \delta D}{h_1 + M + D}$ .

Diese Formel liefert in jedem Fall die Annäherung der Länge des äusserst werthigen Pendels, welche ein Wechsel in der Dichtigkeit der Luft  $\delta D$  bedingt.

§ 96. Bei p. 1. Wenn die Schwerpunkte der Masse und des Volumens nicht zusammenfallen und das Gewicht der verdrängten Luft  $\frac{1}{2} M$  der Gewicht der Pendelmasse beträgt, zu zeigen, dass ein Steigen der Barometer den Gang des Sekundenpendels um etwa einen Fünftel seines perpendicularen Fehlers



Hat man diese Berichtigungen gemacht, so ist die Compensation auch auf einem andern Grund nicht genau richtig, weil nämlich vorausgesetzt wurde, dass der eiserne Cylinder und das Quecksilber hätten dieselbe Temperatur. Die verschiedenen Materialien aber, aus denen das Pendel besteht, absorbiren die Wärme in verschiedener Geschwindigkeit; während sich daher die Temperatur ändert, wird der Gang der Uhr noch einen kleinen Fehler aufweisen.

Die ganze Länge eines Sekundenpendels dieser Art beträgt ungefähr 1117 mm (44 engl. Zoll), dessen Ausdehnung und Zusammenziehung durch eine Quecksilbersäule in dem Cylinder von etwa 178 mm (7 engl. Zoll) Länge corrigirt wird. Der Radius des Cylinders ist gewöhnlich etwa 25 mm (1 engl. Zoll) lang. Das Gewicht des Quecksilbers beträgt dann  $4\frac{1}{2} - 5\frac{1}{2}$  Kilogramm und das Gesamtgewicht mit Einschluss des Cylinders, der Stange und des Gehäuses etwa 6,3 Kilogramm.

Beisp. Als erste Annäherung betrachte man das Quecksilber als das Gewicht, während der Cylinder und die Stange nur so viel Masse besitzen sollen, dass sie das Quecksilber tragen können. Wir nehmen ferner an,  $h$  und  $a$  seien soviel kleiner als  $L$ , dass wir ihre Quadrate im Verhältniss zu  $L$  vernachlässigen können. Man beweise, dass man aus Gleichung (1) erhält:  $L = l - \frac{1}{2} h$  und aus Gleichung (2)  $h = \frac{1}{2} L$ .

§ 95. Der Auftrieb der Luft. Eine weitere Ursache zu Fehlern bei der Pendeluhr liegt in dem Auftrieb der Luft. *Er ist eine aufwärts gerichtete, an dem Schwerpunkt des Volumens des Pendels angreifende Kraft, die dem Gewicht der verdrängten Luft gleichkommt.* Eine sehr geringe Aenderung der Fundamentaluntersuchung in § 92 setzt uns in den Stand, sie in Rechnung zu ziehen.  $V$  sei das Volumen des Pendels;  $D$  die Dichtigkeit der Luft;  $h_1, h_2$  die Abstände der Schwerpunkte der Masse bez. des Volumens von der Aufhängungsaxe;  $Mh^2$  das Trägheitsmoment der Masse für die Aufhängungsaxe. Ferner wollen wir annehmen, das Pendel sei bez. einer Ebene symmetrisch, welche die Axe und jeden der beiden Schwerpunkte enthält.

Die Bewegungsgleichung ist dann

$$Mh^2 \frac{d^2\theta}{dt^2} = -Mgh_1 \sin\theta + VDgh_2 \sin\theta. \quad (1)$$

Daraus folgt auf dieselbe Art wie früher, wenn  $l$  die Länge des gleichwerthigen Pendels ist,

$$\frac{k^2}{l} = h_1 - h_2 \frac{VD}{M}. \quad (2)$$

Die Dichtigkeit der Luft ist nun beständigen Aenderungen unterworfen, welche durch den Höhenstand des Barometers angezeigt werden. Es sei  $h$  der Werth der rechten Seite der Gleichung für eine normale Dichtigkeit  $D$ . Nimmt man an, die thatsächliche Dichtigkeit wäre  $D + \delta D$  und  $l + \delta l$  die entsprechende Länge des Sekundenpendels, so erhält man durch Differentiation  $\frac{k^2 \delta l}{l^2} = h_2 \frac{V \delta D}{M}$  und mithin  $\frac{\delta l}{l} = \frac{h_2}{h} \frac{VD}{M} \frac{\delta D}{D}$ .

Diese Formel liefert in passender Form die Aenderung der Länge des gleichwerthigen Pendels, welche ein Wechsel in der Dichtigkeit der Luft zur Folge hat.

§ 96. Beisp. 1. Wenn die Schwerpunkte der Masse und des Volumens nahezu zusammenfallen und das Gewicht der verdrängten Luft  $\frac{1}{7200}$  des Gewichts des Pendels beträgt, zu zeigen, dass ein Steigen des Barometers um 25 mm einen Fehler im Gang des Sekundenpendels von etwa einer Fünftelsekunde pro Tag zur Folge hat,

Dieses Beispiel setzt uns in den Stand, die Einwirkung des Steigens des Barometers auf den Gang eines eisernen Pendels ungefähr abzuschätzen.

Beisp. 2. Man zeige, dass das von der Dichtigkeit der Luft abhängige Steigen oder Fallen des Quecksilbers eines am Pendel angebrachten Barometers dazu benutzt werden kann, die Oscillationsdauer unverändert zu erhalten. Diese Methode wurde zuerst von Dr. Robinson in Armagh 1831 im 5. Band der Memoiren der *Astronomical Society* und später von Denison in den *Astronomical notices*, Jan. 1873, vorgeschlagen. In den 1859 erschienenen *Armagh Places of Stars* beschreibt Dr. Robinson die Schwierigkeiten, mit denen er bei der Ausföhrung zu kämpfen hatte, ehe er mit dem Gang der Uhr zufrieden war.

Der Quecksilbercylinder in Graham's Quecksilberpendel kann, wie Denison bemerkt, als Gefäss für das Barometer benutzt werden.

Die der Construction zu Grunde liegende Theorie beruht darauf, dass man, bei der Differentiation der Gleichung (2),  $k^2$  etc. als variabel,  $l$  dagegen als constant annimmt.

Professor Rankine machte in einem in der *British Association*, 1853 gehaltenen Vortrag von einer Uhr mit einem centrifugalen oder rotirenden Pendel Mittheilung, von dem ein Theil aus einem Heberbarometer bestehen sollte. Das Steigen und Fallen des Barometers würde das Tempo des Ganges der Uhr derart regeln, dass die mittlere Höhe der Quecksilbersäule während einer langen Zeit sich selbst registriren würde.

Beisp. 3. Nimmt man an, das Pendel schleppe eine Quantität Luft mit sich, welche in constantem Verhältniss zur Dichtigkeit  $D$  der umgebenden Luft steht und fügt  $\gamma D$  dem Trägheitsmoment des Pendels hinzu, ohne die bewegende Kraft zu vergrössern, zu beweisen, dass die Veränderung des gleichwerthigen einfachen Pendels, welche durch eine Veränderung der Dichtigkeit  $\delta D$  hervorgerufen wird,

$$\delta l = \gamma \frac{\delta D}{Mh_1} \text{ ist. (S. § 105.)}$$

§ 97. Durch Versuche ermittelte Trägheitsmomente. Bei vielen experimentellen Untersuchungen hat man das Trägheitsmoment des Körpers, mit dem das Experiment gemacht wird, für irgend eine Axe nöthig. Hat der Körper eine regelmässige Gestalt und ist er homogen oder sind die bei dieser Annahme gemachten Fehler so gering, dass man sie vernachlässigen kann, so lässt sich das Trägheitsmoment durch Rechnung bestimmen. Dies ist aber manchmal nicht der Fall. Können wir nun den Körper unter dem Einfluss der Schwere um irgend eine Gerade, welche der gegebenen, in horizontale Lage gebrachten, Axe parallel ist, schwingen lassen, so lässt sich mittelst der Gleichung (4), § 92 der Trägheitsradius für eine parallele durch den Schwerpunkt gehende Axe bestimmen. Dazu ist aber erforderlich, dass die Abstände des Schwerpunkts von den Axen sehr genau ermittelt werden. Manchmal ist es vortheilhafter, den Körper an einem Pendel von bekannter Masse zu befestigen, dessen Trägheitsradius bez. einer festen horizontalen Axe vorher durch Beobachtung der Oscillationsdauer ermittelt worden ist. Durch eine erneute Bestimmung der Oscillationsdauer kann man dann das Trägheitsmoment des zusammengesetzten Körpers und damit auch des gegebenen finden, wenn die Massen bekannt sind.

Ist der Körper eine Lamelle, so lassen sich auf diese Art die Trägheitsradien für drei durch den Schwerpunkt gehende Axen ermitteln. Misst man dann längs dieser Axen drei Längen ab, die die Trägheitsradien umgekehrt proportional sind, so erhält man drei Punkte, die auf einer Centralträgheitsellipse liegen. Die Ellipse lässt sich nun leicht construiren. Die Richtungen ihrer Hauptdiameter sind die Hauptaxen und die reciproken Werthe ihrer Längen stellen nach demselben Massstab, wie zuvor, die Hauptträgheitsradien dar.

Ist es ein räumlicher Körper, so bestimmen sechs beobachtete Trägheitsradien die Hauptaxen und Trägheitsmomente für den Schwerpunkt. Meistens wird jedoch durch besondere Umstände des speciellen Problems das Verfahren vereinfacht werden.

Das folgende Beispiel erläutert den Gebrauch der Methode der Bestimmung oder Elimination der unbekannten Trägheitsmomente, welche bei gewissen experimentellen Untersuchungen vorkommen. Weitere Beispiele findet man in den §§ 99, 122, etc.

Beisp. Ein symmetrischer Magnet kann sich frei um eine verticale Axe drehen, die durch seinen Mittelpunkt geht und die Wirkung des Erdmagnetismus wird durch ein Paar dargestellt, dessen Moment  $F \sin \theta$  ist, wenn  $\theta$  den Winkel bezeichnet, den die Axe des Magnets mit dem Meridian macht. Die beiden Enden des Magnets können nach Belieben mit zwei gleichen, kugelförmigen Metallgewichten beladen werden, die mittelst scharfer Spitzen derart auf dem Magneten ruhen, dass sie an der Rotationsbewegung des Magnets keinen Antheil nehmen. Wenn  $I$  das Trägheitsmoment des Magnets,  $\mu$  die Masse einer jeden der beiden Kugeln,  $2c$  der Abstand ihrer Mittelpunkte ist, zu beweisen, dass die Schwingungszeiten ohne und mit den Kugeln

$$T = 2\pi \left\{ \frac{I}{F} \right\}^{\frac{1}{2}} \quad \text{bez.} \quad T' = 2\pi \left\{ \frac{I + 2\mu c^2}{F} \right\}^{\frac{1}{2}}$$

sind, woraus  $I$  und  $F$  sich finden lassen, wenn  $T$  und  $T'$  beobachtet wurden. Wenn die Kugeln mit dem Magnet fest verbunden werden, so muss man  $2\mu c^2$  um  $\frac{2}{5}\mu e^2$  vermehren, worin  $e$  der Radius ist (siehe § 148). In diesem Fall muss  $e$  so gut wie  $c$  gemessen werden; jedoch wird der in Folge der Reibung am Befestigungspunkt entstehende Fehler vermieden. Man schreibt diese Art den Werth von  $F$  zu finden in der Regel Weber zu. Siehe Taylor's *translations of foreign scientific memoirs* und Airy's *magnetism*, übersetzt von F. Tietjen: Ueber den Magnetismus, Berl., 1871. Die Methode rührt von Gauss her; *Intensitas magneticae* etc.; auch in Ostwald's Klassikern erschienen (1853).

§ 98. Die Länge des Secundenpendels. Die Schwingungen eines starren Körpers kann man dazu benutzen, den Zahlenwerth der beschleunigenden Kraft der Schwere zu bestimmen.  $T$  sei die halbe Dauer einer kleinen Oscillation eines Körpers im luftleeren Raum um eine horizontale Axe,  $h$  der Abstand des Schwerpunkts von der Axe,  $k$  der Trägheitsradius für eine parallele durch den Schwerpunkt gehende Axe. Dann ist nach § 92

$$k^2 + h^2 = \lambda h T^2 \dots \dots \dots (1)$$

wenn  $\lambda = \frac{g}{\pi^2}$ , also die Länge des einfachen Pendels ist, dessen vollständige Schwingungsdauer zwei Secunden beträgt.

Wir können diese Formel auf einen regelmässigen Körper anwenden, für den  $k$  und  $h$  sich durch Rechnung ermitteln lassen. Man hat auf diese Art Experimente mit einer parallelepipedischen Stange gemacht, die wie ein Draht in die Länge gezogen war und an einem Ende aufgehängt wurde.  $\frac{k^2}{h}$ , d. h. also die Länge des gleichwerthigen einfachen Pendels, ist in diesem Fall, wie man sich leicht überzeugt, zwei Drittel der Länge des Stabes. Aus der vorstehenden Formel ergibt sich dann  $\lambda$  oder  $g$ , sobald man die Oscillationsdauer beobachtet hat. Dadurch, dass man den Stab umdreht und das Mittel aus den Ergebnissen in den beiden Lagen nimmt, kann man einen aus dem Mangel an Gleichförmigkeit der Dichtigkeit oder der Figur entstehenden Fehler wenigstens theilweise corrigiren. Es hat sich jedoch als unmöglich gezeigt, einen so gleichförmigen Stab zu beschaffen, dass die Resultate übereingestimmt hätten.

§ 20. Lassen wir einen Körper nacheinander um zwei parallele Axen schwingen, welche verschiedenen Abstand vom Schwerpunkt haben, so erhalten wir zwei Gleichungen von der Art wie (1)

$$\begin{aligned} k^2 + h^2 - \lambda h T^2 &= 0 \\ k^2 + h'^2 - \lambda h' T'^2 &= 0 \end{aligned} \quad (2).$$

Aus ihnen lässt sich nun  $T$  eliminiren, so dass

$$\frac{k^2 + h^2}{h T^2} = \frac{k'^2 + h'^2}{h' T'^2} \quad (3).$$

Die Gleichung liefert  $\lambda$ . Da  $k^2$  verschwunden ist, so hat die Gestalt und Structur des Körpers keinen Einfluss mehr. Man bringt in dem Körper zwei Oefnungen an, in welchen Schneiden befestigt werden, und gibt diesen Oefnungen eine dreieckige Gestalt, um Gleiten zu verhindern. Den Körper, der auf der einen Schneide ruht, lässt man dann kleine Schwingungen machen. Die senkrechten Abstände  $h, h'$  des Schwerpunkts von den Axen oder Schneiden müssen mit grosser Sorgfalt gemessen werden. Die Formel gibt dann  $\lambda$ .

Das einfache Pendel heisst ein *Reversionspendel* und wurde zuerst durch Beobachtungen und später unabhängig von ihm durch Kater erfunden.

§ 21. Der Capt. Kater's Methode (*Phil. Trans.* 1818) ist der Körper, dessen gleichförmiges Gewicht in der Gestalt eines Ringes versehen, der mittelst einer Schraube auf- und abbewegt werden kann. Der Körper selbst hat die Form einer Stange und die Oefnungen sind so eingerichtet, dass der Schwerpunkt zwischen ihnen liegt. Das Ringgewicht wird nur so lange bewegt, bis die beiden Oscillationszeiten genau gleich sind. Die Gleichung (3) zur Bestimmung von  $\lambda$  erhält dann die Gestalt



drei Reihen von Messungen differirten weniger als den vierhundertsten Theil eines Millimeters voneinander, während der zu messende Abstand etwa einen Meter betrug.

§ 103. Die Dauer einer einzelnen Schwingung kann man nicht direct beobachten, weil man dann einen Theil einer Zeitsecunde, wie sie die Uhr zeigt, mit dem Auge oder Ohr abschätzen müsste. Die Schwierigkeit beseitigt man dadurch, dass man die Zeit von, man sage, tausend Oscillationen beobachtet, wodurch der für die Zeit einer einzelnen Schwingung begangene Fehler durch tausend dividirt wird. Die Arbeit, so viel zählen zu müssen, kann man sich durch die Anwendung der von Mairan erfundenen und von Borda vervollständigten „Methode der Coincidenzen“ ersparen. Das Pendel wird einem Uhrpendel gegenübergestellt, dessen Schwingungsdauer nur sehr wenig von der eingeregten verschieden ist. Man bringt auf den beiden Pendeln Zeichen an, die man durch ein Telescop an dem tiefsten Punkt ihrer Schwingung begeben beobachtet. Das Gesichtsfeld wird durch einen Spalt auf eine enge Öffnung beschränkt, durch welche man die Zeichen bei ihrem Durchgange beobachtet. Bei jeder folgenden Oscillation rückt das eine Pendel dem andern näher, bis sein Zeichen sich zuletzt mit dem andern während der Durchgangs durch das Gesichtsfeld des Telescop's vollends deckt. Nach einigen Schwingungen erscheint es wieder und ist dem andern vom. In der Zwischenzeit zwischen dem einen Verschwinden bis zum nächsten hat das eine Pendel so nahe wie möglich eine halbe Schwingung mehr gemacht, wie das andere. Wir machen daher die Anzahl der Schwingungen, welche einen der Pendel in des eine Zeitraum macht, zählen. Beim Beginn des Zählens möge das eine Pendel, so genau, wie wir es nur zu beurtheilen vermögen, mit dem andern abgedeckt. Nehmen wir an, nach  $n$  halben Schwingungen des Uhrpendel's die Coincidenz der Zeichen noch nicht ganz eingetreten, nach  $n + 1$  halben Schwingungen dagegen schon eingetreten. Ist das Uhrpendel länger als das andere, so nach der letzten  $n + 1$  oder  $n + 3$  halbe Schwingungen in dem Zeitintervall eingetreten. Die Zeit einer halben Schwingung des Pendels liegt daher zwischen den Brächen  $\frac{1}{n+1}$  und  $\frac{1}{n+3}$  der Oscillationsdauer des Uhrpendel's. Nimmt man eine dieser Annäherungen als die wirkliche Dauer einer halben Schwingung des Pendels an, so ist der Fehler kleiner als  $\frac{1}{2(n+1)(n+3)}$  der Zeit einer halben Schwingung des Uhrpendel's. Der Fehler verhält mithin nahezu umgekehrt wie das Quadrat der Anzahl der Schwingungen zwischen zwei Coincidenzen der Pendel. Aus dieser Annahme ergiebt sich, dass 1630 halbe Schwingungen eines Uhrpendel's, von denen jede eine Secunde dauerte, 1632 solchen Schwingungen vom Captain Kater's Pendel entsprachen. Der Fehler, den

man bei dieser Annäherung begeht, ist so klein, dass er in 24 Stunden erst auf etwa  $\frac{3}{5}$  Secunden anwächst. Das Verhältniss der Oscillationsdauer des Pendels und des Uhrpendels lässt sich derart mit äusserster Genauigkeit berechnen. In welchem Tempo die Uhr geht, muss man dann astronomisch bestimmen.

Man beachte die Aehnlichkeit zwischen diesem Verfahren und dem Gebrauch des *Nonius* bei der Vergleichung der Längen. Selbstverständlich sind sie verschieden, weil der *Nonius* auf den Raum angewendet wird und wir es hier mit der Zeit zu thun haben; das allgemeine Princip aber ist dasselbe.

§ 104. Die so gefundene Schwingungszeit erfordert noch mehrere Berichtigungen (*Reductionen*). Ist z. B. die Oscillation nicht so klein, dass man in § 92  $\sin \theta = \theta$  setzen kann, so muss man eine Reduction auf unendlich kleine Bogen machen. Wie dies im Allgemeinen auszuführen ist, wird in dem Kapitel über unendlich kleine Schwingungen erörtert werden. Eine andere Reduction wird erforderlich, wenn das Resultat auf dasjenige, welches es auf dem Niveau des Meeres gewesen wäre, gebracht werden soll. Der Anziehungskraft des dazwischenliegenden Landes lässt sich nach Dr. Young's Regel (*Phil. Trans.* 1819) Rechnung tragen. Man erhält so die Schwerkraft auf dem Niveau des Meeresspiegels, indem man annimmt, alles Land über dieser Höhe wäre weggeschnitten und das Meer gezwungen, seine gegenwärtige Höhenlage beizubehalten. Da diese Lage durch die Anziehung des Landes verändert wird, so sind noch weitere Correctionen nöthig, wenn wir das Resultat auf die Oberfläche des Rotationsellipsoids reduciren wollen, welches der Gestalt der Erde am nächsten kommt. Siehe *Cambr. Phil. Trans.* Vol. VIII. *On the variation of gravity at the surface of earth* von Sir G. Stokes, 1849.

Baily gibt die Länge des Pendels, dessen halbe Oscillationszeit eine mittlere Sonnensekunde dauert, in der freien Luft in der Breite von London zu 993,97 mm und eines ebensolchen für Sternsecunden zu 988,55 mm an.

§ 105. *Correction für den Widerstand der Luft.* Die Beobachtungen müssen in der Luft gemacht werden und sind daher, um die volle Kraft der Schwere zu ermitteln, auf einen luftleeren Raum zu reduciren. Diese Reduction besteht aus drei Theilen: (1) der Berichtigung für den Auftrieb der Luft, (2) Du Buat's Correction für die von dem Pendel mitgerissene Luft, (3) dem Widerstand der Luft.

$V$  sei das Volumen des Pendels, welches sich durch Abmessen der Dimensionen des Körpers ermitteln lässt. Da die „Reduction auf den luftleeren Raum“ nur eine Correction ist, so haben kleine unvermeidliche Fehler beim Messen nur die Wirkung kleiner Grössen zweiter Ordnung auf den Werth von  $\lambda$ .  $\rho$  sei die Dichtigkeit der Luft, wenn das Pendel um die eine Schneide schwingt,  $\rho'$  die Dichtigkeit für das Schwingen um die andere Schneide. Dauert die Beobachtung nicht länger als eine oder zwei Stunden, so kann man  $\rho = \rho'$  setzen. Die Wirkung des Auf-

triebs der Luft wird dadurch berücksichtigt, dass man annimmt, eine Kraft  $\lambda$  wirke am Schwerpunkt des Volumens des Körpers aufwärts. Ist der Körper bez. der beiden Schneiden so genau wie es nur möglich ist, symmetrisch gearbeitet, so liegt dieser Schwerpunkt in der Mitte zwischen den beiden Schneiden. Vergl. § 95.

Du Buat entdeckte durch Experimente, dass ein Pendel eine gewisse Masse Luft mit sich hin und her schleppt, welche seine Trägheit vergrössert, ohne die bewegende Kraft der Schwere zu erhöhen. Es ist dies von Bessel und Stokes bestätigt worden. Die mitgeschleppte Luft steht zu der durch den Körper verdrängten Luftmasse in einem Verhältniss, welches von der äusseren Gestalt des Körpers abhängt. Wir wollen es durch  $\mu V \varrho$  darstellen. Ist der Körper bezüglich der Schneiden symmetrisch, so dass seine äussere Gestalt für jede der beiden Schneiden als Aufhängungsaxe dieselbe bleibt, so ist  $\mu$  für jede Art der Schwingungen das gleiche. Ist  $k'$  der Trägheitsradius der mitgeschleppten Luft für eine der beiden Aufhängungsaxen und  $m$  die Masse des Pendels, so muss zu dem  $k^2$  in Gleichung (1), § 92 und daher auch in § 98 das Glied  $\mu V \varrho k'^2/m$  hinzugefügt werden.

Zieht man diese beiden Correctionen in Rechnung, so wird Gleichung (1) in § 98

$$k^2 + k^2 + \frac{\mu V \varrho k'^2}{m} = \lambda T^2 \left( h - \frac{V \varrho}{m} \frac{h + h'}{2} \right)$$

und die entsprechende für die Schwingung um die andere Schneide

$$k^2 + k'^2 + \frac{\mu V \varrho' k'^2}{m} = \lambda T'^2 \left( h' - \frac{V \varrho'}{m} \frac{h + h'}{2} \right).$$

Daraus muss  $k^2$  wie früher eliminirt werden. Nimmt die Beobachtungszeit bez. der beiden Schneiden nicht zu viel Zeit in Anspruch, so kann man  $\varrho = \varrho'$  setzen und Du Buat's Correction verschwindet dann. Das ist natürlich ein grosser Vortheil. Man erhält dann

$$\frac{h + h'}{\lambda} = \frac{T^2 + T'^2}{2} + \frac{1}{2} \frac{h + h'}{h - h'} (T^2 - T'^2) \left( 1 - \frac{V \varrho}{m} \right),$$

worin das letzte Glied sehr klein ist, weil  $T$  und  $T'$  sich nahezu gleich kommen.

Der Widerstand der Luft ist eine Function der Winkelgeschwindigkeit  $d\theta/dt$  des Pendels. Die Geschwindigkeit ist sehr klein; nehmen wir daher an, dass das Maclaurin's Theorem sich anwenden lässt, d. h. dass kein Coefficient einer Potenz, welche höher als die erste ist, sehr gross ist, so wird der Widerstand proportional  $d\theta/dt$ . Die Bewegungsgleichung erhält mithin die Gestalt

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + n^2\theta = -2f \frac{d\theta}{dt},$$

wo  $2\pi/n$  die Dauer einer vollständigen Schwingung im luftleeren Raum ist und die rechte Seite von dem Widerstand der Luft herrührt. Das Nähere über diese Gleichung findet man in dem Kapitel, das von den kleinen Oscillationen handelt.

Siehe: Du Buat, *Principes d'hydraulique* 1786. F. W. Bessel, Königl. Akademie der Wissenschaften, Berlin 1826. Baily on the correction of the pendulum, *Phil. Trans.* 1832. Account of the operations of the great trigonometrical survey in India von Capt. Heaviside 1879. General Walker's account of recent pendulum operations etc., *Phil. Trans.* 1890.

§ 106. Die Construction eines Pendels. Bei der Construction eines Reversionspendels zur Messung der Schwerkraft sind folgende Punkte von Wichtigkeit:



1) Die Aufhängungsaxen oder Schneiden dürfen vom Massenschwerpunkt nicht denselben Abstand haben. Sie sollen parallel zu einander sein.

2) Die Oscillationsdauer soll für die beiden Schneiden gleich sein.

3) Die äussere Gestalt des Körpers muss symmetrisch und für die beiden Aufhängungsaxen dieselbe sein.

4) Das Pendel muss eine so regelmässige Gestalt haben, dass die Dimensionen aller Theile sich leicht berechnen lassen.

Diesen Bedingungen wird genügt, wenn das Pendel die Gestalt eines rechtwinkligen Parallelepipeds mit einem Cylinder an jedem Ende hat. Diese Cylinder sollen ihrem Aeusseren nach congruent, der eine jedoch massiv, der andere hohl und derart sein, dass der Abstand zwischen den Schneiden so nahe als nur möglich der durch *Rechnung* gefundenen Länge des gleichwerthigen einfachen Pendel gleichkommt. Ein solches Pendel heisst ein *Repsold'sches*.

5) Das Pendel soll soweit als möglich von demselben Metall verfertigt werden, damit es bei Temperaturänderungen sich selbst ähnlich bleibt. Da die Oscillationszeiten ähnlicher Körper sich ändern, wie die Quadratwurzel aus ihren linearen Dimensionen, so lässt sich, wenn man die beobachtete Schwingungsdauer leicht auf eine Normaltemperatur reduzieren. Die Schneiden dagegen müssen aus einem festen Material hergestellt werden, so dass man gegen Verletzungen der selben möglichst gesichert ist.

§ 107. Beisp. 1. Für den Fall, dass die Schneiden nicht vollkommen gleich sind, sei  $r$  der Unterschied ihrer Krümmungsradien nach dem Mittel der beiden.

$$h^2 = \frac{K'' - K}{2} + \frac{K'' + K}{2} r = k^2 + k^2 r = k^2 (1 + r)$$

ist, wenn das Pendel im hinfleeren Raum schwingt. Da  $K$  und  $K''$  sich ändern, offenbar, wenn die Schneiden gleich schief sind. Durch Einsetzen der Beobachtung erhält man dieselbe Gleichung mit anderen Werten von  $K$  und  $K''$ . Vergleich der Beobachtungen an, so lässt sich auf diese Art  $r$  bestimmen. Nach Laplace ist  $r$  ist Laplace von Dr. Younger *Methoden der Physik*, Bd. 2, S. 410, angegeben worden.

$q, q'$  seien die Krümmungsradien der Schneiden nach der Momentanaxe, um die Momentanaxe, so erhält man, wenn  $\alpha = \frac{K'' - K}{K'' + K} = \frac{q - q'}{q + q'}$  klein ist, kann man der Gleichung die Form geben  $h^2 = k^2 (1 + \frac{\alpha}{2}) = k^2 (1 + \frac{\alpha}{2})$ .

Da ferner die Schwingungsdauern  $T, T'$  nahe einander sind, so kann  $\frac{1}{T} = \frac{1}{T'}$  mit grosser Annäherung substituiert man den Werth von  $k^2$  aus § 99, selbst nur einen kleinen Werth haben,  $\alpha$  wird  $\frac{K'' - K}{K'' + K} = \frac{q - q'}{q + q'}$ . Wenn das Pendel um die andere Schneide schwingt, erhält man eine ähnliche Gleichung durch Vertauschen von  $h$  mit  $h'$  und  $T$  mit  $T'$ . Dadurch, dass man  $\frac{1}{T} = \frac{1}{T'}$  in § 99 eliminiert und sich erinnert, dass  $\frac{1}{T} = \frac{1}{T'}$ , findet man das gewünschte Resultat.

Beisp. 2. Ein schwerer Ball in der Gestalt eines Kugel mit einem sehr dünnen Drahtes nacheinander an zwei Punkten A und B aufgehängt, deren verticaler Abstand  $b$  sehr vorzüglich gemein werden ist und es gibt zwei Pendel. Der tiefste Punkt des Balles wird bei den beiden aufgehängten

möglichst genau auf dieselbe Höhe eingestellt und diese Höhe befindet sich unter  $A$  und  $B$  annähernd in der Tiefe  $a$  bez.  $a'$ . Man beweise, wenn  $r$  den Radius des Bulles bedeutet, der im Vergleich mit  $a$  oder  $a'$  und  $l, l'$ , den Längen des gleichwerthigen einfachen Pendels klein ist, dass mit grosser Annäherung 
$$\frac{l-l'}{b} = 1 - \frac{2}{5} \frac{r^2}{(a-r)(a'-r)}$$
 ist. Man zeige weiter, wie man durch Zählen der Anzahl der in einer gegebenen Zeit von jedem Pendel gemachten Schwingungen das Verhältniss von  $l$  zu  $l'$  finden kann. Man zeige ferner, wie  $g$  ermittelt wird und gebe an, welche Längen höchst sorgfältig zu messen und welche nur annähernd nöthig sind, wenn die Resultate brauchbar sein sollen. Diese Methode hat Bessel benutzt. Siehe seine berühmten „Untersuchungen über die Länge des einfachen Secundenpendels“ (Abhandlungen der Berliner Akademie 1826); auch in Ostwald's Klassikern erschienen (Heft 7).

§ 108. Eine Normallänge. Die Länge des Secundenpendels ist in England als nationale Normallänge benutzt worden. Durch Parlamentsbeschluss wurde im Jahr 1824 bestimmt, dass der Abstand zwischen den Centren zweier Punkte, die in den goldenen Knöpfen eines geraden Messingstabes angebracht waren, welchen der Secretär des Hauses der Gemeinen in Verwahrung hatte und auf welchem „*standard yard 1760*“ eingravirt war, die wahre Original-Normallänge, eine Elle (yard) genannt, für eine Temperatur des Messings von  $62^{\circ}$  Fahr. sein sollte. Da es nöthig schien, diese Normalelle bei Beschädigungen wieder in derselben Länge durch Vergleichung mit einem unveränderlichen natürlichen Normalmass herstellen zu können, wurde verordnet, die neue Normalelle solle von solcher Länge sein, dass das Pendel, welches Secunden mittlerer Zeit in der Breite von London im luftleeren Raum auf dem Niveau des Meeres schwinde, eine Länge von 39,1393 engl. Zoll habe.

Nachdem diese Normalelle bei dem Brand des Parlamentsgebäudes 1834 unbrauchbar geworden war, wurde 1838 eine Commission eingesetzt, die 1841 berichtete, sie halte es zwar für angezeigt, einen bestimmten Messingstab zur Normalelle zu nehmen, dagegen könne sie nicht empfehlen, bei der Wiederherstellung eines solchen die Länge des Secundenpendels zu Grunde zu legen. „Seit dem Decret vom Jahr 1824 ist festgestellt worden, dass verschiedene Reductionselemente bei den Pendelversuchen, die darin angezogen werden, theils zweifelhaft, theils irrig sind. So hat Dr. Young, *Phil. Trans.* 1819 gezeigt, dass die Reduction auf das Niveau des Meeres zweifelhaft ist; Bessel, *Astronom. Nachr.* Nr. 128 und Sabine, *Phil. Trans.* 1829, dass die Reduction für das Gewicht der Luft fehlerhaft ist; Baily, *Phil. Trans.* 1832, dass die specifische Schwere des Pendels unrichtig geschätzt wurde und die von den Achatplatten herrührenden Fehler die Resultate zweifelhaft machten; Kater, *Phil. Trans.* 1830 und Baily, *Astron. Soc. Memoirs* Vol. IX, dass sehr merkbare Fehler durch die Vergleichung der Pendellänge mit Shuckburgh's Massstab entstanden seien, von dem vorausgesetzt wurde, er stimme mit dem gesetzlichen Normalmass überein. Daraus geht hervor, dass das in dem Decret vorgeschriebene Verfahren nicht noth-

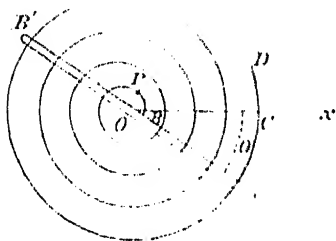
wendiger Weise die frühere Länge der ursprünglichen Elle ergeben würde.“ Die Commission stellte fest, dass es verschiedene Masse gebe, die früher genau mit der Originalnormalelle verglichen wurden und dass durch ihre Benutzung die Länge der Originalelle ohne merkbare Fehler bestimmt werden könne. 1843 wurde eine andere Commission eingesetzt, über deren Wirksamkeit man Näheres in einem Bericht von Sir G. Airy an die *Royal Society*, 1857 findet.

In Frankreich ist die Normallänge das Meter. Diesem wurde, wie der englischen Normalelle, ein in der Natur gegebenes Mass zu Grunde gelegt. Der zehnmillionste Theil der Länge eines Erdmeridians, vom Pol bis zum Aequator gemessen, wurde als gesetzliches Meter definiert. Als man jedoch später neue und genauere Messungen vornahm, stellte es sich heraus, dass man die Länge des gesetzlichen Meters nicht bei jeder Verbesserung der Erdmessung ändern konnte. In der That ist daher das Meter durch einen in Paris aufbewahrten Stab von bestimmter Länge definiert.

Die Benutzung des Secundenpendels als Normallänge setzt voraus, dass man bereits eine Normalzeit bestimmt hat. Man muss dabei auf ein in der Natur gegebenes Mass zurückgreifen und wählt gewöhnlich die Zeit der Umdrehung der Erde um ihre Axe. Es empfiehlt sich durch seine Einfachheit, da das Zeitintervall zwischen zwei aufeinander folgenden Durchgängen desselben Sterns durch den Meridian der Rotationszeit der Erde sehr nahe gleichkommt. Doch kann man auch andere in der Natur sich findende Normalmasse zur Regelung des Ganges unserer Uhren benutzen.

Ueber die beiden Berichte (1873 und 1874) des *Unit's Committee* der *British Association* bez. dieses Gegenstandes siehe Prof. Everett's Abhandlung über *Units and Physical constant*.

§ 109. Schwingung der Unruhe einer Uhr. Ein Stab  $BOB$  kann sich frei um seinen festliegenden Schwerpunkt  $O$  drehen und unterliegt



der Einwirkung einer sehr feinen Spiralfeder  $CPB$ . Das eine Ende  $C$  der Feder ist derart befestigt, dass auch die Tangente im Punkt  $C$  festliegt und das andere Ende  $B$  ist mit dem Stab so verbunden, dass die Tangente in  $B$  einen constanten Winkel mit dem Stab macht. Man soll die Oscillationsdauer finden, welche eintritt, wenn der Stab um irgend einen Winkel gedreht wird. Diese Con-

struction wird in Taschenuhren gerade wie das Pendel bei Pendeluhrn zur Regulirung der Bewegung benutzt. In vielen Uhren ist der Stab durch ein Rad ersetzt, dessen Centrum  $O$  ist.

$Ox$  sei die Lage des Stabes, wenn er sich im Gleichgewicht befindet.

findet,  $\theta$  der Winkel, den der Stab mit  $Ox$  zu irgend einer Zeit  $t$  macht,  $Mk^2$  das Trägheitsmoment des Stabes für  $O$ ,  $\varrho$  der Krümmungsradius für irgend einen Punkt  $P$  der Feder,  $\varrho_0$  der Werth von  $\varrho$  für den Gleichgewichtszustand. Ferner seien  $(x, y)$  die Coordinaten von  $P$  auf  $O$  als Coordinatenanfang und  $Ox$  als  $x$ -Axe bezogen. Wir wollen die Kräfte betrachten, welche auf den Stab und den Theil  $BP$  der Feder wirken. Die auf den Stab wirkenden Kräfte bestehen aus den am Schwerpunkt  $O$  parallel den Coordinatenachsen angreifenden Componenten  $X, Y$  und den in entgegengesetztem Sinn genommenen Effectivkräften, die einem Paar  $Mk^2 \frac{d^2\theta}{dt^2}$  gleichkommen. Die auf die Feder wirkenden Kräfte bestehen aus den in entgegengesetztem Sinn genommenen Effectivkräften, welche in Folge der Feinheit der Feder so klein sind, dass sie vernachlässigt werden können, und der resultirenden Wirkung längs des Querschnitts der Feder bei  $P$ . Diese resultirende Wirkung wird durch die Spannungen der unzähligen Fasern, aus denen die Feder besteht, hervorgebracht und diese sind einer Kraft am Punkt  $P$  und einem Kräftepaar gleich. Wird eine elastische Feder so gespannt, dass sich ihre Krümmung ändert, so ist, wie die Praxis und Theorie zeigt, dieses Paar der Krümmungsänderung für den Punkt  $P$  proportional. Wir können es daher durch  $E \left( \frac{1}{\varrho} - \frac{1}{\varrho_0} \right)$  darstellen, wobei  $E$  nur von dem Material, aus dem die Feder gemacht ist und der Form ihres Querschnitts abhängt.

Um nicht die unbekannte am Punkt  $P$  wirkende Kraft einführen zu müssen, wollen wir die Momente um  $P$  nehmen. Wir erhalten

$$Mk^2 \frac{d^2\theta}{dt^2} = -E \left( \frac{1}{\varrho} - \frac{1}{\varrho_0} \right) - Xy + Yx.$$

Diese Gleichung gilt für jede Lage des Punktes  $P$ . Betrachtet man für den Augenblick die linke Seite als constant und  $x, y$  als variabel, so stellt sie die Gleichung für die Gestalt der Feder dar.

Es sei  $BP = s$ . Multiplicirt man die Gleichung mit  $ds$  und integrirt über die ganze Länge  $l$  der Spiralfeder, so wird

$$Mk^2 \frac{d^2\theta}{dt^2} l = -E \int \left( \frac{ds}{\varrho} - \frac{ds}{\varrho_0} \right) + Y \int x ds - X \int y ds.$$

Nun ist  $\frac{ds}{\varrho}$  der Winkel zwischen zwei aufeinander folgenden Normalen und daher  $\int \frac{ds}{\varrho}$  der Winkel zwischen der Anfangs- und Endnormale. Da aber im Punkt  $C$  die Normale zu der Feder während der Bewegung festliegt, so ist  $\int \left( \frac{ds}{\varrho} - \frac{ds}{\varrho_0} \right)$  der Winkel zwischen den Normalen im Punkt  $B$  in den beiden Lagen, in welchen  $\theta = \theta$  und  $\theta = 0$  ist. Weil nun die Normale im Punkt  $B$  einen constanten Winkel mit dem Stab macht, so ist dieser Winkel der Winkel  $\theta$ , den der Stab mit seiner Gleichgewichtslage macht. Sind ferner  $\bar{x}, \bar{y}$  die

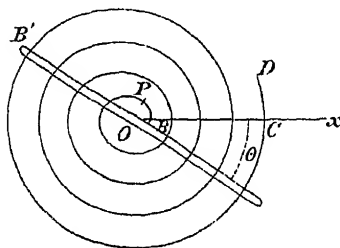
wendiger Weise die frühere Länge der ursprünglichen Elle ergeben würde.“ Die Commission stellte fest, dass es verschiedene Masse gebe, die früher genau mit der Originalnormalelle verglichen wurden und dass durch ihre Benutzung die Länge der Originalelle ohne merkbare Fehler bestimmt werden könne. 1843 wurde eine andere Commission eingesetzt, über deren Wirksamkeit man Näheres in einem Bericht von Sir G. Airy an die *Royal Society*, 1857 findet.

In Frankreich ist die Normallänge das Meter. Diesem wurde, wie der englischen Normalelle, ein in der Natur gegebenes Mass zu Grunde gelegt. Der zehnmillionste Theil der Länge eines Erdmeridians, vom Pol bis zum Aequator gemessen, wurde als gesetzliches Meter definirt. Als man jedoch später neue und genauere Messungen vornahm, stellte es sich heraus, dass man die Länge des gesetzlichen Meters nicht bei jeder Verbesserung der Erdmessung ändern konnte. In der That ist daher das Meter durch einen in Paris aufbewahrten Stab von bestimmter Länge definirt.

Die Benutzung des Secundenpendels als Normallänge setzt voraus, dass man bereits eine Normalzeit bestimmt hat. Man muss dabei auf ein in der Natur gegebenes Mass zurückgreifen und wählt gewöhnlich die Zeit der Umdrehung der Erde um ihre Axe. Es empfiehlt sich durch seine Einfachheit, da das Zeitintervall zwischen zwei aufeinander folgenden Durchgängen desselben Sterns durch den Meridian der Rotationszeit der Erde sehr nahe gleichkommt. Doch kann man auch andere in der Natur sich findende Normalmasse zur Regelung des Ganges unserer Uhren benutzen.

Ueber die beiden Berichte (1873 und 1874) des *Unit's Committee* der *British Association* bez. dieses Gegenstandes siehe Prof. Everett's Abhandlung über *Units and Physical constants*.

§ 109. Schwingung der Unruhe einer Uhr. Ein Stab  $B'OB$  kann sich frei um seinen festliegenden Schwerpunkt  $O$  drehen und unterliegt



der Einwirkung einer sehr feinen Spiralfeder  $CPB$ . Das eine Ende  $C$  der Feder ist derart befestigt, dass auch die Tangente im Punkt  $C$  festliegt und das andere Ende  $B$  ist mit dem Stab so verbunden, dass die Tangente in  $B$  einen constanten Winkel mit dem Stab macht. Man soll die Oscillationsdauer finden, welche eintritt, wenn der Stab um irgend einen Winkel gedreht wird. Diese Con-

struction wird in Taschenuhren gerade wie das Pendel bei Pendeluhrn zur Regulirung der Bewegung benutzt. In vielen Uhren ist der Stab durch ein Rad ersetzt, dessen Centrum  $O$  ist.

$Ox$  sei die Lage des Stabes, wenn er sich im Gleichgewicht be-

findet,  $\theta$  der Winkel, den der Stab mit  $Ox$  zu irgend einer Zeit  $t$  macht,  $Mk^2$  das Trägheitsmoment des Stabes für  $O$ ,  $\varrho$  der Krümmungsradius für irgend einen Punkt  $P$  der Feder,  $\varrho_0$  der Werth von  $\varrho$  für den Gleichgewichtszustand. Ferner seien  $(x, y)$  die Coordinaten von  $P$  auf  $O$  als Coordinatenanfang und  $Ox$  als  $x$ -Axe bezogen. Wir wollen die Kräfte betrachten, welche auf den Stab und den Theil  $BP$  der Feder wirken. Die auf den Stab wirkenden Kräfte bestehen aus den am Schwerpunkt  $O$  parallel den Coordinatenachsen angreifenden Componenten  $X, Y$  und den in entgegengesetztem Sinn genommenen Effectivkräften, die einem Paar  $Mk^2 \frac{d^2\theta}{dt^2}$  gleichkommen. Die auf die Feder wirkenden Kräfte bestehen aus den in entgegengesetztem Sinn genommenen Effectivkräften, welche in Folge der Feinheit der Feder so klein sind, dass sie vernachlässigt werden können, und der resultirenden Wirkung längs des Querschnitts der Feder bei  $P$ . Diese resultirende Wirkung wird durch die Spannungen der unzähligen Fasern, aus denen die Feder besteht, hervorgebracht und diese sind einer Kraft am Punkt  $P$  und einem Kräftepaar gleich. Wird eine elastische Feder so gespannt, dass sich ihre Krümmung ändert, so ist, wie die Praxis und Theorie zeigt, dieses Paar der Krümmungsänderung für den Punkt  $P$  proportional. Wir können es daher durch  $E \left( \frac{1}{\varrho} - \frac{1}{\varrho_0} \right)$  darstellen, wobei  $E$  nur von dem Material, aus dem die Feder gemacht ist und der Form ihres Querschnitts abhängt.

Um nicht die unbekannte am Punkt  $P$  wirkende Kraft einführen zu müssen, wollen wir die Momente um  $P$  nehmen. Wir erhalten

$$Mk^2 \frac{d^2\theta}{dt^2} = -E \left( \frac{1}{\varrho} - \frac{1}{\varrho_0} \right) - Xy + Yx.$$

Diese Gleichung gilt für jede Lage des Punktes  $P$ . Betrachtet man für den Augenblick die linke Seite als constant und  $x, y$  als variabel, so stellt sie die Gleichung für die Gestalt der Feder dar.

Es sei  $BP = s$ . Multiplicirt man die Gleichung mit  $ds$  und integrirt über die ganze Länge  $l$  der Spiralfeder, so wird

$$Mk^2 \frac{d^2\theta}{dt^2} l = -E \int \left( \frac{ds}{\varrho} - \frac{ds}{\varrho_0} \right) + Y \int x ds - X \int y ds.$$

Nun ist  $\frac{ds}{\varrho}$  der Winkel zwischen zwei aufeinander folgenden Normalen und daher  $\int \frac{ds}{\varrho}$  der Winkel zwischen der Anfangs- und Endnormale. Da aber im Punkt  $C$  die Normale zu der Feder während der Bewegung festliegt, so ist  $\int \left( \frac{ds}{\varrho} - \frac{ds}{\varrho_0} \right)$  der Winkel zwischen den Normalen im Punkt  $B$  in den beiden Lagen, in welchen  $\theta = \theta$  und  $\theta = 0$  ist. Weil nun die Normale im Punkt  $B$  einen constanten Winkel mit dem Stab macht, so ist dieser Winkel der Winkel  $\theta$ , den der Stab mit seiner Gleichgewichtslage macht. Sind ferner  $\bar{x}, \bar{y}$  die

Coordinaten des Schwerpunkts der Feder zur Zeit  $t$ , so ist  $\int x ds = \bar{x}l$ ,  
 $\int y ds = \bar{y}l$ . Die Bewegungsgleichung erhält sonach die Form:

$$Mk^2 \frac{d^2\theta}{dt^2} = -\frac{E}{l} \theta + Y\bar{x} - X\bar{y}.$$

Nehmen wir an, in der Gleichgewichtslage finde kein Druck auf die Axe  $O$  statt und die Schwingungen seien klein, dann sind  $X$  und  $Y$  während der Bewegung kleine Grössen von derselben Ordnung wie  $\theta$ . Wir nehmen ferner an, der Stützpunkt  $O$  befinde sich während des Zustandes der Ruhe über dem Schwerpunkt der Feder. Ist nun die Anzahl der Windungen der Spiralfeder gross und jede Windung nahezu kreisförmig, so wird sich der Schwerpunkt niemals weit von  $O$  entfernen.  $Y\bar{x}$  und  $X\bar{y}$  sind daher beide Producte zweier kleiner Grössen und desshalb mindestens von der zweiten Ordnung. Vernachlässigt man diese Glieder, so wird

$$Mk^2 \frac{d^2\theta}{dt^2} = -\frac{E}{l} \theta.$$

Die Schwingungsdauer ist daher  $2\pi \sqrt{\frac{Mk^2 l}{E}}$ .

Daraus geht hervor, dass bei einer ersten Annäherung die Schwingungsdauer unabhängig von der Gestalt der Feder im Gleichgewichtszustand ist und nur von ihrer Länge und der Form ihres Querschnittes abhängt.

Wird die Länge  $l$  der Feder vergrössert, so nimmt die Oscillationszeit zu und die Uhr geht nach. Um diesen Fehler nöthigenfalls corrigiren zu können, ist die Druckschraube, durch die der Punkt  $O$  gehalten wird, an einem Stab  $Ox$  befestigt, welcher sich um  $O$  so drehen lässt, dass sich die Feder nicht mitdreht. Die bei  $D$  festgehaltene Feder gleitet durch die Druckschraube  $C$  und die Länge von  $CB$ , also die zur Wirkung kommende Länge  $l$  der Feder wird bei einer Drehung von  $D$  weg verkürzt. Bewegt man den Stab  $Ox$  nach  $D$  zu, so wird die wirksame Länge  $l$  vergrössert.

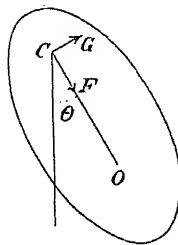
Diese kurze Darstellung der Bewegung einer Uhrunruhe ist einem der Akademie der Wissenschaften überreichten Aufsatz entnommen. Weitere Untersuchungen über die für Isochronismus nöthigen Bedingungen und die Bestimmung der besten Gestalt der Feder findet der Leser in Liouville's Journal 2, V, 1860, M. E. Phillips, *Mémoire sur le spirale réglant des chronomètres et des montres*.

Wenn die Temperatur wächst, so wächst auch die Länge  $l$  der Unruhe. Aus diesen und anderen Gründen geht die Uhr nach. Die Compensation für einen Temperaturwechsel wird jetzt gewöhnlich dadurch bewirkt, dass man das Trägheitsmoment des oscillirenden Körpers ändert. Der Umfang des Unruherades ist kein vollständiger Kreis, sondern besteht aus zwei Bogen, von denen jeder kleiner als ein halber Kreisumfang ist. Das eine Ende eines jeden ist an das eine Ende des Stabes  $B'OB$  befestigt, während nicht weit von dem andern freien Ende eines jeden Bogens eine kleine Masse angebracht ist. Jeder Bogen ist aus zwei dünnen nebeneinander liegenden Streifen von verschiedenem Metall hergestellt, von denen der äussere sich in der Wärme mehr ausdehnt als der innere. Bei einer Erhöhung der Temperatur biegen sich die Bogen nach innen und das Trägheitsmoment der

§ 110. Der Druck auf die feste Axe. Den Druck auf eine feste Axe zu finden, um welche sich ein unter der Einwirkung irgend welcher Kräfte stehender Körper bewegt.

Erstens. Nehmen wir an, der Körper und die Kräfte seien symmetrisch zu der durch den Schwerpunkt senkrecht zur Axe gelegten Ebene, so lassen sich die auf die Axe wirkenden Druckkräfte offenbar auf eine einzelne am Aufhängungscentrum  $C$  angreifende Kraft reduciren.

$F$ ,  $G$  seien die Componenten der Wirkung des Stützpunktes auf den Körper in der Richtung von  $C$  nach dem Schwerpunkt  $O$  und senkrecht dazu;  $X$ ,  $Y$  die Summe der Componenten der gegebenen Kräfte in denselben Richtungen und  $L$  ihr Moment um  $C$ . Es sei  $CO = h$  und  $\theta$  der Winkel, den  $CO$  mit irgend einer im Raum festliegenden Geraden bildet.



Nimmt man die Momente um  $C$ , so ist

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} = \frac{L}{M(h^2 + h^2)} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1).$$

Die Bewegung des Schwerpunkts bleibt dieselbe, als wenn alle Kräfte an ihm angreifen würden. Da er einen Kreis um  $C$  beschreibt, so sind die Tangential- und Normalcomponenten

$$h \frac{d^2\theta}{dt^2} = \frac{Y + G}{M} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2),$$

$$-h \left( \frac{d\theta}{dt} \right)^2 = \frac{X + F}{M} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3).$$

Die Gleichung (1) liefert die Werthe für  $d^2\theta/dt^2$  und  $d\theta/dt$ ; die Druckkräfte findet man dann aus (2) und (3).

Wenn die Schwerkraft allein auf den Körper wirkt und  $\theta$  von der Verticalen aus gerechnet wird, so ist

$$X = Mg \cos \theta, \quad Y = -Mg \sin \theta, \quad L = -Mgh \sin \theta$$

und daher

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} = -\frac{gh}{k^2 + h^2} \sin \theta \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (4).$$

Durch Integration erhält man

$$\left( \frac{d\theta}{dt} \right)^2 = C + \frac{2gh}{k^2 + h^2} \cos \theta \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (5).$$

Ist die Winkelgeschwindigkeit des Körpers  $\Omega$ , wenn  $CO$  eine horizontale Lage hat und daher  $\cos \theta = 0$  ist, so ergibt sich  $C = \Omega^2$ . Setzt man diese Werthe in (2) und (3) ein, so wird



$$\left. \begin{aligned} -\frac{F}{M} &= \Omega^2 h + g \cos \theta \frac{k^2 + 3h^2}{k^2 + h^2} \\ \frac{G}{M} &= g \sin \theta \frac{k^2}{k^2 + h^2} \end{aligned} \right\},$$

worin  $\theta$  der Winkel ist, den das vom Schwerpunkt des Körpers auf die Axe gefällte Loth mit der abwärts gerichteten Verticalen bildet.

Daraus geht hervor, dass die Druckcomponente senkrecht zu der Ebene, welche die Axe und den Schwerpunkt enthält, unabhängig von den Anfangsbedingungen ist. Bei den Schwingungen des Körpers variirt diese Componente wie der Abstand des Schwerpunkts von der durch die Axe gehenden Verticalebene. Die Druckcomponente dagegen, welche in der die Axe und den Schwerpunkt enthaltenden Ebene liegt, ist von der Anfangswinkelgeschwindigkeit des Körpers abhängig.

Wirken Stosskräfte, so ändern sich die Gleichungen (1), (2), (3) nur wenig. Wenn  $\omega$ ,  $\omega'$  die Winkelgeschwindigkeiten gerade vor und gerade nach der Action der Stosskräfte sind, so erhalten die Gleichungen die Form

$$\omega' - \omega = \frac{L}{M(k^2 + h^2)}, \quad h(\omega' - \omega) = \frac{Y + G}{M}, \quad 0 = X + F,$$

worin die Buchstaben dieselbe Bedeutung wie früher haben, und nur  $F$ ,  $G$ ,  $X$ ,  $Y$  statt endlicher Kräfte Stosskräfte bedeuten.

§ 111. Beisp. 1. Eine Kreisfläche, deren Gewicht  $W$  ist, kann sich frei um eine horizontale auf ihr senkrecht stehende Axe drehen, die durch einen auf ihrer Peripherie liegenden Punkt  $C$  geht. Der Kreis beginnt seine Bewegung vom Zustand der Ruhe aus, in welchem der durch  $C$  gehende Durchmesser sich vertical über  $C$  befindet. Man zeige, dass die Resultanten des Drucks auf die Axe, wenn dieser Durchmesser horizontal liegt und sich vertical unter  $C$  befindet,  $\frac{1}{3} \sqrt{17} W$  bez.  $\frac{11}{3} W$  sind.

Beisp. 2. Einen dünnen gleichförmigen Stab, dessen eines Ende an eine glatte Scharnier befestigt ist, lässt man aus einer horizontalen Lage herabfallen; man beweise, dass, wenn der horizontale Zug am grössten ist, der verticale Zug auf die Angel sich zu dem Gewicht des Stabes verhält wie 11 : 8. Math. Tripos.

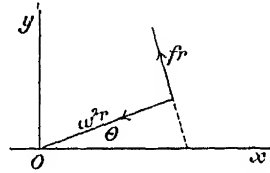
Beisp. 3. Es sei  $a = g \frac{k^2 + 3h^2}{k^2 + h^2}$ ,  $b = g \frac{k^2}{k^2 + h^2}$  und  $R$  die Resultante von  $-F - M\Omega^2 h$  und  $G$ . Man construire eine Ellipse, deren Centrum  $C$  ist und deren Axen in der Richtung von  $CO$  und senkrecht dazu  $2a$  bez.  $2b$  sind. Diese Ellipse sei im Körper befestigt und schwinde mit ihm. Man beweise, dass der Druck  $R$  variirt wie der Durchmesser, in dessen Richtung er wirkt. Diese Richtung kann man so ermitteln: der Hilfskreis schneide die Verticale durch  $C$  in  $V$  und das von  $V$  auf  $CO$  gefällte Loth schneide die Ellipse in  $R$ . Es ist dann  $CR$  die Richtung des Druckes  $R$ .

§ 112. Zweitens. Entweder der Körper oder die Kräfte seien nicht symmetrisch.

Die feste Axe sei die  $z$ -Axe, der Coordinatenanfang beliebig und ebenso die  $xz$ -Ebene. Wir werden sie später so wählen, dass unsere

Untersuchung möglichst einfach wird.  $\bar{x}$ ,  $\bar{y}$ ,  $\bar{z}$  seien die Coordinaten des Schwerpunkts zur Zeit  $t$ ;  $\omega$  die Winkelgeschwindigkeit des Körpers,  $f$  die Winkelbeschleunigung, so dass also  $f = d\omega/dt$ .

Da jedes Element  $m$  des Körpers einen Kreis um die Axe beschreibt, so sind seine Beschleunigungen in der Richtung des von der Axe aus gezogenen Radiusvectors und senkrecht dazu  $-\omega^2 r$  bez.  $fr$ . Macht  $r$  mit der  $xz$ -Ebene zu irgend einer Zeit den Winkel  $\theta$ , so erhält man offenbar die folgenden Componenten der Kräfte:



$$\frac{d^2 x}{dt^2} = -\omega^2 r \cos \theta - fr \sin \theta = -\omega^2 x - fy$$

und

$$\frac{d^2 y}{dt^2} = -\omega^2 y + fx.$$

Diese Gleichungen erhält man auch, wenn man  $x = r \cos \theta$ ,  $y = r \sin \theta$  zweimal differenziert und dabei bedenkt, dass  $r$  constant ist.

Sammelt man die Effectivkräfte aller Elemente und combinirt sie auf die Poinso't'sche Art, so ergibt sich, dass sie einer am Coordinatenanfang angreifenden Kraft und einem Kräftepaar gleichwerthig sind; die sechs Componenten sind:

$$X_1 = \Sigma m \frac{d^2 x}{dt^2} = \Sigma m (-\omega^2 x - fy) = -\omega^2 M \bar{x} - f M \bar{y} \quad . \quad . \quad . \quad (1),$$

$$Y_1 = \Sigma m \frac{d^2 y}{dt^2} = \Sigma m (-\omega^2 y + fx) = -\omega^2 M \bar{y} + f M \bar{x} \quad . \quad . \quad . \quad (2),$$

$$Z_1 = \Sigma m \frac{d^2 z}{dt^2} = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3),$$

$$L_1 = \Sigma m \left( y \frac{d^2 z}{dt^2} - z \frac{d^2 y}{dt^2} \right) = -\Sigma m z \frac{d^2 y}{dt^2} = \omega^2 \Sigma m y z - f \Sigma m x z \quad . \quad (4),$$

$$M_1 = \Sigma m \left( z \frac{d^2 x}{dt^2} - x \frac{d^2 z}{dt^2} \right) = \Sigma m z \frac{d^2 x}{dt^2} = -\omega^2 \Sigma m x z - f \Sigma m y z \quad . \quad (5),$$

$$N_1 = \Sigma m \left( x \frac{d^2 y}{dt^2} - y \frac{d^2 x}{dt^2} \right) = \Sigma m r^2 \frac{d\omega}{dt} = M k'^2 f \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (6).$$

Da  $\frac{d^2 z}{dt^2} = 0$  ist, so lassen sich die rechten Seiten der Gleichungen (4) und (5) offenbar dadurch bestimmen, dass man  $z$  in die  $\Sigma$  von (2) und (3) einführt.

Der Körper möge an zwei Punkten der Axe in den Abständen  $a$ ,  $a'$  vom Coordinatenanfang befestigt sein; die Componenten der Reactionen der Punkte auf den Körper parallel zu den Coordinatenachsen seien bez.  $F$ ,  $G$ ,  $H$ ;  $F'$ ,  $G'$ ,  $H'$ ; ferner seien  $X$ ,  $Y$ ,  $Z$  die auf den materiellen Punkt  $m$  wirkenden gegebenen beschleunigenden Kräfte. Nach D'Alembert's Princip § 72 ist alsdann

$$\Sigma m X + F + F' = -\omega^2 M \bar{x} - f M y \quad . \quad . \quad . \quad (1)',$$

$$\Sigma m Y + G + G' = -\omega^2 M \bar{y} + f M x \quad . \quad . \quad . \quad (2)',$$

$$\Sigma m Z + H + H' = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3)',$$

$$\Sigma m (yZ - zY) - Ga - G'a' = \omega^2 \Sigma m yz - f \Sigma m xz \quad . \quad (4)',$$

$$\Sigma m (zX - xZ) + Fa + F'a' = -\omega^2 \Sigma m xz - f \Sigma m yz \quad (5)',$$

$$\Sigma m (xY - yX) = f M k^2 \quad . \quad . \quad . \quad (6)'.$$

Die Gleichung (6)' bestimmt  $f = \frac{d\omega}{dt}$  und durch Integration auch  $\omega$ ; aus (1)', (2)', (4)', (5)' erhält man dann  $F'$ ,  $G'$ ,  $F''$ ,  $G''$ ;  $H$  und  $H'$  bleiben unbestimmt; ihre Summe ist jedoch durch (3)' gegeben.

Offenbar lassen sich die sechs Bewegungsgleichungen manchmal sehr vereinfachen.

*Erstens.* Wenn die  $z$ -Axe für den Koordinatenanfang eine Hauptaxe ist, so wird

$$\Sigma m x y = 0, \quad \Sigma m y z = 0$$

und die Berechnung der rechten Seiten der Gl. (4)', (5)' fällt weg. Man sollte daher, wenn möglich, den Koordinatenanfang so wählen, dass die feste Axe eine Hauptaxe des Körpers für diesen Punkt ist, § 48.

*Zweitens.* Mit Ausnahme der Bestimmung von  $f$  und  $\omega$  durch Integration der Gl. (6)' besteht das ganze Verfahren lediglich in einer algebraischen Substitution für  $f$  und  $\omega$  in die übrigen Gleichungen. Daher bleibt das Resultat auch dann noch richtig, wenn man bei der Aufstellung der Bewegungsgleichungen die  $xy$ -Ebene so wählt, dass sie den Schwerpunkt in dem in Betracht gezogenen Moment enthält. Dadurch wird  $\bar{y} = 0$  und die Gl. (1)', (2)' vereinfachen sich.

*Drittens.* Da die Punkte der Axe, an welche der Körper befestigt wird, willkürlich sind, so kann man zur weiteren Vereinfachung den Koordinatenanfang als einen Drehpunkt wählen und dem andern eine andere passende Lage geben. Dann wird  $a = 0$ ;  $F''$ ,  $G''$  ergeben sich ohne Weiteres aus (4)', (5)' und  $F'$ ,  $G'$  findet man aus (1)', (2)'.

§ 113. **Momentankräfte.** Sind es Stosskräfte, die am Körper angreifen, so müssen die Gleichungen etwas abgeändert werden.  $u, v, w$ , ( $u', v', w'$ ) seien die den Axen parallelen Geschwindigkeitscomponenten eines Elementes  $m$ , dessen Coordinaten ( $x, y, z$ ) sind. Es wird  $u = y\omega$ ,  $u' = -y\omega'$ ,  $v = x\omega$ ,  $v' = x\omega'$  und  $w = 0$ ,  $w' = 0$ . Die sechs Componenten der Effectivkräfte erhalten die Form

$$X_1 = \Sigma m (u' - u) = -\Sigma m y (\omega' - \omega) = -M y (\omega' - \omega), \quad (1),$$

$$Y_1 = \Sigma m (v' - v) = \Sigma m x (\omega' - \omega) = M x (\omega' - \omega) \quad . \quad . \quad (2),$$

$$Z_1 = \Sigma m (w' - w) = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3),$$

$$L_1 = \Sigma m \{y(w' - w) - z(v' - v)\} = -\Sigma m x z (\omega' - \omega) \quad . \quad (4),$$

$$M_1 = \Sigma m \{ z(u' - u) - x(w' - w) \} = - \Sigma m y z (\omega' - \omega) \dots (5),$$

$$N_1 = (\S 89) = M k'^2 (\omega' - \omega) \dots (6).$$

Nach D'Alembert's Princip (§ 86) ist ferner

$$\begin{aligned} \Sigma X + F + F' &= - M \bar{y} (\omega' - \omega) \dots (1)', \\ \Sigma Y + G + G' &= M \bar{x} (\omega' - \omega) \dots (2)', \\ \Sigma Z + H + H' &= 0 \dots (3)', \\ \Sigma (yZ - zY) - Ga - G'a &= - \Sigma m x z (\omega' - \omega) \dots (4)', \\ \Sigma (zX - xZ) + Fa + F'a &= - \Sigma m y z (\omega' - \omega) \dots (5)', \\ \Sigma (xY - yX) &= M k'^2 (\omega' - \omega) \dots (6)'. \end{aligned}$$

Diese sechs Gleichungen reichen zur Bestimmung von  $\omega'$ ,  $F'$ ,  $F'$ ,  $G$ ,  $G'$  und der Summe  $H + H'$  hin.

Wie man sieht, ist es bei der Bildung der Bewegungsgleichungen für ein specielles Problem wichtig, die oben erwähnten drei Vereinfachungen zu beachten.

§ 114. Analyse der erhaltenen Resultate. Daraus, dass die Kräfte und der Druck in den statischen und dynamischen Gleichungen in linearer Form auftreten, folgt, dass man die Componenten aller aus verschiedenen Ursachen entstandenen Druckkräfte dadurch erhalten kann, dass man die jedem einzelnen Druck zukommenden Componenten addirt. Die Druckkräfte der Axe auf den Körper kann man daher als die Resultanten zweier Gruppen von Druckkräften ansehen: (1) der statischen, die den gegebenen Kräften  $X$ ,  $Y$ ,  $Z$  etc. das Gleichgewicht halten und (2) der Druckkräfte, die den Effectivkräften  $m d^2x/dt^2$ ,  $m d^2y/dt^2$  etc. gleichwerthig sind.

Die Resultante des statischen Drucks kann man aus den ersten fünf Gleichungen ermitteln, indem man ihre rechten Seiten gleich Null setzt. Diese Gleichungen ändern sich nicht, wenn man die gegebenen Kräfte parallel zu sich selbst verlegt und an Punkten der Axe angreifen lässt, vorausgesetzt, dass man die Kräftepaare, wie sonst auch, einführt. Man kann dann das Paar, dessen Axe  $Oz$  ist und welches nur in Gl. (6)' auftritt, bei Seite lassen und den statischen Druck auf die Axe durch Zusammensetzung der übrigen verlegten Kräfte ermitteln. Wenn z. B. die einzige am Körper angreifende gegebene Kraft die Schwere ist und die Aufhängungsaxe horizontal liegt, so ist der statische Druck auf die Axe eine verticale, dem Gewicht des Körpers gleiche Kraft, die an dem Fusspunkt des von dem Schwerpunkt auf die Aufhängungsaxe gefällten Lothes angreift. Auf dieselbe Art kann man den statischen Druck, welcher einer auf den Körper senkrecht zur Axe wirkenden Stosskraft entspricht, dadurch finden, dass man sie parallel zu sich selbst in einer zur Axe senkrechten Ebene verlegt und an einem Punkt der Axe angreifen lässt.

Ist die Rotationsaxe  $Oz$  eine Hauptaxe für einen Punkt  $O$ , so nehmen die durch die Effectivkräfte hervorgerufenen Druckkräfte eine einfache

Gestalt an. Aus (4) und (5) folgt, dass  $L_1 = 0$ ,  $M_1 = 0$  ist. Die Effectivkräfte sind daher den Kräften  $X_1$ ,  $Y_1$ , die an  $O$  angreifen, zusammen mit einem Paar  $N_1$  gleichwerthig. Die Kräfte  $X_1$ ,  $Y_1$  sind offenbar die Componenten der Effectivkräfte einer in den Schwerpunkt gebrachten Masse  $M$ , während das Paar  $N_1$  nur in der sechsten Bewegungsgleichung auftritt und die Druckkräfte  $F$ ,  $G$ ,  $F'$ ,  $G'$  nur indirect dadurch beeinflusst, dass es  $f$  ändert. *Es ergibt sich, dass die Druckkräfte, welche an der Axe durch die Effectivkräfte hervorgerufen werden, einer einzelnen Kraft gleichwerthig sind, welche am Hauptpunkt  $O$  der Umdrehungsaxe angreift und der Resultanten der Effectivkräfte der ganzen im Schwerpunkt vereinigten und sich mit ihm bewegenden Masse gleichkommt.* Bezeichnet man das Loth vom Schwerpunkt auf die Axe mit  $\bar{r}$ , so sind die Componenten dieses Drucks in der Richtung von  $\bar{r}$  und senkrecht zu der  $\bar{r}$  und die Axe enthaltenden Ebene —  $\omega^2 M\bar{r}$  bez.  $fM\bar{r}$ . Sind es Stosskräfte, die wirken, so gelten dieselben Bemerkungen, nur dass die einzige Druckcomponente jetzt  $fM\bar{r}$  ist, worin  $f$  für  $\omega' - \omega$  steht.

Es ergibt sich mithin, dass bei der Rotation eines schweren Körpers um eine feste horizontale Axe, die einen Hauptpunkt  $O$  hat, der Druck der Axe auf den Körper zwei Kräften äquivalent ist. Die eine ist dem Gewicht gleich und entgegengesetzt und greift an der Projection des Schwerpunkts auf die Axe an; die andere ist der Effectivkraft an dem Schwerpunkt gleich und greift an dem Hauptpunkt an.

Wenn die Aufhängungsaxe einer Hauptaxe des Schwerpunkts parallel ist, so hat die Axe, wie wir aus § 49 wissen, einen Hauptpunkt, der mit der Projection des Schwerpunkts zusammenfällt. Ist in diesem Fall die Aufhängungsaxe horizontal, so greifen beide Druckkräfte, der von der Schwere und der von den Effectivkräften herrührende Druck, an demselben Punkt an und kommen einer einzelnen Kraft gleich.

Wenn der rotirende Körper eine Lamelle ist und die Axe  $Oz$  in ihrer Ebene liegt, so sind die Effectivkräfte eines Elementes  $m$ , im Abstand  $x$  von  $Oz$ , —  $m\omega^2 x$  und  $mfx$ , da  $x$  der Radius des von dem Element beschriebenen Kreises ist. Wie aus den Elementen der Hydrostatik bekannt ist und auch aus § 47 folgt, *sind die Resultanten dieser beiden Gruppen paralleler Kräfte gleich —  $M\omega^2 \bar{x}$  bez.  $Mf\bar{x}$  und greifen beide an dem Druckcentrum der Fläche an*, wenn man die Aufhängungsaxe als in der Oberfläche der Flüssigkeit liegend ansieht. Die Lage des Druckcentrums ist bekannt, sobald man die Punkte bestimmt hat, deren Trägheitsmoment gleich dem der Fläche ist (§ 47). Alsdann greift der Druck an der Aufhängungsaxe, der von den Effectivkräften herrührt, an der Projection des Druckcentrums auf die Axe an.

§ 115. Beisp. 1. Ein schwerer Körper kann sich frei um eine horizontale Axe  $Oz$  drehen, welche für  $O$  eine Hauptaxe ist. Er bewegt sich vom Zustand der Ruhe aus, in welchem die durch den Schwerpunkt  $G$  gehende Ebene  $GOz$  horizontal ist. Man zeige, dass der von den Effectivkräften allein herrührende Druck mit der Ebene  $GOz$  einen Winkel macht, dessen Tangente der halben

Beisp. 2. Der Quadrant eines Kreises vom Radius  $a$  kann sich frei um einen der Radien, von denen er begrenzt wird, als feste Axe drehen. Man zeige, dass der Druck auf die Axe zwei Druckkräften gleichwerthig ist, von denen die eine dem Gewicht der Lamelle gleichkommt und an einem Punkt des festen Radius, der den Abstand  $4a/3\pi$  vom Centrum hat, angreift, während die andere an einem Punkt wirkt, der diesen Radius im Verhältniss von 3 : 5 theilt.

Beisp. 3. Eine Ellipsenlamelle kann sich frei um die Gerade drehen, welche die Endpunkte  $A, B$  der Hauptdurchmesser verbindet und diese Axe ist in einer verticalen Lage befestigt. Die Lamelle wird mit einer solchen Winkelgeschwindigkeit  $\omega$  in Bewegung gesetzt, dass  $(a^2 - b^2)\omega^2 = 4g\sqrt{a^2 + b^2}$  ist. Man beweise, dass die Druckkräfte auf die Axe einer einzelnen Kraft gleichwerthig sind, welche an dem Fusspunkt des Lothes von dem Centrum auf die Axe angreift. Muss das Ende  $A$  oder  $B$  am höchsten liegen?

Beisp. 4. Eine Lamelle kann sich frei um eine Axe  $Oz$  in ihrer Ebene als feste Axe herumdrehen. Sie wird von einem Schlag  $P$  an irgend einem ihrer Punkte  $A$  in einer zu ihr senkrechten Richtung getroffen. Man zeige, dass der statische Druck auf die Axe einem Schlag  $P$  gleich ist, der auf  $B$  wirkt, wenn  $AB$  senkrecht zu  $Oz$  ist. Man zeige auch, dass der von den Effectivkräften herrührende Druck einem Schlag  $Px\xi/k^2$  gleich ist, der auf  $O$  in einer zu dem Schlag auf  $B$  entgegengesetzten Richtung wirkt. Dabei ist der Coordinatenanfang  $O$  der Hauptpunkt der Axe,  $x$  und  $\xi$  die Abstände des Schwerpunkts und des Punktes  $A$  von  $O$ ; und  $Mk^2$  das Trägheitsmoment für  $Oz$ . Unter welcher Bedingung ist der Druck auf die Axe einem Kräftepaar gleich?

Beisp. 5. Eine dreieckige Lamelle  $ABC$  schwingt um die Seite  $AB$  als horizontale Axe. Man zeige, dass die Länge des gleichwerthigen Pendels  $\frac{\Delta}{AB}$  ist, unter  $\Delta$  den Flächeninhalt verstanden. Wenn der Schwerpunkt  $G$  plötzlich angehalten wird, zu beweisen, dass die Stossdruckkräfte bei  $A$  und  $B$  einander gleich sind.

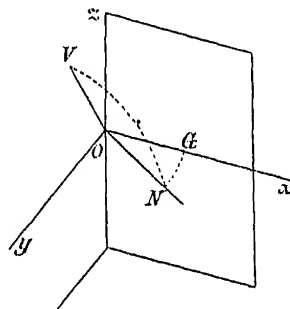
Beisp. 6. Eine Thür ist mittelst zweier Angeln an einer festen Axe aufgehängt, die mit der Verticalen den Winkel  $\alpha$  macht. Man finde die Bewegung und den Druck auf die Angeln.

Da die feste Axe offenbar eine Hauptaxe für ihren Mittelpunkt ist, so wählen wir diesen zum Coordinatenanfang. Zur  $xz$ -Ebene nehmen wir die Ebene, welche in dem betrachteten Moment den Schwerpunkt der Thür enthält.

Die einzige Kraft, die auf die Thür wirkt, ist die Schwere, von der wir annehmen wollen, sie greife am Schwerpunkt an. Zuerst suchen wir ihre Componenten parallel zu den Axen. Die Ebene der Thür mache mit der verticalen durch die Aufhängungsaxe gelegten Ebene den Winkel  $\varphi$ . Zieht man die Ebene  $xON$  so, dass ihre Spur  $ON$  in der Ebene  $xOy$  den Winkel  $\varphi$  mit der  $x$ -Axe macht, so ist dies die durch die Axe gehende Verticalebene. Zieht man dann  $OV$  in dieser Ebene derart, dass  $\angle OV = \alpha$  ist, so steht  $OV$  vertical. Die Componenten der Schwere sind daher

$$\begin{aligned} X &= g \sin \alpha \cos \varphi, & Y &= g \sin \alpha \sin \varphi, \\ Z &= g \cos \alpha. \end{aligned}$$

Da die Componenten der Effectivkräfte dieselben sind, als wäre die ganze Masse im Schwerpunkt vereinigt, so erhält man die sechs Bewegungsgleichungen



$$Mg \sin \alpha \cos \varphi \pm F \pm F' = \omega^2 M r \quad (1)$$

$$Mg \sin \alpha \sin \varphi \pm G \pm G' = I M \quad (2)$$

$$Mg \cos \alpha \pm H \pm H' = 0 \quad (3)$$

$$G \alpha \pm G' \alpha' = 0 \quad (4)$$

$$Mg \cos \alpha \pm F \alpha \pm F' \alpha' = 0 \quad (5)$$

$$Mg \sin \alpha \sin \varphi = M r^2 \frac{d^2 \varphi}{dt^2} \quad (6)$$

Integriert man die letzte Gleichung, so wird

$$C \pm 2g \sin \alpha \sin \varphi = I \dot{\varphi}^2$$

Nimmt man an, die Thür sei im Anfangsstande in Ruhe und falle dann mit der Verticalebene durch die Axe den Winkel  $\varphi = \varphi_0$  ( $\varphi_0 = \varphi_1$  oder  $0$ ), also

$$I \dot{\varphi}^2 = 2g \sin \alpha \sin \varphi_0 \pm C \pm I \dot{\varphi}_0^2$$

$$I \dot{\varphi} = \pm \sqrt{2g \sin \alpha \sin \varphi_0 \pm C \pm I \dot{\varphi}_0^2}$$

Durch Substitution der in Art. 106. an die Stelle von  $\varphi$  zu setzenden Winkel findet man  $F, F', G, G'$ .

§ 116. Dynamische und geometrische Symmetrie. Wie man sieht, hängen die Gleichungen in den §§ 111, 112 nicht von der Gestalt des Körpers, sondern nur von seinen Trägheits- und Deviationsmomenten ab. Wir können daher den Körper durch irgend einen andern gleichen Moments ersetzen, der unseren Zwecken am besten entspricht.

Wir werden dadurch oft in den Stand gesetzt, die complicirteren Formen des § 111 auf die einfacheren des § 110 zurückzuführen. Denn wenn auch der Körper bez. einer durch einen Schwerpunkt senkrecht zur Aufhängungsaxe gehenden Ebene nicht symmetrisch ist, so können wir ihn doch so behandeln, als ob er es wäre. Ist z. B. ein Körper nur das Centralellipsoid bez. dieser Ebene symmetrisch, so kann solchen Körper man *dynamisch symmetrisch* nennen. Selbstverständlich die Kräfte bez. derselben Ebene symmetrisch, falls er Fall tritt immer ein, wenn die Aufhängungsaxe horizontal und die Schwere als allein wirkende Kraft ist, so muß man sich, wie wir schon, die Denskräfte auf die Axe unter allen Umständen auf eine einzige Denskraft reduciren lassen, die man mit  $H$  bezeichnen § 119. vgl. unten.

Beisp. 1. Eine gleichschweren, d. h. gleich dichten, Kugel ist eine Kreisanschnitt hat, hängt an einer horizontalen Axe, die durch einen Bogen halbkreisförmigen Radius parallel zur Axe der Kugel verläuft. Die Kugel ist schwerer als die Luft. Man zeige, dass die Denskräfte auf die Axe senkrecht und die Denskräfte tangential sind und gebe die Gleichungen an.

Beisp. 2. Ein gleichschweres, Dichtes, symmetrisches Körper hängt an einer Ebene gelegene Axe; man zeige, dass die Denskräfte auf die Axe eine Kraft äquivalent sind und gebe die Gleichungen an.

§ 117. **Permanente Rotationsachsen.** Nehmen wir an, irgend ein Punkt  $O$  eines Körpers, auf den keine Kräfte wirken, liege im Raum fest und der Körper rotire um eine Axe, die wir  $Oz$  nennen wollen, so kann man danach fragen, unter welchen Bedingungen der Körper gezwungen ist, seine Rotation um diese Axe so, als ob sie im Raum festläge, fortzusetzen. Sind diese Bedingungen erfüllt, so heisst die Axe eine *permanente Rotationsaxe für den Punkt  $O$* .

Um die Bedingungen zu bestimmen, wollen wir annehmen, irgend ein anderer Punkt  $A$  der Axe liege ebenfalls im Raum fest. Auf dieselbe Art wie in den §§ 111, 112 lassen sich alsdann die Druckkräfte bei  $A$ , welche zur Festlegung der Axe nöthig sind, ermitteln. Sind sie gleich Null, so ist die Befestigung an  $A$  überflüssig und kann entfernt werden. Der Körper führt dann fort um  $Oz$  zu rotiren, als läge es im Raum fest.

Da keine gegebenen Kräfte auf den Körper wirken, so rührt der ganze Druck auf die Axe von den Effectivkräften her. Ist die Axe  $Oz$  für irgend einen auf ihr gelegenen Punkt eine Hauptaxe, so greift der von den Effectivkräften herrührende Druck an diesem Punkt an (§ 113). Der Druck bei  $A$  kann folglich nur dann Null sein, wenn dieser Punkt mit  $O$  zusammenfällt. *Die Bedingungen sind daher erfüllt, wenn die Rotationsaxe  $Oz$  für den festliegenden Punkt  $O$  eine Hauptaxe ist.*

Wenn die Axe  $Oz$  für keinen ihrer Punkte eine Hauptaxe ist, so lässt sich beweisen, dass sie keine permanente Rotationsaxe sein kann. Zu diesem Zweck müssen wir auf die Gleichungen (4)', (5)', (6)' in § 111 zurückgreifen.  $F$ ,  $G$ ,  $H$ ;  $F'$ ,  $G'$ ,  $H'$  seien die Druckkräfte bei  $O$  bez.  $A$ . Dann ist  $a = 0$ ,  $a' = OA$ .

Nimmt man die Momente um  $Oz$ , so erhält man  $Mk^2 f = 0$ ; die Winkelgeschwindigkeit des Körpers um die  $Oz$ -Axe ist daher constant. Man findet leicht, dass  $d^2x/dt^2 = -\omega^2 x$ ,  $d^2y/dt^2 = -\omega^2 y$ ,  $d^2z/dt^2 = 0$  ist. Nimmt man die Momente um die  $x$ - und  $y$ -Axe, so ist nach § 71

$$G'a' = \Sigma m \left( y \frac{d^2z}{dt^2} - z \frac{d^2y}{dt^2} \right) = -\omega^2 \Sigma m y z,$$

$$F'a' = \Sigma m \left( z \frac{d^2x}{dt^2} - x \frac{d^2z}{dt^2} \right) = -\omega^2 \Sigma m x z.$$

$F'$  und  $G'$  können daher nur dann verschwinden, wenn  $\Sigma m x z = 0$  und  $\Sigma m y z = 0$  ist, das heisst,  $Oz$  kann nur dann eine permanente Rotationsaxe sein, wenn es eine Hauptaxe für den festen Punkt  $O$  ist.

Die Existenz von Hauptachsen wurde zuerst von Segner in seinem Werk *Specimen Theoriae Turbinum* 1755, Göttingen, festgestellt. Er verfolgte bei seinen Untersuchungen den umgekehrten Weg, den wir hier eingeschlagen haben. Eine Hauptaxe definiert er als eine solche, deren Lage die durch die Rotation eines Körpers um sie entstehenden Kräfte nicht zu ändern suchen und leitet aus dieser dynamischen Definition die geometrischen Eigenschaften dieser Axen ab. Man sehe Prof. Cayley's Bericht an die British Association *on the special problems of dynamics*, 1862 und Bossut, *Histoire des Mathématiques*, Tome II, 1802; deutsch von H. Th. Reimer, Hamburg, 1804.



§ 118. *Auf einen in Ruhe befindlichen Körper, von dem ein Punkt  $O$  im Raum festliegt, wirkt ein Stosskräftepaar; man soll die Anfangsrotationsaxe finden.*

$Oz$  sei die Anfangsaxe. Wie früher wollen wir annehmen, die Axe sei noch an einem andern Punkt  $A$  befestigt, für welchen dann die Druckkräfte gleich Null zu setzen sind. Sind  $L, M, N$  die Componenten des Paares um die Axe, so lautet die Gleichung für die Ebene des Paares

$$L\xi + M\eta + N\xi = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1).$$

$u', v', w'$  seien ferner die Anfangsgeschwindigkeiten eines Elements des Körpers, dessen Coordinaten  $x, y, z$  sind und  $\omega'$  die Anfangswinkelgeschwindigkeit des Körpers. Genau wie in § 112 ist dann  $u' = -y\omega'$ ,  $v' = x\omega'$ . Die Momente um die  $x, y, z$ -Axen liefern die Gleichungen

$$\left. \begin{aligned} L - G'a' &= \Sigma m(yw' - zv') = -\Sigma mxz \cdot \omega' \\ M + F'a' &= \Sigma m(zu' - xw') = -\Sigma myz \cdot \omega' \\ N &= Mk^2 \omega' \end{aligned} \right\}$$

$F', G'$  sind hier, wie früher, die Componenten des Drucks bei  $A$  und  $OA = a'$ . Setzt man  $F' = 0, G' = 0$ , so geben die Gleichungen die Paare an, die auf den Körper wirken müssen, um eine Rotation um  $Oz$  hervorzubringen. Substituirt man alsdann die Werthe von  $L, M, N$  in Gl. (1), so lautet die Gleichung für die Ebene des Paares:

$$-\Sigma mxz \cdot \xi - \Sigma myz \cdot \eta + Mk^2 \cdot \xi = 0 \quad . \quad . \quad . \quad (2).$$

Denkt man sich ferner das Trägheitsellipsoid für den festen Punkt  $O$  construirt, dessen Gleichung

$$A\xi^2 + B\eta^2 + C\xi^2 + 2D\eta\xi - 2E\xi\xi - 2F\xi\eta = K$$

sei, so hat man für die der  $\xi$ -Axe conjugirte Diametralebene die Gleichung

$$-E\xi - D\eta + C\xi = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3),$$

welche, mit (2) verglichen, zeigt, dass die Ebene des resultirenden Paares die der Umdrehungsaxe conjugirte Diametralebene sein muss.

*Wirkt also auf einen Körper, der sich in Ruhe befindet und von welchem ein Punkt festliegt, ein Kräftepaar, so beginnt er um die der Ebene des Paares conjugirte Diametrallinie bez. des Trägheitsellipsoids für den festen Punkt zu rotiren.*

Mithin beginnt ein Körper nur dann um eine auf der Ebene des Paares senkrechte Gerade zu rotiren, wenn die Ebene des Paares einer Hauptebene des Körpers für den festen Punkt parallel ist.

§ 119. Beisp. 1. Ein Körper befinde sich im Zustand der Ruhe, einer seiner Punkte  $O$  liege fest und auf den Körper wirke irgend ein Kräftepaar, dessen Axe ein Radiusvector  $OP$  des reciproken Trägheitsellipsoids für  $O$  ist. Der Körper beginnt sich um ein von  $O$  auf die Berührungsebene in  $P$  gefällttes Loth zu drehen.

Beisp. 2. Auf ein massives homogenes Ellipsoid, dessen Centrum festliegt, wirkt in einer Ebene, deren Richtungscosinusse, auf die Hauptdurchmesser bezogen,  $(l, m, n)$  sind, ein Kräftepaar. Man beweise, dass die Richtungscosinusse der Anfangsrotationsaxe  $\frac{l}{b^2 + c^2}, \frac{m}{c^2 + a^2}, \frac{n}{a^2 + b^2}$  proportional sind.

Beispiel 3. Macht man durch das Trägheitsellipsoid eines Körpers für einen festliegenden Punkt einen ebenen Schnitt, so kann man den Körper um einen der Hauptdurchmesser dieses Schnittes rotiren lassen, wenn man ein Paar von der gehörigen Grösse anbringt, dessen Axe der andere Hauptdurchmesser ist.

Denn: nimmt man an, der Körper drehe sich gleichmässig um die  $z$ -Axe, so sind die Paare, welche auf den Körper wirken müssen, um diese Bewegung hervorzubringen,  $L = \omega^2 \Sigma m y z, M = -\omega^2 \Sigma m x z, N = 0$ . Nimmt man nun die Axe so an, dass  $\Sigma m x z = 0$  wird, so ergibt sich, dass die Axe des Paares die  $x$ -Axe sein muss; seine Grösse ist  $L = \omega^2 \Sigma m y z$ .

Beisp. 4. Man lässt einen Körper, von welchem ein Punkt  $O$  im Raum festliegt, dadurch, dass man das geeignete Paar anbringt, um irgend eine gegebene Gerade rotiren. Die Lage der Rotationsaxe, für welche die Grösse des Paares ein Maximum ist, hat man die *Axe des Maximalmoments* genannt. Man zeige, dass es sechs solche Axen giebt, von denen zwei in jeder Hauptebene liegen und je zwei die Winkel zwischen den Hauptaxen in der Ebene halbiren, in welcher sie liegen.

Sind die Hauptaxen des Körpers für den festliegenden Punkt die Bezugsaxen,  $(l, m, n)$  die Richtungscosinusse der Rotationsaxe,  $(l, \mu, \nu)$  die der Axe des Paares  $G$ , so ist nach der letzten Aufgabe und den Beispielen 2 und 3 in § 18

$$\frac{\lambda}{(B-C)mn} = \frac{\mu}{(C-A)nl} = \frac{\nu}{(A-B)lm}$$

$$G^2 = (A-B)^2 l^2 m^2 + (B-C)^2 m^2 n^2 + (C-A)^2 n^2 l^2.$$

$G$  muss nun zu einem Maximum gemacht werden, indem man  $(l, m, n)$  variiren lässt; zugleich sind  $(l, m, n)$  an die Bedingung gebunden, dass  $l^2 + m^2 + n^2 = 1$  ist. Die Lage dieser Axen wurde zuerst von Walton in dem *Quarterly Journal of Mathematics*, 1865, untersucht.

§ 120. Der Mittelpunkt des Stosses. Wenn die festliegende Axe gegeben ist und der Körper so getroffen werden kann, dass kein Stossdruck auf die Axe entsteht, so heisst jeder Punkt in der Richtungslinie der Kraft ein *Mittelpunkt des Stosses*.

Wenn die Richtung des Stosses gegeben ist, so wollen wir die Axe, um welche der Körper zu rotiren beginnt, die *Axe der spontanen Rotation* nennen. Sie fällt offenbar mit der Lage der festen Axe in dem vorigen Fall zusammen.

Zuerst wollen wir die ebene Bewegung betrachten. Man denke sich eine Lamelle, die sich im Zustand der Ruhe befindet und an einem Punkt  $C$  mit dem Schwerpunkt  $G$  vertical unter  $C$  hängt. Sie werde von einem horizontalen Stoss  $Y$  getroffen, der in der Ebene der Lamelle wirken und an einem Punkt  $A$  in der Verlängerung von  $CG$  eingreifen möge. Sind nun  $CA = a$ ;  $F$  und  $G$  die Stossreactionen an den festen Punkt  $C$ ;  $\omega$  die Winkelgeschwindigkeit des Körpers um  $C$  gerade nach dem Stoss  $Y$ , so erhält man die Bewegungsgleichungen, genau wie in § 110

$$\omega' = \frac{Ya}{M(k^2 + h^2)}, \quad h\omega' = \frac{Y}{M} \frac{1}{h}, \quad 0 = F'.$$

Wenn der Druck  $G$  auf den festliegenden Punkt verschwindet, so erhält man durch Elimination von  $Y$

$$k^2 + h^2 = ah;$$

das heisst also, wie aus § 92 hervorgeht, dass  $A$  das Schwingungscentrum des Körpers sein muss. *Das Schwingungscentrum ist daher ein Mittelpunkt des Stosses.*

**Aufg.** Ein Körper ist im Stande, sich frei um eine festliegende Axe zu drehen. Man soll die Bedingungen angeben, unter welchen ein Centrum des Stosses vorhanden ist und seine Lage bestimmen.

Die feste Axe sei die  $z$ -Axe; die  $xz$ -Ebene gehe durch den Schwerpunkt des Körpers;  $X, Y, Z$  seien die Componenten der Stosskraft und  $\xi, \eta, \zeta$  die Coordinaten eines Punktes auf ihrer Actionsrichtung;  $Mk^2$  das Trägheitsmoment des Körpers für die feste Axe. Wir haben nun den Druck auf die Axe zu ermitteln, denselben gleich Null zu setzen und erhalten auf diese Art die Bedingungen für die Existenz eines Centrum des Stosses. Da das Verfahren im Wesentlichen dasselbe ist, wie in § 113 und § 117, so wird es nicht nöthig sein, dasselbe Schritt für Schritt zu wiederholen. Setzt man  $q = 0$  und lässt die Stosdruckkräfte auf die Axe weg, da sie nach der Voraussetzung der Null gleichgesetzt werden sollen, so lauten die sechs Bewegungsgleichungen des § 112

$$\left. \begin{aligned} X = 0, \quad Y = Mx\omega', \quad \omega' = \omega, \quad Z = 0 \\ \eta Z - \zeta Y = (\omega' - \omega) \Sigma m xz \\ \zeta X - \xi Z = (\omega' - \omega) \Sigma m yz \\ \xi Y - \eta X = (\omega' - \omega) Mk^2 \end{aligned} \right\}$$

Aus diesen Gleichungen lassen sich die folgenden Bedingungen ableiten:

I. Aus (1) ist ersichtlich, dass  $X = 0, Z = 0$  ist; die Kraft muss daher senkrecht zur Ebene wirken, welche die Axe und den Schwerpunkt enthält.

II. Substituiert man aus (1) in die beiden ersten Gleichungen von (2), so erhält man  $\Sigma m yz = 0$  und  $\xi = \frac{\Sigma m xz}{Mx}$ . Da man den Coordinatenanfang beliebig

auf der Rotationsaxe annehmen kann, so mag er so gewählt werden, dass  $\Sigma m xz = 0$  ist. Die  $z$ -Axe muss daher eine Hauptaxe für den Punkt sein, zu welchem eine durch die Richtungslinie des Stosses senkrecht zur Axe gehende Ebene die Axe schneidet. *Es gibt also nur dann ein Centrum des Stosses, wenn die Axe für irgend einen auf ihr liegenden Punkt eine Hauptaxe ist.*

III. Substituiert man aus (1) in die letzte Gleichung von (2), so wird  $\xi = \frac{L^2}{Mk^2}$ .

Nach § 92 bestimmt diese Gleichung das Schwingungscentrum des Körpers um die feste Axe, wenn man sie als Aufhängungsaxe behandelt. Dabei muss der senkrechte Abstand zwischen der Richtungslinie des Stosses und der festen Axe der Abstand des Schwingungscentrums von der Axe gleich sein.

Ist die feste Axe einer Hauptaxe für den Schwerpunkt parallel, so geht die Richtung des Stosses durch das Schwingungscentrum.

**Beisp. 1.** Eine Kreislamelle ruht auf einem glatten horizontalen Tisch; wie muss sie getroffen werden, damit sie sich um einen Punkt ihrer Peripherie zu drehen anfängt? Die Richtung des Stosses muss den zu ihr senkrechten Durchmesser im Verhältniss 3 : 1 theilen.

Beisp. 2. Ein Pendel besteht aus einer Kugel (Radius  $a$ , Masse  $M$ ), die an dem Ende einer dünnen Stange (Länge  $b$ , Masse  $m$ ) befestigt ist. Wo muss es bei jeder Schwingung gestossen werden, wenn der Stützpunkt durch Stossdruckkräfte nicht abgenutzt werden soll? Der Punkt liegt in einem Abstand  $l$  vom Stützpunkt, welcher sich aus

$$\left[ M(a+b) + \frac{1}{2} mb \right] l = M \left[ \frac{2}{5} a^2 + (a+b)^2 \right] + \frac{1}{8} mb^2$$

ergibt.

§ 121. Das ballistische Pendel. Für die Ballistik ist die Bestimmung der Geschwindigkeit, mit welcher die Kugel den Lauf verlässt, von der grössten Wichtigkeit. Man erhält dadurch eine vollkommene Probe auf die Richtigkeit der Vorstellungen, die man sich von der Bewegung der Kugel im Laufe glaubt machen zu müssen und kann so durch den Versuch selbst feststellen, welche Wirkung eine Aenderung der Länge des Laufes, der Pulverladung oder des Gewichts der Kugel hat. Aus der Bestimmung der Geschwindigkeit einer Kugel in verschiedenen Entfernungen von dem Geschütz lassen sich ferner die Gesetze ableiten, denen der Widerstand der Luft unterliegt.

Es waren dies die Zwecke, die Robins mit der Erfindung des *ballistischen Pendels* (etwa 1743) verfolgte. Vor seiner Zeit hatte man nur geringe Fortschritte in der Theorie der Bewegung der Geschosse gemacht. Seine *New Principles of Gunnery* wurden von Euler in's Deutsche übersetzt und mit einem ausführlichen Commentar versehen. Euler's Werk wurde dann 1784 wieder in's Englische übersetzt. Robin's Versuche wurden mit Gewehrkuugeln von ungefähr 28 Gramm Gewicht angestellt und später während mehrerer Jahre von Dr. Hutton 1778 fortgesetzt, der Kanonenkuugeln von einem halben bis etwa anderthalb Kilogramm Schwere benutzte.

Es gibt zwei Arten, das ballistische Pendel anzuwenden, die beide von Robins gebraucht wurden. Bei der ersten wird das Geschütz an ein sehr schweres Pendel befestigt; wird es abgefeuert, so veranlasst der Rückstoss das Pendel, sich um seine Axe zu drehen und einen Bogen zu beschreiben, der gemessen werden kann. Die Geschwindigkeit der Kugel lässt sich dann aus der Grösse des Bogens ableiten. Bei der zweiten Methode wird die Kugel auf ein schweres Pendel abgefeuert. Die Geschwindigkeit des Geschosses selbst ist zu gross, als dass man sie direct messen könnte; dagegen kann man die dem Pendel mitgetheilte Winkelgeschwindigkeit durch Vergrösserung seiner Masse so klein machen, wie man nur will. Wird dann der Schwingungsbogen gemessen, so findet man die Geschossgeschwindigkeit durch Rechnung.

Die Anfangsgeschwindigkeit kleiner Kugeln kann man auch durch den folgenden sinnreichen Apparat feststellen. Man befestigt zwei kreisförmige Papierscheiben senkrecht zu der geraden Linie, die ihre Mittelpunkte verbindet und lässt sie um diese Gerade mit grosser und bekannter Winkelgeschwindigkeit rotiren. Statt zweier Scheiben kann man auch einen Papiercylinder benutzen. Wird nun die Kugel durch

wenigstens zwei der rotirenden Flächen geschossen, so kann man ihre Geschwindigkeit berechnen, indem man die Lage der beiden kleinen Löcher, welche durch die Kugel gemacht wurden, beobachtet. Es ist dies eine ursprünglich italienische Erfindung. Sie wurde im Anfang dieses Jahrhunderts von Olinthus Gregory verbessert und benutzt.

Heutigen Tages wird der electriche Telegraph benutzt, um den Moment zu bestimmen, in welchem eine Kugel jeden einzelnen von hintereinander aufgestellten Schirmen durchbohrt. Die Kugel zerreisst einen feinen über den Schirm gespannten Draht und unterbricht so einen electriche Strom. Dies veranlasst dann ein besonders zu diesem Zweck hergestelltes Instrument, die Zeit des Durchganges aufzuzeichnen. Dadurch, dass man verschiedene Schirme aufstellt, kann man die Geschwindigkeit der Kugel an verschiedenen Punkten ihrer Bahn finden.

Das ballistische Pendel ist jetzt mehr von theoretischer und historischer als praktischer Bedeutung. Die beiden jetzt hauptsächlich zu Beobachtungen über die Geschwindigkeit von Kugeln benutzten Instrumente sind der von Bashford erfundene und von der englischen Regierung gebrauchte und der von dem belgischen Artilleriemajor Le Boulengé construirte Chronograph.

§ 122. *Ein Gewehr wird in horizontaler Lage an einen grossen Holzblock befestigt, der sich frei um eine horizontale Axe drehen kann. Wird der Schuss abgefeuert, so veranlasst der Rückstoss das Pendel, sich um seine Axe zu drehen, bis es durch die Wirkung der Schwere zur Ruhe kommt. Ein Streifen Leinwand ist an das Pendel befestigt und wird von einer Rolle während der Rückwärtsbewegung des Pendels abgezogen und dient so zum Messen des Rücklaufwinkels. Man soll die Geschwindigkeit der Kugel finden.*

Die Anfangsgeschwindigkeit der Kugel ist um so viel grösser als die des Pendels, dass man annehmen kann, die Kugel habe den Lauf verlassen, ehe das Pendel sich merklich aus seiner Anfangslage entfernt hat. Die anfängliche Bewegungsgrösse der Kugel kann man als Mass des dem Pendel gegebenen Stosses betrachten.

$h$  sei der Abstand des Schwerpunktes von der Aufhängungsaxe,  $f$  der Abstand der Axe des Gewehrs von der Aufhängungsaxe,  $c$  der Abstand der Aufhängungsaxe von dem Befestigungspunkt des Leinwandstreifens,  $m$  die Masse der Kugel,  $M$  die des Pendels und des Gewehrs zusammen,  $n$  das Verhältniss von  $M$  zu  $m$ ,  $b$  die Sehne des Rücklaufbogens, welche durch die Leinwand gemessen wird,  $k$  der Trägheitsradius des Gewehrs und Pendels für die Aufhängungsaxe und  $v$  die Anfangsgeschwindigkeit der Kugel.

Die Explosion des Pulvers erzeugt gleiche Stosswirkungen auf die Kugel und auf das Gewehr und da die Anfangsgeschwindigkeit der Kugel  $v$  ist, so wird diese Wirkung durch  $mv$  gemessen. Die durch den Stoss hervorgerufene Anfangswinkelgeschwindigkeit des Pendels ist

nach § 89  $\omega = mvf/Mk^2$ . Die nun folgende Bewegung ist durch die Gleichung gegeben (vergl. § 92)

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} = -\frac{gh}{k^2} \sin \theta,$$

also ist

$$\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 = C + \frac{2gh}{k^2} \cos \theta.$$

Da für  $\theta = 0$ ,  $d\theta/dt = \omega$  und, wenn  $\alpha$  den Rücklaufwinkel bezeichnet, für  $\theta = \alpha$ ,  $d\theta/dt = 0$  ist, so erhält man  $k^2\omega^2 = 2gh(1 - \cos \alpha)$ . Eliminirt man  $\omega$ , so wird  $v = \frac{nk'}{f} \cdot 2 \sin \frac{\alpha}{2} \sqrt{gh}$ . Die Sehne des Rücklaufbogens ist aber  $b = 2c \sin \frac{\alpha}{2}$ . Daher die Anfangsgeschwindigkeit der Kugel  $v = \frac{nbk'}{cf} \sqrt{gh}$ .

Die Grösse von  $k'$  lässt sich durch Versuche ermitteln, indem man die Zeit einer kleinen Oscillation des Pendels mit dem Gewehr beobachtet.

Ist  $T$  die halbe Zeit, so erhält man  $T = \pi \sqrt{\frac{k'^2}{gh}}$  (§ 97).

Diese Formel hat Poisson in dem zweiten Band seiner Mechanik aufgestellt. In dem *Philosophical Magazine*, Juni 1854, findet man einen Bericht über Versuche, die Dr. S. Haughton angestellt hat, aus welchen mit Hülfe dieser Formel die Anfangsgeschwindigkeiten von Gewehrkugeln berechnet wurden.

§ 123. Die Formel darf man jedoch nur als eine erste Annäherung betrachten, denn der Rücklauf, den das entzündete Pulver allein veranlasst, wird dabei vernachlässigt. Um ihm Rechnung zu tragen, nahm Hutton an, dass die Wirkung einer gegebenen Pulverladung auf den Rücklauf des Geschützes dieselbe mit wie ohne Kugel sei.  $p$  sei die unbekannte durch das Pulver in jedem der beiden Fälle erzeugte Bewegungsgrösse. Dadurch, dass er bei gleicher Ladung den Versuch zuerst mit und dann ohne Kugel machte und  $mv + p$  bez.  $p$  statt  $mv$  bei den beiden Versuchen setzte, war er im Stande,  $p$  zu eliminiren und den Werth von  $v$  abzuleiten. Bei grossen Pulverladungen stimmten die so erhaltenen Resultate nicht hinreichend mit denen überein, die man durch das Abschiessen einer Kugel in ein Pendel erhält (§ 124). Die Annahme wurde daher durch die Versuche nicht vollständig bestätigt und weitere Correctionen waren nöthig.

§ 124. *Ein Geschütz wird einem schweren Pendel gegenübergestellt, welches sich frei um eine horizontale Axe drehen kann. Die Kugel trifft das Pendel in horizontaler Richtung, dringt eine kurze Strecke in das Holz ein und ertheilt dem Pendel eine Bewegungsgrösse. Wenn die Sehne des Bogens wie zuvor durch einen Leinwandstreifen gemessen wird, wie findet man die Geschwindigkeit der Kugel?*

Die Zeit, welche die Kugel gebraucht, um in das Holz einzudringen, ist so kurz, dass man annehmen kann, sie sei verstrichen, ehe das Pendel sich merkbar aus seiner Anfangslage entfernt hat.

$i$  sei der Abstand der Kugel von der Aufhängungsaxe in dem Moment, in welchem ihr Eindringen in das Pendel aufhört;  $j$  der senkrechte Abstand zwischen der Axe und der Bewegungsrichtung der Kugel;  $\beta$  der Winkel, den die Länge  $j$  mit der durch  $i$  dargestellten Länge macht, so dass also  $j = i \cos \beta$  ist. Behalten

wir dieselbe Bezeichnung wie früher bei, so ist in dem Augenblick, in welchem der Zusammenstoss der beiden Körper beendet ist,

$$mvi \cos \beta = (Mk'^2 + mi^2) \omega$$

und auf dieselbe Weise, wie zuvor, findet man

$$(Mk'^2 + mi^2) \omega^2 = 2Mgh(1 - \cos \alpha) + 2mgi[\cos \beta - \cos(\alpha - \beta)].$$

Wenn das Gewehr so nahe als möglich dem Schwerpunkt des Pendels gegenübergestellt wird, so ist nahezu  $h = j$  und wenn das Pendel lang genug ist, der Winkel  $\beta$  sehr klein. Da nun ferner  $m$  im Vergleich mit  $M$  klein ist, so kann man als Annäherung  $i = h$  und  $\beta = 0$  in den Gliedern der Gleichung setzen, die  $m$  als Factor enthalten und findet so

$$v = \frac{M + m}{m} \frac{bh}{cj} \sqrt{gl},$$

unter  $l$  den Abstand des Schwingungsmittelpunkts des Pendels und der Kugel von der Aufhängungsaxe verstanden.

Das Unbequeme bei diesem Verfahren im Vergleich mit dem vorigen liegt darin, dass die Kugeln während einer ganzen Reihe von Versuchen in dem Pendel sitzen bleiben. Das Gewicht, die Lage des Schwerpunkts und Schwingungscentrums ändern sich mit dem Einschlagen einer jeden neuen Kugel in das Holz. Auch werden die Aenderungen, welche in dem Pendel selbst bei jedem Schuss vor sich gehen, vernachlässigt. Die Franzosen haben bei ihren Versuchen in Metz 1839 und L'Orient 1842 eine grosse Verbesserung angebracht. Die Holzmasse des englischen Pendels, welche oft erneuert werden musste, wurde durch einen permanenten *récepteur* ersetzt. Dieser Recipient hatte die Gestalt eines abgestumpften Kegels und war so lang, dass die Kugel nicht vollständig durch den Sand dringen konnte, mit dem er gefüllt war. Die vordere Seite war mit einer dünnen Bleiplatte geschlossen, welche das Herausfallen des Sandes verhinderte. In diese Platte war eine horizontale und eine verticale Linie gerissen, deren Durchschnittspunkt der Axe des Kegels entsprach. Man konnte auf diese Weise die wirkliche Lage der Kugel beim Eintreten in den Recipienten leicht bestimmen.

§ 125. Beisp. 1. Man zeige, dass nach jedem Schuss in ein auf englische Art construirtes ballistisches Pendel zur Aufstellung der Formel für den nächsten Schuss  $h$  um nahezu  $\frac{m}{M}(j - h)$  und  $l$  um  $\frac{m}{M}(j - l)$  vergrössert werden muss.

Beisp. 2. Dr. Haughton fand, dass bei constanter Ladung die Anfangsgeschwindigkeit der Kugel sich umgekehrt wie die Quadratwurzel aus der Masse der Kugel und in geradem Verhältniss mit der Quadratwurzel aus der Länge des Laufs ändert. Man beweise daraus, dass die durch die Explosion des Pulvers entwickelte Kraft um die Reibung im Innern des Laufs vermindert, während des Durchgangs der Kugel durch die Seele constant bleibt.

Dr. Hutton fand, dass in glatten Läufen die Geschwindigkeit in einem Verhältniss zunimmt, das etwas kleiner als die Quadratwurzel, aber grösser als die Cubikwurzel aus der Länge des Laufs ist.

Beisp. 3. Die Geschwindigkeit einer Kugel beim Verlassen der Mündung eines 76 cm langen Gewehrs sei 305 m in der Secunde. Man zeige, dass die Zeit, welche die Kugel zum Passiren des Gewehrs braucht, etwa  $\frac{1}{200}$  einer Secunde beträgt.

Beisp. 4. Durch Versuche hat man festgestellt, dass bei einem Schuss in einen grossen festliegenden Holzblock, die Eindringungstiefe der Kugel in das Holz wenigstens für nicht zu grosse Geschwindigkeiten nahezu wie das Quadrat der Geschwindigkeit variirt. Man zeige, dass der dem Eindringen geleistete

Widerstand, wenn man diese Regel gelten lässt, constant ist und dass die Zeit des Eindringens durch das Verhältniss der doppelten Tiefe zu der Anfangsgeschwindigkeit der Kugel ausgedrückt wird. Bei einem von Dr. Hutton angestellten Versuch drang eine Kugel, die mit einer Geschwindigkeit von 457 m in der Secunde abgefeuert wurde, etwa 36 cm in einen Block von gesundem, trockenem Ulmholz; man zeige, dass die Eindringungszeit  $\frac{1}{643}$  einer Secunde betrug.

§ 126. Das Anemometer. Das Robinson'sche Anemometer besteht aus vier halbkugelförmigen Bechern, die an vier horizontalen um eine verticale Axe rotirenden Armen befestigt sind. Der Wind bläst auf der einen Seite der Axe in die Höhlungen und auf der andern gegen die convexen Flächen der Becher. Bewegt sich das Anemometer vom Zustand der Ruhe aus, so dreht es sich immer schneller herum, bis das Moment der Druckkräfte des Windes dem Moment der Widerstandskräfte das Gleichgewicht hält. Ist  $V$  die Geschwindigkeit des Windes,  $v$  die der Mittelpunkte der Becher und  $\theta$  der Winkel zwischen der Bewegungsrichtung irgend eines Bechers und der Richtung des Windes, so ist die relative Geschwindigkeit  $v'$  des Centrums dieses Bechers in Bezug auf den Wind

$$v'^2 = v^2 - 2Vv \cos \theta + V^2 \quad \dots \dots \dots (1).$$

Die Bestimmung des Winddrucks auf die Becher ist eigentlich eine Aufgabe der Hydrodynamik; eine Lösung ist aber bis jetzt noch nicht gefunden worden. Inzwischen kann man das Gesetz als annähernd richtig annehmen, das man aus zahlreichen Versuchen gefolgert hat, dass nämlich der Widerstand, den ein Körper bei geradliniger Bewegung durch eine Flüssigkeit findet, dem Quadrat seiner relativen Geschwindigkeit proportional ist. In den verschiedenen Lagen des Anemometers haben die Theile eines Bechers verschiedene relative Geschwindigkeiten gegen den Wind. Wir wollen daher das Moment des resultirenden Winddrucks um die Axe des Anemometers durch eine quadratische Function von  $V$  und  $v$  ausdrücken, z. B.

$$\alpha V^2 + 2\beta Vv + \gamma v^2 \quad \dots \dots \dots (2),$$

worin  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$  auf irgend eine noch unbekannte Art von der Lage der Becher in Bezug auf den Wind abhängen.

$\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$  sind also Functionen von  $\theta$  und ändern sich mit der Rotation der Becher um die Axe. Wir haben jedoch die Durchschnittswirkung auf das Anemometer nöthig. Den mittleren Werth für die Wegeinheit findet man dadurch, dass man (2) mit  $d\theta$  multiplicirt, von  $\theta = 0$  bis  $\theta = 2\pi$  integrirt und schliesslich durch  $2\pi$  dividirt. Bedeutet  $F$  das mittlere Moment des Winddrucks um die Axe des Anemometers, so erhält man

$$F = AV^2 - 2B Vv - Cv^2 \quad \dots \dots \dots (3),$$

worin  $A$ ,  $B$ ,  $C$  Constante sind, die von der Gestalt des Anemometers abhängen und deren Vorzeichen sich auf folgende Art bestimmen lassen. Das Anfangsmoment des Winddrucks beim Beginn der Bewegung des bisher in Ruhe befindlichen Anemometers wird als positiv angesehen. Fangen nun die Becher an, sich zu drehen, so nimmt der Druck ab, so dass also, für ein kleines  $v$ ,  $\frac{dF}{dv}$  negativ sein muss, woraus folgt, dass das Vorzeichen des Coefficienten von  $Vv$  in (3) negativ ist. Wenn schliesslich der Wind aufhört zu blasen, während die Becher noch in Bewegung sind, also für  $V = 0$ , sucht der Widerstand der ruhigen Luft die Bewegung zum Stillstand zu bringen. Der Coefficient von  $v^2$  in (3) muss daher ebenfalls negativ sein.

§ 127. Wenn das Anemometer seinen schliesslichen Bewegungszustand erreicht hat, so ist  $F$  dem mittleren Moment der Reibung auf den Stützen gleich.



Ist das Instrument so construiert, dass die durch sein Gewicht entstehende Reibung so klein als möglich ist, so können wir diese Reibung um so eher vernachlässigen, als unsre Formel nur eine Annäherung ist. Die Stützen des Anemometers haben dann nur den Seitendruck des Windes auszuhalten. Wahrscheinlich ist aber der grössere Theil der so entstandenen Reibung dem Druck des Windes proportional und kann in Formel (3) dadurch einbegriffen werden, dass man die Constanten ändert. Da diese nun durch Versuche bestimmt werden, so lässt sich annehmen, alle Kräfte, die quadratische Functionen der Geschwindigkeiten sind, seien in dem Ausdruck für  $F$  enthalten.

Im Observatorium zu Greenwich wird ein in Oel auf einer konischen festliegenden Spitze rotirender hohler verticaler Zapfen als Stütze benutzt. Eine Correction für die Reibung findet weiter nicht statt. Die Anordnung scheint von gutem Erfolg zu sein, da das Instrument sehr empfindlich ist und schon bei sehr schwachem Luftzug eine langsame Rotation zeigt.

Setzt man  $F=0$ , so erhält man eine quadratische Gleichung zur Bestimmung des Verhältnisses von  $V$  zu  $v$ . Ist  $m$  die so gefundene positive Wurzel und hat man die Geschwindigkeit des Centrums eines Bechers beobachtet, so findet man die Winkelgeschwindigkeit, wenn man die beobachtete Grösse einfach mit  $m$  multiplicirt. Wie man sieht, ist  $m$  zwar von der Geschwindigkeit des Windes und der Grösse des Instruments unabhängig, hängt aber von der Gestalt des letzteren ab.

§ 128. Man hat verschiedene Versuche angestellt, um den Zahlenwerth von  $m$  zu bestimmen. Bei einigen hat man das Anemometer an die äussere Kante eines sich drehenden Maschinenrades befestigt. Die Axe des Anemometers bewegt sich auf diese Art mit einer constanten Geschwindigkeit  $V$ . Wird der Versuch an einem windstillen Tag gemacht, so erhält man die Wirkung eines Windes von derselben Geschwindigkeit auf ein feststehendes Anemometer. Der Werth von  $v$  wird dann ermittelt, indem man die Anzahl der Umdrehungen des Anemometers im Raum zählt. In einer im Jahr 1850 in den *Irish Transactions* erschienenen Abhandlung gibt Dr. Robinson  $m=3$  als den mittleren Werth des Verhältnisses an, wie er aus Experimenten dieser Art sich ergab. Dieser Werth von  $m$  ist allgemein adoptirt worden.

Andere Versuche, welche im Greenwich Park 1860 angestellt wurden, haben denselben Werth von  $m$  ergeben und machen die Genauigkeit dieses Verhältnisses in sehr hohem Grad wahrscheinlich. Siehe die *Greenwich Observations*, 1862. Weitere im Jahr 1872 mit einem Dampfcaroussel ausgeführte Experimente sind von Sir G. Stokes in den *Proceedings of the Royal Society*, Mai 1881, beschrieben worden.

Die Seewarte in Hamburg besitzt einen Anemometerprüfungsapparat, auf dem die Anemometer in Deutschland geprüft werden. Er besteht aus einem grossen Arm, der sich um eine verticale Axe dreht und an dem einen Ende das zu prüfende Anemometer, an dem andern ein Gegengewicht trägt. Man kann ihm verschiedene Geschwindigkeiten, den Windstärken entsprechend, geben und dann die Tourenzahl des Anemometers messen.

Eine andere Art, diese Versuche auszuführen, besteht darin, dass man zwei ähnliche Anemometer um festliegende Axen rotiren lässt und an dem einen eine bekannte verzögernde Kraft irgend welcher Art, die sein  $v$  zu verkleinern im Stande ist, anbringt. Wir haben alsdann aus zwei verschiedenen Maschinen, die mit ungleichen aber bekannten Geschwindigkeiten sich um ihre bezügliche Axen drehen, dieselbe Geschwindigkeit des Windes abzuleiten. Man erhält dadurch zwei Gleichungen und nach der Elimination der unbekannten Windgeschwindigkeit eine Gleichung zwischen den Constanten  $A$ ,  $B$ ,  $C$  und der bekannten verzögernden Kraft. Durch Wiederholung des Experiments gelangt man zu einer

## Kapitel IV.

### Ebene Bewegung.

§ 130. Die Bewegungsgleichungen. Die Lage eines Körpers in einem Raum von zwei Dimensionen kann durch die Coordinaten seines Schwerpunkts und den Winkel bestimmt werden, den eine im Körper mit einer im Raum festliegenden Geraden macht. Wir haben die drei Bestimmungsstücke die Coordinaten des Körpers genannt und wollen sie nun als Functionen der Zeit ausdrücken.

Dazu ist es nöthig, die Effectivkräfte des Körpers durch die Coordinaten auszudrücken. Ihre Componenten parallel zu den Axen sind bereits in § 78 ermittelt worden, es ist also nur noch ihr Moment um den Schwerpunkt zu finden. Sind  $(x', y')$  die Coordinaten eines Massenpunktes  $m$  auf rechtwinklige sich im Schwerpunkt schneidende Axen bezogen, die den im Raum festliegenden Axen parallel laufen, so ist dieses Moment, wie in § 74 gezeigt wurde, gleich  $dh/dt$ , wo

$$h = \Sigma m \left( x' \frac{dy'}{dt} - y' \frac{dx'}{dt} \right)$$

ist.

Ist  $\theta$  die „Winkelcoordinate“ des Körpers, d. h. der Winkel, den eine im Körper mit einer im Raum festliegenden Geraden bildet, und sind  $(r', \varphi')$  die Polarcoordinaten eines Massenpunktes  $m$  für einen Schwerpunkt des Körpers als Coordinatenanfang, so ist  $r'$  während der ganzen Bewegung constant und  $d\varphi'/dt$  für jeden Punkt des Körpers dasselbe und gleich  $d\theta/dt$ . Somit ist der Winkelbewegungsgrösse  $h$  gegeben wie in § 88

$$\begin{aligned} h &= \Sigma m \left( x' \frac{dy'}{dt} - y' \frac{dx'}{dt} \right) = \Sigma m \left( r'^2 \frac{d\varphi'}{dt} \right) = \\ &= \Sigma m r'^2 \frac{d\varphi'}{dt} = Mk^2 \frac{d\theta}{dt}, \end{aligned}$$

wenn man unter  $Mk^2$  das Trägheitsmoment des Körpers bez. seines Schwerpunkts versteht.

$\theta$  ist der Winkel, den eine im Körper mit einer im Raum festliegenden Geraden bildet. Welche gerade Linien man auch wählen mag,  $d\theta/dt$  bleibt immer dasselbe. Leuchtet dies nicht schon von selbst ein, so lässt es sich auf folgende Art beweisen.  $OA, OA'$  seien irgend zwei im Körper festliegende Gerade, die den Winkel  $\alpha$  einschliessen

$OB$ ,  $OB'$  zwei in der Ebene festliegende unter dem Winkel  $\beta$  gegen-  
einander geneigte Gerade; es sei  $AOB = 0$ ,  $A'O'B' = 0'$ , dann  
ist  $0' + \beta = 0 + \alpha$  und da  $\alpha$  und  $\beta$  von der Zeit unabhängig sind,  
 $d\theta/dt = d0'/dt$ . Aus diesem Satz geht hervor, dass die Winkel-  
geschwindigkeiten eines Körpers in einem Raum von zwei Dimensionen  
um alle Punkte dieselben sind.

§ 131. Die allgemeine Methode des Verfahrens ist wie folgt:

Sind  $(x, y)$  die Coordinaten des Schwerpunkts eines Körpers des  
Systems auf rechtwinklige im Raum festliegende Axen bezogen und  
 $M$  die Masse des Körpers, so sind die Effectivkräfte des Körpers zu-  
sammen zweien Kräften äquivalent, die durch  $M \frac{d^2x}{dt^2}$ ,  $M \frac{d^2y}{dt^2}$  ge-  
messen werden und am Schwerpunkt parallel den Coordinatenaxen an-  
greifen, und ausserdem einem Kräftepaar, das durch  $Mh^2 \frac{d^2\theta}{dt^2}$  gemessen  
wird und den Körper um seinen Schwerpunkt in der Richtung, in  
welcher  $\theta$  genommen wird, zu drehen sucht. Nach D'Alembert's  
Princip sind die Effectivkräfte aller Körper, in umgekehrter Richtung  
genommen, mit den gegebenen Kräften im Gleichgewicht. Die dyna-  
mischen Gleichungen kann man dann nach den gewöhnlichen Regeln  
der Statik aufstellen. Siehe § 82.

Wir wollen die Kräfte parallel zur  $x$ - und  $y$ -Axe zerlegen und  
die Momente auf den Schwerpunkt beziehen; sind dann die gegebenen  
am Körper angreifenden Kräfte zusammen mit den von den übrigen  
Körpern herrührenden Reactionen, wenn solche vorhanden sind, den auf  
den Schwerpunkt wirkenden Kräften  $X$  und  $Y$  und einem Paar  $L$   
gleichwerthig, so sind die Bewegungsgleichungen dieses Körpers offenbar

$$M \frac{d^2x}{dt^2} = X, \quad M \frac{d^2y}{dt^2} = Y, \quad Mh^2 \frac{d^2\theta}{dt^2} = L.$$

In der Statik ist es von Vortheil, auch nach andern Richtungen  
als den Axen zerlegen und die Momente um einen beliebigen Punkt,  
der uns wünschenswerth scheint, nehmen zu können. Man kann damit  
die Lösung oft sehr abkürzen und vereinfachen. Wollen wir z. B. die  
Einführung einer unbekannten Reaction in unsere Gleichungen ver-  
meiden, so nehmen wir die Momente um ihren Angriffspunkt oder  
machen Gebrauch von dem Princip der virtuellen Geschwindigkeiten.  
Es steht uns also auch in der Dynamik frei, unsere Kräfte zu zerlegen  
und die Momente zu nehmen, wie wir wollen. Beziehen wir z. B. die  
Momente auf einen Punkt  $C$ , dessen Coordinaten  $(\xi, \eta)$  sind, so erhalten  
wir eine Gleichung von der Form

$$M \left[ (x - \xi) \frac{d^2y}{dt^2} - (y - \eta) \frac{d^2x}{dt^2} \right] + Mh^2 \frac{d^2\theta}{dt^2} = L',$$

worin  $L'$  das Moment der gegebenen Kräfte um den Punkt  $C$  ist. In  
dieser Gleichung sind  $(\xi, \eta)$  die Coordinaten eines beliebigen Punktes  
und es ist gleichgültig, ob er festliegt oder sich bewegt.

Bei der Zerlegung der Kräfte können wir die Ausdrücke für die Cartesischen Coordinaten durch die Formen für Polarcoordinaten  $M \left[ \frac{d^2 r}{dt^2} - r \left( \frac{d\varphi}{dt} \right)^2 \right]$  und  $M \frac{1}{r} \frac{d}{dt} \left( r^2 \frac{d\varphi}{dt} \right)$  für die Componenten parallel und senkrecht zum Radiusvector ersetzen. Ist  $v$  die Geschwindigkeit des Schwerpunkts,  $\rho$  der Krümmungsradius seiner Bahn, so lassen sich manchmal auch die Formen  $M \frac{dv}{dt}$  und  $M \frac{v^2}{\rho}$  für die Componenten der Effectivkräfte längs der Tangente und des Radiusvectors der Bahn des Schwerpunkts mit Vortheil benutzen.

Als Anleitung zur richtigen Auswahl der Richtungen, in welche die Kräfte zu zerlegen oder der Punkte, um welche die Momente zu nehmen sind, lassen sich zwei wichtige Fälle erwähnen.

§ 132. *Erstens soll man zu ermitteln suchen, ob eine im Raum festliegende Richtung existirt, für welche die Componenten der gegebenen Kräfte verschwinden.* Zerlegt man in dieser Richtung, so erhält man eine Gleichung, die sich sofort integriren lässt. Hat z. B. die  $x$ -Axe diese Richtung und sind  $M, M', \text{etc.}$  die Massen der verschiedenen Körper;  $x, x', \text{etc.}$  die Abscissen ihrer Schwerpunkte, so ergibt sich nach § 77 oder 131

$$M \frac{d^2 x}{dt^2} + M' \frac{d^2 x'}{dt^2} + \dots = 0$$

und durch Integration

$$M \frac{dx}{dt} + M' \frac{dx'}{dt} + \dots = C,$$

worin  $C$  eine Constante ist, die durch die Anfangsbedingungen sich finden lässt. Wenn nöthig, kann man die Gleichung noch einmal integriren.

Man hätte dieses Resultat auch aus dem allgemeinen Princip der Erhaltung der Translationsbewegung des Schwerpunkts in § 78 ableiten können. Denn da es keine bewegende Kraft parallel zur  $x$ -Axe gibt, so ist die Geschwindigkeitscomponente des Schwerpunkts *des ganzen Systems* in dieser Richtung constant.

§ 133. *Alsdann soll man zu ermitteln suchen, ob es einen im Raum festliegenden Punkt gibt, für welchen das Moment der gegebenen Kräfte verschwindet.* Nimmt man die Momente um diesen Punkt, so erhält man wieder eine Gleichung, die sich sofort integriren lässt. Wählt man den Punkt als Coordinatenanfang und haben die Buchstaben ihre gewöhnliche Bedeutung, so ist nach dem ersten Paragraphen dieses Kapitels

$$\Sigma \left[ M \left( x \frac{d^2 y}{dt^2} - y \frac{d^2 x}{dt^2} \right) + M k^2 \frac{d^2 \theta}{dt^2} \right] = 0,$$

wobei  $\Sigma$  die Summirung für alle Körper des Systems angibt. Durch Integration erhält man

$$\Sigma \left[ M \left( x \frac{dy}{dt} - y \frac{dx}{dt} \right) + M k^2 \frac{d\theta}{dt} \right] = C,$$

unter  $C$  eine Constante verstanden, die durch die Anfangsbedingungen der Aufgabe zu bestimmen ist.

Diese Gleichung sagt aus, dass, wenn die gegebenen Kräfte kein Moment um einen Punkt haben, die Winkelbewegungsgrösse um diesen Punkt während der Bewegung constant bleibt. Es folgt dies auch sofort aus § 77.

§ 134. Die Winkelbewegungsgrösse. Da wir die durch Bildung der Momente entstehende Gleichung so oft nöthig haben, so ist es wichtig, auch andere Formen, die man ihr geben kann, in Betracht zu ziehen. *Liegt* der Punkt, für welchen die Momente gebildet werden, *im Raum fest*, so dass er als Anfangspunkt der Coordinaten gewählt werden kann, so ist das Moment der Effectivkräfte am Körper  $M$

$$\frac{d}{dt} \left[ M \left( x \frac{dy}{dt} - y \frac{dx}{dt} \right) + M k^2 \frac{d\theta}{dt} \right] = L,$$

worin  $x$  und  $y$  die Coordinaten seines Schwerpunkts sind.

Wir bitten, den Sinn der verschiedenen Theile dieses Ausdrucks zu beachten. Wie in § 77 erklärt wurde, ist das Moment der Effectivkräfte der Differentialquotient des Moments der Bewegungsgrösse um denselben Punkt. Das Moment der Bewegungsgrösse ist nach § 74 das nämliche, wie das Moment um den Schwerpunkt zusammen mit dem Moment der ganzen im Schwerpunkt vereinigten und sich mit der Geschwindigkeit des Schwerpunkts bewegendes Masse. Das Moment um den Schwerpunkt ist nach dem ersten Paragraphen des Kap. III oder IV gleich  $M k^2 \frac{d\theta}{dt}$  und das Moment der vereinigten Masse  $M (x \frac{dy}{dt} - y \frac{dx}{dt})$ . Daher ist in dem Raum von zwei Dimensionen für irgend einen Körper von der Masse  $M$

$$\left. \begin{array}{l} \text{die Winkelbewegungsgrösse} \\ \text{um den Coordinatenanfang} \end{array} \right\} = M \left( x \frac{dy}{dt} - y \frac{dx}{dt} \right) + M k^2 \frac{d\theta}{dt}.$$

Ziehen wir Polarcoordinaten vor, so lässt sich dem Ausdruck eine andere Gestalt geben. Sind  $(r, \varphi)$  die Polarcoordinaten des Schwerpunkts, so ist

$$\left. \begin{array}{l} \text{die Winkelbewegungsgrösse} \\ \text{um den Coordinatenanfang} \end{array} \right\} = M r^2 \frac{d\varphi}{dt} + M k^2 \frac{d\theta}{dt}.$$

Ist  $v$  die Geschwindigkeit des Schwerpunkts und  $p$  das vom Coordinatenanfang auf die Tangente an die Richtung seiner Bewegung gefällte Loth, so ist das Moment der Bewegungsgrösse der im Schwerpunkt vereinigten Masse  $Mvp$  und wir erhalten wieder

$$\left. \begin{array}{l} \text{die Winkelbewegungsgrösse} \\ \text{um den Coordinatenanfang} \end{array} \right\} = Mvp + M k^2 \frac{d\theta}{dt}.$$

Aus § 74 geht hervor, dass dies die augenblickliche Winkelbewegungsgrösse des Körpers um den Koordinatenanfang ist, mag er nun festliegen oder sich bewegen. In dem letzteren Fall ist jedoch ihr Differentialquotient nach der Zeit nicht das Moment der Effectivkräfte.

Da das augenblickliche Rotationscentrum (Momentancentrum) als fester Punkt angesehen werden kann, wenn man es nur mit den Coordinaten und ihrem *ersten Differentialquotienten* nach der Zeit zu thun hat, so ist

$$\left. \begin{array}{l} \text{die Winkelbewegungsgrösse} \\ \text{um das Momentancentrum} \end{array} \right\} = M(r^2 + k^2) \frac{d\theta}{dt}.$$

Wenn  $Mk^2$  das Trägheitsmoment für das Momentancentrum ist, so lässt sich diesem letzten Ausdruck auch die Form geben  $Mk^2 d\theta/dt$ .

Bei dem Aufstellen der Momente für irgend einen Punkt, mag er nun der Schwerpunkt sein oder nicht, beachte man, dass  $Mk^2$  in allen diesen Formeln das Trägheitsmoment in Bezug auf den Schwerpunkt und nicht in Bezug auf den Punkt ist, für welchen die Momente genommen werden. Nur bei dem Aufstellen der Momente für das Momentancentrum oder einen festliegenden Punkt kann man das Trägheitsmoment für diesen Punkt statt des Trägheitsmoments für den Schwerpunkt benutzen und dann enthält unser Ausdruck für die Winkelbewegungsgrösse die Winkelbewegungsgrösse der im Schwerpunkt vereinigten Masse.

§ 135. **Allgemeine Lösungsmethode.** Bilden wir die Bewegungsgleichungen eines jeden Körpers, indem wir die Componenten parallel den Coordinatenachsen und die Momente um den Schwerpunkt nehmen, so erhalten wir für jeden Körper drei Gleichungen von der Form

$$\left. \begin{array}{l} M \frac{d^2 x}{dt^2} = F \cos \varphi + R \cos \psi + \dots \\ M \frac{d^2 y}{dt^2} = F \sin \varphi + R \sin \psi + \dots \\ Mk^2 \frac{d^2 \theta}{dt^2} = Fp + Rq + \dots \end{array} \right\} \dots \dots (1),$$

worin  $F$  eine der am Körper angreifenden gegebenen Kräfte bezeichnet, deren Componenten  $F \cos \varphi$  und  $F \sin \varphi$  sind und deren Moment um den Schwerpunkt  $Fp$  ist, während  $R$  eine der Reactionen bedeutet. Sie heissen *die dynamischen Gleichungen* des Körpers.

Ausser ihnen existiren noch gewisse geometrische Gleichungen, welche die Verbindungen des Systems ausdrücken. Da jede solche Zwangsverbindung von einer Reaction begleitet ist und jede Reaction von einer Zwangsverbindung, so sind ebensoviel geometrische Gleichungen

Hat man die richtige Anzahl von Bewegungsgleichungen erhalten, so schreitet man zu ihrer Auflösung, für welche zwei allgemeine Methoden vorgeschlagen worden sind.

**Die erste Lösungsmethode.** Man differenzire die geometrischen Gleichungen zweimal nach  $t$  und setze für  $d^2x/dt^2$ ,  $d^2y/dt^2$ ,  $d^2\theta/dt^2$  die Werthe aus den dynamischen Gleichungen ein. Damit erhält man eine zur Bestimmung der Reactionen ausreichende Anzahl von Gleichungen. Diese Methode ist immer dann von grossem Vortheil, wenn die geometrischen Gleichungen die Form haben

$$Ax + By + C\theta = D \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2),$$

unter  $A$ ,  $B$ ,  $C$ ,  $D$  Constante verstanden. Nimmt man ferner an, die dynamischen Gleichungen seien der Art, dass sie in der Form (1) geschrieben auf der rechten Seite nur die Reactionen und Constanten ohne irgend ein  $x$ ,  $y$  oder  $\theta$  enthalten und substituirt in die Gleichung

$$A \frac{d^2x}{dt^2} + B \frac{d^2y}{dt^2} + C \frac{d^2\theta}{dt^2} = 0,$$

die man durch Differentiation von (2) erhält, so kommt man zu einer Gleichung, in welcher nur die Reactionen und Constanten vorkommen. Da dies für alle geometrischen Beziehungen gilt, so bleiben offenbar die Reactionen während der Bewegung constant und ihre Werthe lassen sich finden. Substituirt man daher diese Werthe in die dynamischen Gleichungen (1), so sind die Glieder auf der rechten Seite constant und die Werthe von  $x$ ,  $y$ ,  $\theta$  lassen sich durch eine leichte Integration ermitteln.

Haben dagegen die geometrischen Gleichungen nicht die Gestalt (2), so führt diese Methode in der Regel nicht zum Ziel. Nimmt man z. B. an, eine geometrische Gleichung habe die Form

$$x^2 + y^2 = c^2,$$

enthält sie also *Quadrate* statt der *ersten* Potenz, so wird ihre zweite Differentialgleichung

$$x \frac{d^2x}{dt^2} + y \frac{d^2y}{dt^2} + \left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 = 0,$$

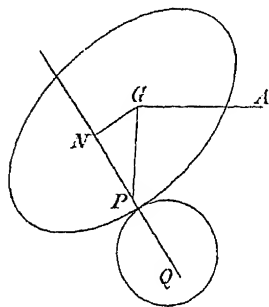
und wenn wir auch die Werthe von  $d^2x/dt^2$ ,  $d^2y/dt^2$  einsetzen können, so ist es im Allgemeinen nicht möglich, die Glieder  $(dx/dt)^2$ ,  $(dy/dt)^2$  zu eliminiren.

§ 136. Die Reactionen in einem dynamischen Problem werden in vielen Fällen durch den Druck glatter fester Hindernisse hervorgebracht, welche die Körper bei ihrer Bewegung berühren. Solche Hindernisse können nur entgegenwirken und wenn daher aus den Gleichungen hervorgeht, dass eine solche Reaction in irgend einem Augenblick ihr Vorzeichen wechselt, so verlässt offenbar der Körper in diesem Augenblick das Hinderniss. Dies führt gelegentlich zu Discontinuitäten in unsern Gleichungen. Zuerst bewegte sich das System unter einem ge-

wissen Zwang und unsere Gleichungen waren auf diese Voraussetzung gegründet. In einem gewissen Augenblick, der durch das Verschwinden einer Reaction bestimmt wird, hört der Zwang, dem einer der Körper unterworfen war, auf und die Bewegungsgleichungen müssen durch Fortlassen dieser Reaction geändert werden. Ähnliche Bemerkungen gelten, wenn die Reactionen durch den Druck eines Körpers gegen einen andern hervorgerufen werden.

Man beachte, dass, wenn die erste Lösungsmethode angewendet werden kann, die Reactionen während der Bewegung constant bleiben, also solche Discontinuitäten nie eintreten können. Wenn ein Körper einen andern berührt, so trennen sie sich alsdann entweder beim Beginn ihrer Bewegung oder bleiben stets in Berührung miteinander. Solche Reactionen sind auch von den Anfangsbedingungen unabhängig und bleiben daher dieselben, wenn das System in irgend einer Lage in den Zustand der Ruhe versetzt wird.

§ 137. Ein dynamisches System bestehe aus zwei Körpern, die mit der Reaction  $R$  auf einander drücken; wie ist die entsprechende geometrische Gleichung zu bilden? Man muss offenbar durch sie ausdrücken, dass die Componenten der Geschwindigkeit der Berührungspunkte der beiden Körper in der Richtung von  $R$  einander gleich sind.



Dazu ist der folgende Satz oft von Nutzen. Ein Körper drehe sich um einen Punkt  $G$  mit der Winkelgeschwindigkeit  $d\theta/dt = \omega$  in entgegengesetzter Richtung, wie die Zeiger einer Uhr und  $G$  bewege sich in der Richtung  $GA$  mit der Geschwindigkeit  $V$ . Man soll die Componente der Geschwindigkeit des Punktes  $P$  in der Richtung  $PQ$  finden, die mit  $GA$  den Winkel  $\varphi$  macht. In der Zeit  $dt$  bewegt sich der ganze Körper und daher auch der Punkt  $P$  durch einen Raum  $Vdt$  parallel zu  $GA$  und während derselben Zeit bewegt sich  $P$  senkrecht zu  $GP$  durch einen Raum  $\omega \cdot GP \cdot dt$ . Die ganze Verschiebung von  $P$  parallel zu  $PQ$  beträgt daher

( $V \cos \varphi + \omega \cdot GP \sin \varphi$ )  $dt$ .

$$(V \cos \varphi + \omega \cdot GP \sin \varphi) dt.$$

Ist  $GN = p$  das Loth von  $G$  auf  $PQ$ , so ist, wie wir sehen, die Geschwindigkeit von  $P$  parallel  $PQ$  gleich  $V \cos \varphi + \omega p$ .

Bemerkenswerth ist, dass dieser Ausdruck von der Lage von  $P$  auf der Geraden  $PQ$  unabhängig ist. Daraus folgt, dass die Geschwindigkeitscomponenten aller Punkte einer Geraden  $PQ$  in der Richtung von  $PQ$  dieselben sind. Es leuchtet dies sofort ein, wenn man bedenkt, dass alle Punkte der Geraden  $PQ$  starr mit einander verbunden sind



und die Länge der Linie  $PQ$  sich ändern müsste, wenn die in Rede stehenden Geschwindigkeitscomponenten ihrer Punkte verschieden wären.

Wird daher die Geschwindigkeit eines Punktes  $P$  in einer Richtung  $PQ$  gesucht, so kann man  $P$  durch irgend einen andern in der Linie  $PQ$  gelegenen Punkt ersetzen, dessen Geschwindigkeitscomponente leichter zu ermitteln ist. In der Regel ist der Punkt  $N$  am bequemsten, denn ohne Benutzung einer Formel sieht man schon von selbst, dass seine Geschwindigkeitscomponente, längs  $PQ$ ,  $V \cos \varphi + \omega p$  ist.

Sind  $(x, y, \theta)$ ,  $(x', y', \theta')$  die Coordinaten der beiden Körper,  $q, q'$  die Lothe von den Punkten  $(x, y)$ ,  $(x', y')$  auf die Richtung einer Reaction  $R$ ,  $\psi$  der Richtungswinkel, den  $R$  mit der  $x$ -Axe macht, so lautet die gesuchte geometrische Gleichung

$$\frac{dx}{dt} \cos \psi + \frac{dy}{dt} \sin \psi + \frac{d\theta}{dt} q = \frac{dx'}{dt} \cos \psi + \frac{dy'}{dt} \sin \psi + \frac{d\theta'}{dt} q'.$$

Sind die Körper vollkommen rauh und rollen aufeinander ohne zu gleiten, so gibt es *zwei* Reactionscomponenten für den Berührungspunkt, die eine normal, die andre tangential zu der gemeinschaftlichen Fläche der sich berührenden Körper. Für jede derselben erhält man eine Gleichung, wie die oben aufgestellte. Ist dagegen *gleitende* Reibung vorhanden, so verlieren die bisherigen Betrachtungen ihre Gültigkeit, wie wir weiter unten sehen werden.

§ 138. Die zweite Lösungsmethode. In einem dynamischen System mögen zwei Körper von den Massen  $M, M'$  mit der Reaction  $R$  aufeinander drücken. Die Bewegungsgleichungen von  $M$  seien die in § 135 mit (1) bezeichneten und die von  $M'$  möge man aus ihnen erhalten, indem man alle Buchstaben mit Ausnahme von  $R, \psi$  und  $t$  mit einem Strich versieht und  $-R$  statt  $R$  schreibt. Wir multipliciren die Bewegungsgleichungen von  $M$  mit  $2 \frac{dx}{dt}$ ,  $2 \frac{dy}{dt}$  bez.  $2 \frac{d\theta}{dt}$ , die von  $M'$  mit den entsprechenden Grössen und addiren die sechs Gleichungen. Man erhält

$$\begin{aligned} & 2M \left( \frac{dx}{dt} \frac{d^2x}{dt^2} + \frac{dy}{dt} \frac{d^2y}{dt^2} + h^2 \frac{d\theta}{dt} \frac{d^2\theta}{dt^2} \right) + \text{etc.} \\ &= 2F \left( \frac{dx}{dt} \cos \varphi + \frac{dy}{dt} \sin \varphi + p \frac{d\theta}{dt} \right) + \text{etc.} \\ &+ 2R \left( \frac{dx}{dt} \cos \psi + \frac{dy}{dt} \sin \psi + q \frac{d\theta}{dt} \right) - 2R' \left( \frac{dx'}{dt} \cos \psi + \frac{dy'}{dt} \sin \psi + q' \frac{d\theta'}{dt} \right). \end{aligned}$$

Der Coefficient von  $R$  verschwindet in Folge der im vorigen Paragraphen gefundenen Gleichung. Dasselbe gilt für alle Reactionen zwischen je zweien der sich bewegenden Körper.

Drückt der Körper  $M$  gegen ein äusseres festes Hinderniss, so wirkt  $R$  nur auf den Körper  $M$  und der Coefficient von  $2R$  beschränkt sich auf den in die erste Klammer eingeschlossenen Theil. Da aber

als Geschwindigkeit des Angriffspunktes in der Richtung von  $R$  verschwinden muss, so ist der Coefficient von  $R$  auch in diesem Fall Null.

$A$  sei der Angriffspunkt der gegebenen Kraft  $F$  und die Geschwindigkeitskomponente von  $A$  in der Richtung der Wirkung von  $F$  sei  $df/dt$ . Alsdann ist der Coefficient von  $2F$  gleich  $df/dt$  und aus der Definition von  $df$  folgt weiter, dass  $Fdf$  das aus der Statik bekannte virtuelle Moment der Kraft  $F$  ist.

Auf diese Art haben wir eine Methode gewonnen, mit deren Hülfe wir zu einer Gleichung kommen, die von den unbekannten Reactionen vollkommen glatter oder vollkommen rauher Körper frei ist. Das Verfahren besteht darin, dass man die Gleichungen, auf deren linker Seite  $M d^2x/dt^2$ ,  $M d^2y/dt^2$ ,  $Mk^2 d^2\theta/dt^2$  etc. steht, mit  $dx/dt$ ,  $dy/dt$ ,  $d\theta/dt$  etc. multiplicirt und die so erhaltenen Gleichungen für alle Körper addirt. Die Coefficienten aller unbekannten Reactionen sind in Folge der geometrischen Gleichungen, wie man findet, gleich Null.

Die linke Seite dieser Gleichung ist offenbar ein vollständiges Differential. Man erhält durch Integration

$$M \left[ \left( \frac{dx}{dt} \right)^2 + \left( \frac{dy}{dt} \right)^2 + k^2 \left( \frac{d\theta}{dt} \right)^2 \right] + \text{etc.} = C + 2 \int F df + \dots,$$

worin  $C$  die Integrationsconstante ist.

In der Praxis lässt man gewöhnlich die Zwischenstufen weg und schreibt die Gleichung gleich in der Form

$$\frac{1}{2} \Sigma M \left[ \left( \frac{dx}{dt} \right)^2 + \left( \frac{dy}{dt} \right)^2 \right] + k^2 \left( \frac{d\theta}{dt} \right)^2 = C + U \dots (1),$$

unter  $U$  das Integral des virtuellen Moments der Kräfte verstanden.

Sie heisst die Gleichung der lebendigen Kraft.

*Ein anderer Beweis.* Benutzt man die in der Statik bewiesenen Sätze über die Arbeit, so lässt sich der vorstehende Beweis etwas vereinfachen, indem man jeden starren Körper in seine Elementarmassenpunkte auflöst.

Ist  $m$  die Masse eines materiellen Punktes;  $x, y$  seine Coordinaten;  $mX, mY$  die Componenten der Kräfte, so ist

$$m \frac{d^2x}{dt^2} = mX, \quad m \frac{d^2y}{dt^2} = mY.$$

Multiplicirt man mit  $dx/dt$  bez.  $dy/dt$ , nimmt die Summe durch das ganze System von Massenpunkten und integrirt, so erhält man

$$\frac{1}{2} \Sigma m \left[ \left( \frac{dx}{dt} \right)^2 + \left( \frac{dy}{dt} \right)^2 \right] = C + \int \Sigma m (X dx + Y dy).$$

Die linke Seite ist die lebendige Kraft des Körpers, die rechte das Integral der virtuellen Momente der an den Punkten angreifenden Kräfte.

Bei dieser Art des Beweises enthalten die Kräfte auf der rechten Seite (1) die inneren Reactionen der verschiedenen Massenpunkte, aus

denen jeder Körper besteht, (2) die gegenseitigen Reactionen der Körper aufeinander, (3) die Druckkräfte, welche in Folge äusserer geometrischer dem System auferlegter Bedingungen entstehen.

In der Statik wird bewiesen, dass die virtuellen Momente der inneren Reactionen verschwinden, *wenn die Körper so starr sind*, dass die materiellen Punkte, welche jeden Körper zusammensetzen, in unveränderlichem Abstand von einander bleiben. Es wird auch bewiesen, dass die virtuellen Momente der Reactionen zwischen den sich bewegenden Körpern *mit gewissen Ausnahmen* sich gegenseitig zerstören und schliesslich, dass die in Folge geometrischer Bedingungen entstehenden Druckkräfte in der Function der Arbeit nicht auftreten, *wenn die Bedingungen die Zeit nicht explicite enthalten*.

Lässt man diese Druckkräfte sämmtlich weg und schliesst jetzt in die Ausdrücke  $mX$ ,  $mY$  nur die äusseren gegebenen Kräfte ein, welche an dem System angreifen und stellt ferner mit  $U$  das Integral dar, so erhält man wie zuvor

$$\frac{1}{2} \Sigma m v^2 = C + U.$$

Der Haupteinwand gegen diese Art, den Beweis zu führen, besteht darin, dass die Einschränkungen, denen der Satz unterliegt, nicht klar hervortreten. In dem Kapitel über die lebendige Kraft wird eine Modification dieses zweiten Beweises gegeben, die, auf den Satz von der virtuellen Arbeit gegründet, viele Vortheile zu haben scheint. Sowohl der eben gegebene Beweis als die spätere Modification sind allgemein in Gebrauch.

Da der Satz von der lebendigen Kraft einer der wichtigsten in der Dynamik ist, so muss man suchen, ihn von möglichst vielen Seiten zu betrachten.

§ 139. Die lebendige Kraft eines Körpers. Die linke Seite der Gleichung (1) des vorigen Paragraphen heisst *die lebendige Kraft* des ganzen Systems. Wir wollen beweisen, dass für irgend einen Körper  $M$

die lebendige Kraft von  $M = \frac{1}{2} M \left[ \left( \frac{dx}{dt} \right)^2 + \left( \frac{dy}{dt} \right)^2 + k^2 \left( \frac{d\theta}{dt} \right)^2 \right]$  ist.

*Erster Beweis.* Würde die ganze Masse in ihrem Schwerpunkt vereinigt und bewegte sie sich mit der Geschwindigkeit des Schwerpunkts, so wäre  $k$  Null und die lebendige Kraft würde sich auf die beiden ersten Glieder reduciren. Diese Glieder heissen daher *die lebendige Kraft der Translation* und das letzte Glied *die lebendige Kraft der Rotation*.

Ist  $v$  die Geschwindigkeit des Schwerpunkts, so lässt sich die Gleichung auch schreiben:

$$\text{die lebendige Kraft von } M = \frac{1}{2} M v^2 + \frac{1}{2} M k^2 \left( \frac{d\theta}{dt} \right)^2.$$

Benutzt man Polarcoordinaten, so erhält man die lebendige Kraft von  $M = \frac{1}{2} M \left[ \left( \frac{dr}{dt} \right)^2 + r^2 \left( \frac{d\varphi}{dt} \right)^2 + k^2 \left( \frac{d\theta}{dt} \right)^2 \right]$ , unter  $(r, \varphi)$  die Polarcoordinaten des Schwerpunkts verstanden.

Bedeutet  $\varrho$  den Abstand des Schwerpunkts von dem Momentancentrum des Körpers, so ist  $\varrho \frac{d\theta}{dt}$  offenbar die Geschwindigkeit des Schwerpunkts und mithin

$$\text{die lebendige Kraft von } M = \frac{1}{2} M (\varrho^2 + k^2) \left( \frac{d\theta}{dt} \right)^2.$$

*Ein anderer Beweis.* Will man den zweiten der beiden im letzten Paragraphen gegebenen Beweise des Satzes von der lebendigen Kraft benutzen, so wird es nöthig, das Theorem in diesem Paragraphen etwas anders zu behandeln. Zu diesem Zweck bemerken wir, dass  $\frac{1}{2} \Sigma m \left[ \left( \frac{dx}{dt} \right)^2 + \left( \frac{dy}{dt} \right)^2 \right]$  eine quadratische Function der Variabeln ist und daher nach dem allgemeinen Satz über die parallelen Axen (§ 14) der Summe zweier Ausdrücke gleichkommt, nämlich (1) dem Wert von  $\Sigma$ , wenn die ganze Masse in dem Schwerpunkt  $G$  vereinigt wird, also  $\frac{1}{2} M v^2$  und (2) dem Werth von  $\Sigma$ , wenn der Körper auf  $G$  als Coordinatenanfang bezogen wird, also  $\frac{1}{2} \Sigma m v'^2$ . Ist nun  $\omega$  die Winkelgeschwindigkeit des Körpers um  $G$ , so ist die relative Geschwindigkeit eines Massenpunktes  $v' = r\omega$ , wenn  $r$  seinen Abstand von  $G$  bedeutet und daher  $\frac{1}{2} \Sigma m v'^2 = \frac{1}{2} \Sigma m r^2 \cdot \omega^2$ . Wir erhalten mithin wie früher die lebendige Kraft von  $M = \frac{1}{2} M v^2 + \frac{1}{2} M k^2 \omega^2$ .

Der hier gegebene Fundamentalsatz wird König zugeschrieben, der ihn in den *Acta Eruditorum* veröffentlichte. Die folgende Umdrehung des Theorems rührt von Cauchy her; *Exercices de Math., seconde année*, S. 104; *Oeuvres complètes* II, 7, S. 140.

Beisp. 1.  $P$  sei ein in einem starren Körper festliegender Punkt, der sich mit ihm bewegt und derart bestimmt ist, dass die lebendige Kraft des Körpers der von der Translation von  $P$  herrührenden lebendigen Kraft zusammen mit der lebendigen Kraft der relativen Bewegung um  $P$  gleich ist. Man beweise, dass  $P$  auf dem um  $GI$  als Durchmesser beschriebenen Kreis liegt, wenn  $I$  das Momentancentrum und  $G$  der Schwerpunkt ist.

Versteht man unter  $\omega$  die Winkelgeschwindigkeit des Körpers um  $I$  und unter  $Q$  die Lage eines materiellen Punktes  $m$ , so erhält man aus der in der Aufgabe enthaltenen Bedingung

$$\Sigma m Q I^2 \omega^2 = \Sigma m Q P^2 \omega^2 + M \cdot P I^2 \omega^2.$$

Dividirt man durch  $\omega^2$  und setzt für die beiden Glieder mit  $\Sigma$  ihre in § 13 gegebenen Werthe ein, so wird  $G I^2 = G P^2 + P I^2$ , was zu beweisen war.

In dem Raum von drei Dimensionen muss der Punkt  $P$  auf dem Cylinder liegen, dessen Basis ein Kreis ist, welcher zum Durchmesser das von  $G$  auf die Momentanaxe gefällte Loth hat.

Beisp. 2. Man beweise auch, dass in dem letzten Beispiel die Geschwindigkeit von  $P$  der Geschwindigkeitscomponente von  $G$  in der Bewegungsrichtung von  $P$  gleich ist.

O. Bonnet, *Mémoires de l'Académie de Montpellier*. Tome I, S. 141.

§ 140. Die Kräftefunction und Arbeit. Die Function  $U$  in der Gleichung der lebendigen Kraft heisst *die Kräftefunction*. Man kann sie, wenn sie existirt, stets dadurch erhalten, dass man das virtuelle Moment der Kräfte, wie es die Statik lehrt, niederschreibt, integrirt und eine Constante addirt. Diese Definition reicht für jetzt aus; eine vollständigere Erklärung findet man im Anfang des Kapitels III, das von der lebendigen Kraft handelt.

Sind die Kräfte Functionen verschiedener Coordinaten, so lässt sich denken, es könne oft vorkommen, dass das virtuelle Moment sich nicht integriren lasse, ehe die Beziehungen zwischen diesen Coordinaten auf andere Weise ermittelt sind. In dem Kapitel über die lebendige Kraft wird jedoch gezeigt werden, dass dies nicht der Fall ist. In fast allen Fällen lässt sich annehmen, dass das virtuelle Moment ein vollständiges Differential sei. Bei den Ausführungen, welche in diesem und den nächsten beiden Paragraphen folgen, wollen wir daher voraussetzen, die Function  $U$  existire und sei eine bekannte Function der Coordinaten des Systems.

In einem späteren Kapitel werden wir die verschiedenen Formen, welche die Kräftefunction annehmen kann, eingehend besprechen. Für jetzt wollen wir nur zeigen, wie man ihre Form für ein System von Körpern findet, welche beliebigen Zwangsbedingungen unterworfen sind und nur unter der Wirkung der Schwerkraft stehen.

Sind  $x, y$  die Horizontal- und Verticalcoordinate eines materiellen Punktes des Systems, wird die  $y$ -Axe nach unten als positiv genommen und ist  $m$  die Masse des Punktes, so ist das virtuelle Moment  $\Sigma mgy$  und daher die Kräftefunction

$$U = - \int \Sigma mgy = - \Sigma mgy + C = gy \Sigma m + C,$$

worin  $y$  die Tiefe des Schwerpunkts des ganzen Systems unter der  $x$ -Axe bedeutet.

Um die Constante  $C$  zu vermeiden, nimmt man das Integral manchmal zwischen Grenzen und nennt alsdann die Kräftefunction *die Arbeit der Kräfte* beim Uebergang des Systems aus der durch die untere Grenze zu der durch die obere Grenze angegebenen Lage.

Man kann dieses Resultat so aussprechen: *Wenn bei der Bewegung eines Systems aus einer Lage in eine andere sein Schwerpunkt die verticale Strecke  $h$  zurücklegt, so ist die durch die Schwere geleistete Arbeit  $Mgh$ , wobei  $M$  die ganze Masse des Systems bedeutet.*

Man beachte, dass dieses Resultat nicht von einer Aenderung in der Anordnung der Körper, aus welchen das System besteht, sondern nur von der verticalen Strecke abhängt, welche der Schwerpunkt herabfällt.

§ 141. Das Princip der lebendigen Kraft. Manchmal kann sich ein System von einer Lage in eine andere auf verschiedenem Weg bewegen. Wir brauchen aber vielleicht die zwischenliegende Bewegung nicht, sondern nur die in der letzten Lage, wenn die in der ersten gegeben ist. Alsdann vermeiden wir die Einführung der Constanten  $C$  in die Gleichung der lebendigen Kraft dadurch, dass wir das Integral in § 138 zwischen Grenzen nehmen und sagen

$$\left. \begin{array}{l} \text{die Aenderung der} \\ \text{lebendigen Kraft} \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{l} \text{der Arbeit der Kräfte,} \end{array} \right.$$

wobei die Aenderung der lebendigen Kraft durch Subtraction der lebendigen Kraft in der Anfangslage von der in der Endlage gefunden wird. Bei der Ermittlung der Arbeit der Kräfte hängt, wie schon erklärt, die obere Grenze des Integrals von der Endlage des Systems, die untere von der Anfangslage ab.

*Diese Gleichung ist deshalb von so grosser Bedeutung, weil sie frei von allen Reactionen oder Zwangsbedingungen des Systems ist.* Die Art, auf welche sich das System aus seiner ersten in seine letzte Lage bewegt, ist gleichgültig. Soweit diese Gleichung in Frage kommt, kann die Art der Bewegung irgendwie durch Einführung oder Entfernung beliebiger Zwangsbedingungen oder Reactionen geändert werden, wenn sie nur derart sind, dass sie in der Gleichung der virtuellen Momente, wie sie in der Statik gebraucht wird, nicht auftreten.

Man beachte, dass gewisse Reactionen, wie z. B. *die Reibung zwischen zwei Flächen, die aufeinander gleiten*, aus der Gleichung der virtuellen Verschiebungen in der Statik nicht verschwinden. Bei der Aufstellung der Gleichung der lebendigen Kraft in der Dynamik tritt diese Art der Reibung, wenn sie vorkommt, zugleich mit den andern Kräften auf der rechten Seite der Gleichung auf.

Bei der Bewegung des Systems von einer Lage in eine andere gegebene Lage kommt offenbar die von jeder Kraft verursachte Aenderung der lebendigen Kraft dem Integral des virtuellen Moments der Kraft gleich. Die ganze Aenderung besteht folglich aus der Summe der durch die einzelnen Kräfte bewirkten Aenderungen. Macht daher die Richtung irgend einer Kraft  $F$  einen spitzen Winkel mit der Richtung der Bewegung des Punktes  $A$  des Körpers, an welchem sie angreift, so haben  $F$  und  $df$  dasselbe Vorzeichen und das Integral in der Gleichung der lebendigen Kraft ist positiv. Die Kraft hat daher die Wirkung, dass sie die lebendige Kraft vergrössert. Ist dagegen die Richtung der Kraft der Richtung der Bewegung von  $A$  entgegengesetzt, d. h. macht die Kraft einen spitzen Winkel mit der umgekehrten Richtung der Bewegung von  $A$ , so besteht die Wirkung der Kraft darin, dass sie die lebendige Kraft verringert. Diese Regel setzt uns in den Stand, die allgemeine Wirkung einer Kraft auf die lebendige Kraft des Systems

§ 142. Nehmen wir z. B. an, ein Körper bewege sich oder rolle unter dem Einfluss der Schwere und einer seiner Punkte bleibe in Berührung mit einer festliegenden Fläche, die entweder vollkommen rauh oder vollkommen glatt ist, so dass also gleitende Reibung nicht vorkommt. Er möge seine Bewegung in irgend einer Art beginnen, jedoch so, dass die anfängliche lebendige Kraft bekannt ist. Die lebendige Kraft vermindert oder vermehrt sich, je nachdem der Schwerpunkt über sein ursprüngliches Niveau sich erhebt oder unter dasselbe sinkt. Bei der Bewegung des Körpers kann der Druck auf die Fläche sich ändern, möglicher Weise verschwinden und sein Vorzeichen ändern. Alsdann verlässt der Körper die Fläche, worauf der Schwerpunkt nach § 79 eine Parabel beschreibt und die Winkelgeschwindigkeit des Körpers um seinen Schwerpunkt constant wird. Der Körper kann dann wieder auf die Fläche treffen; bis dieser Fall aber eintritt, hat sich die Gleichung der lebendigen Kraft dadurch, dass der Körper die Fläche verliess, in keiner Weise geändert. Dies geschieht erst bei dem Zusammentreffen des Körpers mit der Fläche. Denn, ist  $F$  die Reaction der Fläche,  $A$  der Punkt des Körpers, auf welchen sie wirkt und  $Fdf$  ihr virtuelles Moment wie in § 138, so ist bei der Bewegung des Körpers auf der Fläche  $df$  Null und beim Verlassen der Fläche wird  $F$  Null, so dass also das virtuelle Moment  $Fdf$  während der ganzen Bewegung vor dem Zusammentreffen aus dem einen oder andern Grund Null ist. Die Reaction tritt daher in der Gleichung der lebendigen Kraft nicht auf. Stösst dagegen der Körper auf die Fläche, so nähert sich  $A$  der Fläche und die Reaction  $F$  widersteht dem Vordringen von  $A$ , wobei weder  $F$  noch  $df$  verschwindet.  $F$  wird dabei wie während des ersten Theils der Bewegung gemessen, indem man es als eine sehr grosse Kraft ansieht, welche die Geschwindigkeit von  $A$  in sehr kurzer Zeit zerstört (§ 83). Während der Periode der Compression widersteht die Kraft  $F$  dem Vorschreiten von  $A$  und vermindert mithin die lebendige Kraft des Körpers; bei der nachher folgenden Restitutionsperiode befördert sie dagegen die Bewegung von  $A$  und vergrössert daher die lebendige Kraft. Weiter unten werden wir zeigen, dass die lebendige Kraft durch einen Zusammenstoss in allen Fällen, in welchen die Körper nicht vollkommen elastisch sind, vermindert wird und werden untersuchen, wie gross der Verlust ist. *Als allgemeine Regel kann man sich merken, dass die Gleichung der lebendigen Kraft durch einen Zusammenstoss verändert wird.*

Es lässt sich eine obere Grenze für die Höhe  $\bar{y}$  angeben, auf welche der Schwerpunkt über sein ursprüngliches Niveau steigen kann. Die Gleichung der lebendigen Kraft lässt sich nämlich schreiben

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Lebendige Kraft in} \\ \text{irgend einer Lage} \end{array} \right\} - \left\{ \begin{array}{l} \text{der anfänglichen} \\ \text{lebendigen Kraft} \end{array} \right\} = -Mg\bar{y},$$

unter  $M$  die Masse des Körpers verstanden. Da nun die lebendige

Kraft nie negativ werden kann, so kann der Schwerpunkt nie so hoch steigen, dass

$Mgy >$  als die anfängliche lebendige Kraft

wird. Soll der Schwerpunkt diese Höhe erreichen, so muss die lebendige Kraft des Körpers verschwinden, d. h. sowohl die Translationsgeschwindigkeit des Schwerpunkts als die Winkelgeschwindigkeit des Körpers müssen gleichzeitig Null werden. Dies kann im Allgemeinen, wenn der Körper von der Fläche abspringt, nicht geschehen, weil die Winkelgeschwindigkeit und die horizontale Geschwindigkeit des Schwerpunkts gewöhnlich nicht beide im Moment des Abspringens verschwinden und, wie oben erklärt, während der parabolischen Bewegung constant bleiben. Nach dem folgenden Zusammentreffen kann man sich denken, dass eine neue Bewegung mit verminderter lebendiger Kraft und daher kleinerer oberer Grenze für die Höhe des Schwerpunkts beginne.

§ 143. Hat, wie es manchmal vorkommt, das System nur einen Grad der Freiheit, so ist nur die Geschwindigkeit der Bewegung zu ermitteln. Mit Hülfe der geometrischen Verhältnisse des Systems werden die  $x$ ,  $y$ ,  $\theta$  eines jeden Körpers durch irgend eine Grösse ausgedrückt, die wir  $\varphi$  nennen wollen. Die lebendige Kraft des Körpers  $M$ , wie sie § 139 gibt, nimmt jetzt die Gestalt an

$$\text{Lebendige Kraft von } M = \frac{1}{2} M \left[ \left( \frac{dx}{d\varphi} \right)^2 + \left( \frac{dy}{d\varphi} \right)^2 + k^2 \left( \frac{d\theta}{d\varphi} \right)^2 \right] \left( \frac{d\varphi}{dt} \right)^2 = \frac{1}{2} P \left( \frac{d\varphi}{dt} \right)^2,$$

worin  $P$  eine bekannte Function der Coordinaten von  $M$  ist, und die Gleichung der lebendigen Kraft wird daher

$$\frac{1}{2} (\Sigma P) \left( \frac{d\varphi}{dt} \right)^2 = C + U,$$

woraus sich  $d\varphi/dt$  für jede gegebene Lage des Systems finden lässt.

Wenn es folglich nur eine Art gibt, auf welche das System sich bewegen kann, so wird diese Bewegung durch die Gleichung der lebendigen Kraft bestimmt; sind dagegen mehr Grade der Freiheit möglich, so muss noch ein Integral der Gleichungen zweiter Ordnung ermittelt werden. Was zu geschehen hat, hängt von dem speciellen gerade vorliegenden Fall ab, und es ist oft sehr schwer, die richtige Behandlung der Gleichungen aufzufinden. Die Schwierigkeit wird noch erhöht, wenn man beim Aufstellen der Gleichungen nicht bemüht gewesen ist, ihnen eine möglichst einfache Gestalt zu geben.

§ 144. Beispiele zu diesen Sätzen. Die folgenden Beispiele sind zusammengestellt worden, um die Art der Anwendung der obigen Principien auf die Lösung dynamischer Probleme zu erläutern. In einigen Fällen sind mehrere Lösungen gegeben worden, um den Leser in den Stand zu setzen, die verschiedenen Methoden miteinander zu vergleichen. Die Art, wie jede Gleichung gebildet wird, ist genau erklärt



worden. Die beigelegten Bemerkungen werden hoffentlich die Schwierigkeiten aus dem Weg räumen, auf die der Anfänger in der Regel zu stoßen pflegt. Besondere Aufmerksamkeit möge man daher auf die verschiedenen Principien verwenden, welche bei den Lösungen befolgt wurden.

*Eine homogene Kugel rollt auf einer vollkommen rauhen geneigten Ebene unter dem Einfluss der Schwere direct hinunter. Man bestimme die Bewegung.*

$\alpha$  sei die Neigung der Ebene gegen den Horizont,  $a$  der Radius der Kugel,  $mk^2$  ihr Trägheitsmoment bez. eines horizontalen Durchmessers.

$O$  sei der Punkt der geneigten Ebene, welcher Anfangs durch die Kugel berührt wurde,  $N$  der Berührungspunkt zur Zeit  $t$ . Es ist dann offenbar am Vortheilhaftesten,  $O$  zum Coordinatenanfang und  $ON$  zur  $x$ -Axe zu wählen.

Die Kräfte, welche auf die Kugel wirken, sind erstens die Reaction  $R$  senkrecht zu  $ON$ , zweitens die Reibung  $F$ , welche an  $N$  in der Richtung  $NO$  und  $mg$ , welches vertical an dem Mittelpunkt  $C$  angreift. Die Effectivkräfte sind  $m \frac{d^2x}{dt^2}$ ,  $m \frac{d^2y}{dt^2}$  und greifen an  $C$  parallel zu der  $x$ - und  $y$ -Axe an und ein Paar  $mk^2 \frac{d^2\theta}{dt^2}$ , welches die Kugel um  $C$  in der Richtung  $NA$  herumdrehen sucht.  $\theta$  ist hier der Winkel, den eine Gerade im Körper mit einer im Raum festliegenden Geraden macht. Der Radius  $CA$  sei die im Körper und das Loth auf die geneigte Ebene die im Raum festliegende Gerade.  $\theta$  ist alsdann der Winkel, um den sich die Kugel gedreht hat.

Die Componenten in der Richtung der geneigten Ebene und senkrecht zu ihr sind

$$m \frac{d^2x}{dt^2} = mg \sin \alpha - F \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1),$$

$$m \frac{d^2y}{dt^2} = -mg \cos \alpha + R \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2).$$

Nimmt man die Momente um  $N$ , um die Reactionen zu vermeiden, so ist

$$ma \frac{d^2x}{dt^2} + mk^2 \frac{d^2\theta}{dt^2} = mga \sin \alpha \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3).$$

Da zwei unbekannte Reactionen  $F$  und  $R$  vorkommen, so sind zwei geometrische Beziehungen nöthig. Weil ein Gleiten bei  $N$  nicht stattfindet, so ist

$$x = a\theta \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (4)$$

und da die Kugel von der Fläche nicht abspringt,

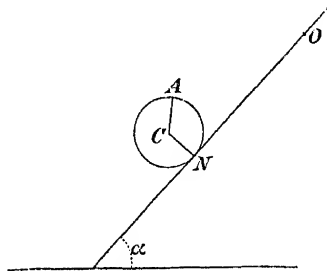
$$y = a \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (5).$$

Diese beiden Gleichungen haben die Form, wie sie die erste Methode verlangt. Durch Differentiation von (4) erhält man  $\frac{d^2x}{dt^2} = a \frac{d^2\theta}{dt^2}$  und durch Substitution in (3)

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{a^2}{a^2 + k^2} g \sin \alpha \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (6).$$

Weil die Kugel homogen ist, so folgt

$$k^2 = \frac{2}{5} a^2 \quad \text{und} \quad \frac{d^2x}{dt^2} = \frac{5}{7} g \sin \alpha.$$



Würde die Kugel auf einer *glatten* Ebene hinuntergleiten, so wäre die Bewegungsgleichung  $d^2x/dt^2 = g \sin \alpha$ ; es wird also im Fall der *rauen* Ebene zweieinhalbmal soviel Zeit bedürfen, als wenn die Kugel auf der *glatten* Ebene hinuntergleiten würde. Siebenmal der Schwere dazu verwandt, die Kugel umzudrehen und fünf Siebenmal um sie abwärts zu bewegen.

Nimmt man an, die Kugel gehe vom Zustand der Ruhe aus, so ist offenbar

$$x = \frac{1}{2} \cdot \frac{5}{7} g \sin \alpha \cdot t^2,$$

womit die Bewegung vollständig bestimmt ist.

Bei dieser Lösung der Aufgabe sind nur wenige Bewegungsgleichungen benutzt worden; man hätte nur die Gleichungen (3) und (4) aufzuschreiben brauchen, wenn die Bewegung allein gesucht wird. Sind dagegen auch die Reactionen zu ermitteln, so hat man auch die übrigen nöthig. Aus (1) folgt

$$F' = \frac{2}{7} m g \sin \alpha$$

und aus (2) und (5)

$$R = m g \cos \alpha.$$

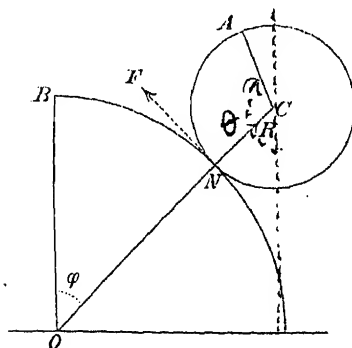
In der Regel setzt man erst am Ende der Untersuchung den Werth von  $k$  in die Gleichungen ein, weil er oft sehr complicirt ist und ausserdem als Probe auf die Richtigkeit der Vorzeichen in den ursprünglichen Gleichungen dienen kann. Hätte z. B. die Gleichung (6) gelautet

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{a^2}{a^2 - k^2} g \sin \alpha,$$

so hätte man daraus auf einen Fehler in der Auflösung schliessen können, denn offenbar lässt sich die Beschleunigung durch Aenderung der inneren Structur der Kugel nicht unendlich gross machen.

Beisp. Die Ebene sei nicht vollkommen *rauh* und der Reibungscoefficient  $\mu$  kleiner als  $\frac{2}{7} \tan \alpha$ ; man zeige, dass die Winkelgeschwindigkeit der Kugel zur Zeit  $t$  nach dem Verlassen des Zustands der Ruhe  $\frac{5\mu}{2} \frac{g \cos \alpha}{a} t$  betragen würde.

§ 145. Eine *homogene* Kugel rollt auf einer *andern* vollkommen *rauen* festliegenden Kugel *hinab*. Man suche die *Bewegung*.



$a$  bez.  $b$  seien die Radien der beweglichen und festen Kugel;  $O$  und  $C$  ihre Mittelpunkte;  $OB$  sei der verticale Radius der festen Kugel;  $\varphi = \angle BOC$ ;  $F$  bez.  $R$  die Reibung und normale Reaction bei  $N$ . Die Componenten in der Richtung der Tangente und Normalen zur Bahn von  $C$  sind dann

$$m(a+b) \frac{d^2\varphi}{dt^2} = mg \sin \varphi - F \quad (1)$$

$$m(a+b) \left( \frac{d\varphi}{dt} \right)^2 = mg \cos \varphi - R \quad (2)$$

Ist  $A$  der Punkt der beweglichen Kugel, welcher ursprünglich mit  $B$  zusammenfiel und  $\theta$  der Winkel zwischen einer im Körper festliegenden Linie, z. B.  $CA$  und einer in der Ebene festliegenden Geraden, z. B. der Verticalen, so liefern die Momente um  $C$  die Gleichung

$$mk^2 \frac{d^2\theta}{dt^2} = Fa \quad (3)$$

Man beachte, dass man den Winkel  $ACO$  nicht als Winkel  $\theta$  benutzen kann, weil zwar  $CA$  in dem Körper,  $CO$  aber nicht im Raum festliegt.

Die geometrische Gleichung ist offenbar

$$a(\theta - \varphi) = b\varphi \quad (4).$$

Eine weitere brauchen wir nicht, da schon bei dem Aufstellen der Gl. (1) und (2) das Constantbleiben des Abstandes  $CO$  benutzt worden ist.

Die Gestalt der Gl. (4) zeigt, dass wir die erste Methode anwenden können. Wir erhalten

$$F' = \frac{k^2}{k^2 + a^2} mg \sin \varphi$$

und kommen schliesslich zu der Gleichung

$$(a + b) \frac{d^2 \varphi}{dt^2} = \frac{5}{7} g \sin \varphi.$$

Multiplicirt man mit  $2 \frac{d\varphi}{dt}$  und integrirt, so findet man, wenn der rollende Körper sich vom Zustand der Ruhe und einem Punkt aus, der dem Punkt  $B$  unendlich nahe liegt, in Bewegung setzt,

$$\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2 = \frac{10}{7} \frac{g}{a + b} (1 - \cos \varphi).$$

Zu demselben Resultat kommt man auch durch Benutzung der Gleichung der lebendigen Kraft. Die lebendige Kraft der Kugel ist  $m \left[ v^2 + k^2 \left( \frac{d\theta}{dt} \right)^2 \right]$  und  $v = (a + b) \frac{d\varphi}{dt}$ . Die Kräftefunction ist nach § 140 gleich  $mgy$ , wenn  $y$  die verticale Strecke bedeutet, um welche das Centrum herabgesunken ist. Man erhält

$$(a + b)^2 \left( \frac{d\varphi}{dt} \right)^2 + k^2 \left( \frac{d\theta}{dt} \right)^2 = 2g(a + b)(1 - \cos \varphi),$$

woraus sich mit Hülfe von (4) dieselbe Gleichung wie oben leicht ableiten lässt.

Will man finden, an welchem Punkt der Körper die Kugel verlässt, so hat man  $R = 0$  zu setzen. Die Gl. (2) liefert  $(a + b) (d\varphi/dt)^2 = g \cos \varphi$ , daher  $\frac{10}{7} g (1 - \cos \varphi) = g \cos \varphi$  und  $\cos \varphi = \frac{10}{17}$ . Man beachte, dass das Resultat von der Grösse der Kugeln unabhängig ist.

Beisp. 1. Sind die Kugeln glatt, so verlässt die obere die untere, wenn  $\cos \varphi = \frac{2}{3}$  wird.

Beisp. 2. Ein Stab ruht mit seinem einen Ende auf einer glatten horizontalen Ebene, lehnt mit dem andern gegen eine glatte verticale Wand und hat die Neigung  $\alpha$  gegen den Horizont. Er gleite hinab; man zeige, dass er die Wand verlässt, wenn seine Neigung  $\arcsin \left( \frac{2}{3} \sin \alpha \right)$  ist.

Beisp. 3. Ein Balken von der Länge  $a$  rotirt auf einer glatten horizontalen Ebene um sein eines festliegendes Ende unter der Wirkung keiner anderen Kräfte als des Widerstandes der Atmosphäre allein. Nimmt man an, die verzögernde Wirkung des Widerstandes auf ein kleines Element von der Länge  $dx$  sei  $A dx$  (Geschw.)<sup>2</sup>, so ist die Winkelgeschwindigkeit zur Zeit  $t$  durch die Gleichung gegeben

$$\frac{1}{\omega} - \frac{1}{\Omega} = \frac{A a^4}{4 M k^2} t.$$

[Queen's Coll. (Queen's Coll. Examination Papers.)]

Beisp. 4. Eine schiefe Ebene von der Masse  $M$  ist im Stande sich frei auf einer glatten horizontalen Ebene zu bewegen. Eine vollkommen rauhe Kugel von der Masse  $m$  wird auf die geneigte Fläche gelegt und rollt unter der Einwirkung der Schwere hinab. Wenn  $x'$  die horizontale Strecke ist, um welche sich die ge-

neigte Ebene vorwärts bewegt,  $x$  die Strecke, welche die Kugel auf der geneigten Ebene zurückgelegt hat, so lässt sich beweisen, dass

$$(M + m)x' = mx \cos \alpha, \quad \frac{7}{5}x - x' \cos \alpha = \frac{1}{2}gt^2 \sin \alpha$$

ist, unter  $\alpha$  die Neigung der Ebene gegen den Horizont verstanden.

Beisp. 5. Zwei gleiche vollkommen rauhe Kugeln werden in labilem Gleichgewicht aufeinander gesetzt, wobei die untere auf einem vollkommen glatten Tisch ruht. Man zeige, dass bei einer leichten Störung des Systems die Kugeln fortfahren sich in demselben Punkte zu berühren und dass, wenn  $\theta$  die Neigung der Verbindungslinie der Mittelpunkte gegen die Verticale bedeutet,

$$(k^2 + a^2 + a^2 \sin^2 \theta) \left( \frac{d\theta}{dt} \right)^2 = 2ga(1 - \cos \theta)$$

ist.

Beisp. 6. Zwei ungleiche vollkommen rauhe Kugeln werden in unsicherem Gleichgewicht aufeinander gesetzt, wobei die untere auf einem vollkommen glatten Tisch ruht. Man zeige, dass bei einer leichten Störung des Systems die Kugeln sich trennen, wenn die Verbindungslinie ihrer Mittelpunkte mit der Verticalen einen Winkel  $\varphi$  macht, der durch die Gleichung  $\frac{m}{M+m} \cos^3 \varphi - 3 \cos \varphi + 2 = 0$  gegeben ist, unter  $M$  die Masse der unteren und unter  $m$  die der oberen Kugel verstanden.

Beisp. 7. Eine Kugel von der Masse  $M$  und dem Radius  $a$  wird gezwungen, auf einer vollkommen rauhen Curve von beliebiger Gestalt zu rollen und die Geschwindigkeit ihres Schwerpunkts ist Anfangs  $V$ . Die Anfangsgeschwindigkeit ändert sich und wird  $V'$ ; man zeige, dass die Normalreaction sich um  $M \frac{V'^2 - V^2}{\rho - a}$  vergrößert, wenn  $\rho$  der Krümmungsradius der Curve für den Berührungspunkt ist und dass die Reibung unverändert bleibt.

Beisp. 8. Ein gleichförmiger Stab von der Länge  $2a$ , dessen eines Ende eine horizontale Ebene berührt, hat eine Neigung  $\alpha$  gegen die Verticale. Der Stab beginnt seine Bewegung vom Zustand der Ruhe aus. Man zeige, dass seine Winkelgeschwindigkeit  $\omega$ , wenn er in horizontale Lage kommt, durch die Gleichung  $a\omega^2 = \frac{3}{2}g \cos \alpha$  gegeben ist, mag nun die Ebene vollkommen glatt oder vollkommen rauh sein. Man zeige auch, dass der Stab in keinem der beiden Fälle die Ebene verlässt.

Beisp. 9. Ein grader Tunnel wird von London nach Paris gebaut. Man zeige, dass eine Kugel, welche ihre Bewegung vom Zustand der Ruhe aus auf dem einen Endbahnhof beginnt, in etwa 42 Minuten auf dem andern ankommt, wenn der Tunnel glatt ist, und etwa 8 Minuten länger braucht, wenn er vollkommen rauh ist. Dabei ist angenommen, dass sich die Kugel nur unter dem Einfluss der Schwere bewegt und diese innerhalb der Erde dem Abstand der Kugel von dem Mittelpunkt der Erde proportional ist. Würde die Zeit von London nach Wien dieselbe sein?

Beisp. 10. Eine schwere gleichförmige Kette füllt eine glatte dünne Röhre aus, die einen Kreisquadranten bildet, dessen einer Grenzradius horizontal ist, während der andere vertical nach oben geht. Beginnt die Kette ihre Bewegung vom Zustand der Ruhe aus, so ist ihre Geschwindigkeit  $v$  beim Verlassen der Röhre durch

$$2\pi v^2 = ga(\pi^2 + 8)$$

gegeben.

Beisp. 11. Eine schwere Kette liegt in einer glatten dünnen Röhre, welche die Form der oberen Hälfte der Cardioide  $r = a(1 + \cos \theta)$  hat. Die Axe der Curve

ist horizontal. Das eine Ende der Kette hat die Coordinaten  $\vartheta = 0$ ,  $r = 2a$  und ihre Länge ist  $2a$ . Zu beweisen, dass, wenn die Kette gerade ganz aus der Röhre heraus ist, ihre Geschwindigkeit durch

$$10v^2 = ag(52 - 9\sqrt{3})$$

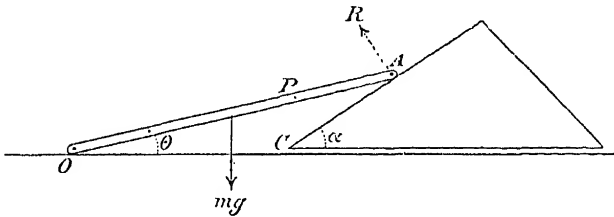
gegeben ist.

[Coll. Exam. (Coll. Examination Papers.)]

Beisp. 12. Ein vollkommen rauher cylindrischer Schleifstein vom Radius  $a$  rotirt mit gleichförmiger Beschleunigung um seine horizontale Axe. Man zeige, dass, wenn der Mittelpunkt einer Kugel, die sich in Berührung mit seiner Schleiffläche befindet, noch in Ruhe bleiben soll, die Winkelbeschleunigung des Schleifsteins nicht grösser als  $\frac{5g}{2a}$  sein darf.

[Coll. Exam. 1877.]

§ 146. Ein Stab  $OA$  kann sich um ein Scharnier bei  $O$  drehen, während sein andres Ende  $A$  auf einem glatten Keil ruht, der auf einer glatten durch  $O$  gehenden horizontalen Ebene gleiten kann. Man suche die Bewegung.



Ist  $\alpha$  der Winkel,  $M$  die Masse des Keils;  $x = OC$ ;  $l$  die Länge,  $m$  die Masse des Balkens;  $\theta = \angle AOC$  und  $R$  die Reaction bei  $A$ , so erhält man die dynamischen Gleichungen

$$M \frac{d^2 x}{dt^2} = R \sin \alpha \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1),$$

$$mk^2 \frac{d^2 \theta}{dt^2} = Rl \cos(\alpha - \theta) - mg \frac{l}{2} \cos \theta \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

und die geometrische Gleichung

$$x \sin \alpha = l \cdot \sin(\alpha - \theta) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3).$$

Hier muss offenbar die zweite Lösungsmethode angewandt werden; man findet

$$2M \frac{dx}{dt} \cdot \frac{d^2 x}{dt^2} + 2mk^2 \frac{d\theta}{dt} \cdot \frac{d^2 \theta}{dt^2} = -mg \frac{l}{2} \cos \theta \frac{d\theta}{dt} + 2R \left[ \sin \alpha \frac{dx}{dt} + l \cos(\alpha - \theta) \frac{d\theta}{dt} \right].$$

Der Coefficient von  $R$  verschwindet, wie sich aus der Differentiation der Gl. (3) ergibt. Durch Integration erhält man dann

$$M \left( \frac{dx}{dt} \right)^2 + mk^2 \left( \frac{d\theta}{dt} \right)^2 = C - mg \frac{l}{2} \sin \theta.$$

Diese Gleichung hätte man nach dem Princip der lebendigen Kraft sofort niederschreiben können. Denn die lebendige Kraft des Keils ist offenbar  $\frac{1}{2} M \left( \frac{dx}{dt} \right)^2$  und die des Stabes  $\frac{1}{2} mk^2 \left( \frac{d\theta}{dt} \right)^2$ . Bezeichnet  $y$  die Höhe des Schwerpunkts des Stabes  $OA$  über  $OC$ , so ist die Kräftefunction  $\frac{1}{2} C - mgy$  nach § 140. Da ferner  $y = \frac{1}{2} l \sin \theta$  ist, so ergibt sich damit das obige Resultat.

Substituiert man aus Gl. (3) den Werth von  $\frac{dx}{dt}$ , so wird

$$\left[ M \frac{l^2}{\sin^2 \alpha} \cos^2 (\alpha - \theta) + m k^2 \right] \left( \frac{d\theta}{dt} \right)^2 = C - m g l \sin \theta \quad (4),$$

worin  $C = m g l \sin \beta$  ist, falls der Stab sich zu bewegen anfängt, wenn  $\theta = \beta$  ist.

Diese Gleichung lässt sich nicht weiter integrieren;  $\theta$  kann also nicht durch  $t$  ausgedrückt werden; dagegen ergibt sich aus ihr die Winkelgeschwindigkeit des Balkens und daher auch die Geschwindigkeit des Keils.

§ 147. Zwei gleich lange Stäbe  $AB$ ,  $BC$  sind durch ein Scharnier bei  $B$  verbunden und können frei auf einer glatten horizontalen Ebene gleiten. Das Ende  $A$  des Stabes  $AB$  ist durch ein zweites Scharnier mit einem festen Punkt des Tisches verbunden. Ein elastischer Faden  $AC$ , dessen Länge, wenn er nicht gespannt ist, gleich  $AB$  oder  $BC$  ist, verbindet  $A$  mit dem Ende  $C$  des Stabes  $BC$ . Anfangs bilden die beiden Stäbe mit dem Faden ein gleichseitiges Dreieck und das System beginnt seine Bewegung mit der Winkelgeschwindigkeit  $\Omega$  um  $A$ . Man suche die grösste Länge des elastischen Fadens während der Bewegung; ebenso die Winkelgeschwindigkeit der Stäbe, wenn sie einen rechten Winkel miteinander machen und den geringsten Werth von  $\Omega$ , der diese Lage möglich macht.

1) Die folgende Lösung der Aufgabe wird auf den ersten Blick etwas umständlich erscheinen. Hier sollen jedoch die verschiedenen Arten, wie die Principien der Flächen und der lebendigen Kraft anzuwenden sind, erläutert werden. Wir gehen auf die Einzelheiten ein, weil es das erste Beispiel dieser Art ist. Sonst freilich werden die aus diesen Principien abgeleiteten Gleichungen (1) und (2) in der Regel ohne oder nur mit wenigen Erklärungen niedergeschrieben.

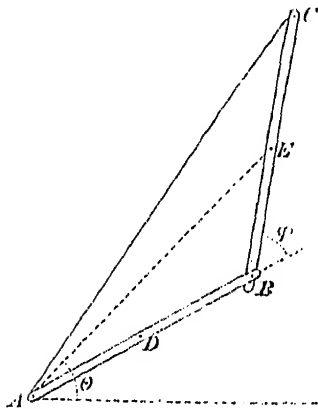
$2a$  sei die Länge eines jeden Stabes,  $mk^2$  sein Trägheitsmoment für seinen Schwerpunkt, so dass also  $k^2 = \frac{1}{3} a^2$  ist.  $D$  und  $E$  seien die Mittelpunkte der Stäbe und  $(x, y)$  die Coordinaten von  $E$  auf  $A$  als Coordinatenanfang bezogen.

Die einzigen an dem System angreifenden Kräfte sind die Reaction des Scharniers bei  $A$  und die Spannung des elastischen Fadens  $AC$ . Eine Richtung, für welche die Summe der Componenten derselben verschwindet, ist nicht zu ermitteln, weil die Richtung der Reaction bis jetzt

unbekannt ist. Da aber die Richtungslinien der beiden Kräfte durch  $A$  gehen, so verschwinden ihre Momente um  $A$  und die Winkelbewegungsgrösse um  $A$  bleibt deshalb nach § 133 während der Bewegung constant und ihrem Anfangswerth gleich.  $\omega, \omega'$  seien die Winkelgeschwindigkeiten von  $AB, BC$  zur Zeit  $t$ . Die Winkel-

bewegungsgrösse von  $BC$  um  $A$  ist  $m \left( x \frac{dy}{dt} - y \frac{dx}{dt} + k^2 \omega' \right)$  nach § 134. Die Winkelbewegungsgrösse von  $AB$  um  $A$  ist nach demselben Paragraphen  $m(k^2 + a^2) \omega$ , da  $AB$  sich um den festen Punkt  $A$  dreht. Sie haben die Anfangswerthe  $m(3a^2 + k^2) \Omega$  bez.  $m(k^2 + a^2) \Omega$ , da  $\omega, \omega'$  und  $\frac{d\theta}{dt}$  anfänglich gleich  $\Omega$  sind und  $AE$  Anfangs das Loth von  $A$  auf die gegenüberliegende Seite in dem von dem System gebildeten gleichseitigen Dreieck ist. Daher wird

$$m(k^2 + a^2) \omega + m \left[ x \frac{dy}{dt} - y \frac{dx}{dt} + k^2 \omega' \right] = m(2k^2 + 4a^2) \Omega \quad (1).$$



$$\frac{1}{2} m \left[ \left( \frac{dx}{dt} \right)^2 + \left( \frac{dy}{dt} \right)^2 + k^2 \omega'^2 \right]$$

nach § 139 und des Stabes  $AB$  nach demselben Paragraphen  $\frac{1}{2} m (k^2 + a^2) \omega^2$ , da er sich um  $A$  als festen Punkt dreht. Ihre Anfangswerthe sind  $\frac{1}{2} m (3a^2 + k^2) \Omega^2$  bez.  $\frac{1}{2} m (k^2 + a^2) \Omega^2$ . Ist  $T$  die Spannung des Fadens,  $\varrho$  seine Länge zur Zeit  $t$ ,

so ist die Kräftefunction der Spannung  $\int_{2a}^{\varrho} (-T) d\varrho$ . Wie aus der Lehre von den virtuellen Momenten in der Statik bekannt ist, muss der Spannung das negative Vorzeichen gegeben werden, da sie  $\varrho$  zu verkleinern sucht und die Grenzen sind  $2a$  und  $\varrho$ , weil der Faden sich von seiner Anfangslänge  $2a$  bis  $\varrho$  ausgedehnt hat. Da nach dem Hooke'schen Gesetz  $T = E \frac{\varrho - 2a}{2a}$  ist, so erhält man die

Kräftefunction durch Integration  $= -E \frac{(\varrho - 2a)^2}{4a}$ . Die Reaction bei  $A$  tritt nach § 141 in der Gleichung der lebendigen Kraft nicht auf. Diese letztere ist daher

$$m(k^2 + a^2)\omega^2 + m \left[ \left( \frac{dx}{dt} \right)^2 + \left( \frac{dy}{dt} \right)^2 + k^2 \omega'^2 \right] = m(2k^2 + 4a^2)\Omega^2 - E \frac{(\varrho - 2a)^2}{2a} \quad (2).$$

Es sind nur zwei unabhängige Bewegungen der Stäbe möglich. Man kann  $AB$  um  $A$  und  $BC$  um  $B$  drehen; alle Bewegungen, die nicht aus ihnen bestehen, sind mit den geometrischen Bedingungen der Aufgabe unvereinbar. Zwei dynamische Gleichungen sind zu ihrer Bestimmung ausreichend und diese haben wir eben erhalten; alle übrigen Gleichungen, die vielleicht noch nöthig sind, müssen aus geometrischen Betrachtungen abgeleitet werden.

Sind  $\psi, \psi'$  die Neigungen der Stäbe  $AB, BC$  gegen die  $x$ -Axe und ist  $\varphi = \psi' - \psi$ , so ist

$$\begin{aligned} x &= 2a \cos \psi + a \cos \psi' & y &= 2a \sin \psi + a \sin \psi' \\ \frac{dx}{dt} &= -2a \sin \psi \omega - a \sin \psi' \omega' & \frac{dy}{dt} &= 2a \cos \psi \omega + a \cos \psi' \omega'. \end{aligned}$$

Die Gleichungen der Winkelbewegungsgrösse und der lebendigen Kraft werden dann

$$m(k^2 + 5a^2 + 2a^2 \cos \varphi) \omega + m(k^2 + a^2 + 2a^2 \cos \varphi) \omega' = m(2k^2 + 4a^2) \Omega \quad (3),$$

$$m(k^2 + 5a^2) \omega^2 + m(k^2 + a^2) \omega'^2 + 4ma^2 \omega \omega' \cos \varphi = m(2k^2 + 4a^2) \Omega^2 - E \frac{(\varrho - 2a)^2}{2a} \quad (4).$$

Diese Gleichungen bestimmen  $\omega, \omega'$  in Ausdrücken des Hülfswinkels  $\varphi$ .

Die grösste Länge des elastischen Fadens während der Bewegung zu finden.

In dem Augenblick, in welchem  $\varrho$  ein Maximum wird, ist  $\frac{d\varrho}{dt} = 0$  und das ganze System bewegt sich daher, als wäre es ein starrer Körper. Für diesen einzelnen Moment ist also  $\omega = \omega'$  und die Gleichungen (3) und (4) werden, wenn man für  $k^2$  seinen Werth  $\frac{a^2}{3}$  einsetzt,

$$(10 + 6 \cos \varphi) \omega = 7 \Omega, \quad (10 + 6 \cos \varphi) \omega^2 = 7 \Omega^2 - \frac{3E}{4ma^3} (\varrho - 2a)^2.$$

Eliminirt man  $\omega$  und bedenkt, dass  $\varrho = 4a \cos \frac{1}{2} \varphi$  ist, so erhält man

$$E(3\varrho^2 + 16a^2)(\varrho - 2a) = 28m\Omega^2 a^3 (\varrho + 2a).$$

Diese cubische Gleichung hat eine positive Wurzel, die grösser als  $2a$  ist.

Die Bewegung in dem Augenblick zu finden, in dem die Stäbe rechtwinklig zu einander sind. In diesem Moment ist  $\varphi = \frac{1}{2}\pi$  und (3) und (4) erhalten die Gestalt

$$8\omega + 2\omega' = 7\Omega, \quad 8\omega^2 + 2\omega'^2 = 7\Omega^2 - \frac{3E}{ma}(\sqrt{2} - 1)^2.$$

Aus diesen Gleichungen lässt sich  $\omega$  und  $\omega'$  leicht ableiten. Offenbar sind die Werthe für  $\omega$ ,  $\omega'$  nur dann reell, wenn  $7\Omega^2 > \frac{10(\sqrt{2} - 1)^2 E}{ma}$  ist.

2) Eine andere Lösung. Man kann sich oft die Mühe einer Elimination ersparen, wenn man die aus den Principien der Flächen und der lebendigen Kraft abgeleiteten Gleichungen in einer etwas andern Art bildet. Der Stab  $BC$  dreht sich um  $B$  mit der Winkelgeschwindigkeit  $\omega'$ , während sich gleichzeitig  $B$  senkrecht zu  $AB$  mit der Geschwindigkeit  $2a\omega$  bewegt. Die Geschwindigkeit des Punktes  $E$  ist daher die Resultante von  $a\omega'$  senkrecht zu  $BC$  und  $2a\omega$  senkrecht zu  $AB$ , beide selbstverständlich dem Punkt  $E$  ertheilt. Wünschen wir die Resultate in Ausdrücken von  $\omega$ ,  $\omega'$  zu erhalten, so kann man diese Geschwindigkeiten statt der Coordinaten  $(x, y)$  benutzen, um die Bewegung von  $E$  auszudrücken.

Bei der Anwendung des Principes der Flächen haben wir das Moment der Geschwindigkeit von  $E$  um  $A$  zu suchen. Da die Geschwindigkeit  $2a\omega$  senkrecht zu  $AB$  ist, so hat das Loth von  $A$  auf ihre Richtung eine Länge gleich  $AB$  plus der Projection von  $BE$  auf  $AB$ , also  $= 2a + a \cos \varphi$ . Weil die Geschwindigkeit  $a\omega'$  senkrecht zu  $BE$  ist, so hat das Loth von  $A$  auf ihre Richtung eine Länge gleich  $BE$  plus der Projection von  $AB$  auf  $BE$ , also  $= a + 2a \cos \varphi$ . Die Winkelbewegungsgrösse des Stabes  $BC$  um  $A$  ist daher nach § 134

$$mk^2\omega' + 2ma\omega(2a + a \cos \varphi) + ma\omega'(a + 2a \cos \varphi).$$

Das Princip der Flächen für die beiden Stäbe liefert daher

$$m(k^2 + 5a^2 + 2a^2 \cos \varphi)\omega + m(k^2 + a^2 + 2a^2 \cos \varphi)\omega' = m(2k^2 + 4a^2)\Omega.$$

Die rechte Seite der Gleichung ist der Anfangswerth der Winkelbewegungsgrösse und wird aus der linken Seite dadurch erhalten, dass man  $\cos \varphi = -\frac{1}{2}$  und  $\omega = \omega' = \Omega$  setzt.

Bei der Anwendung des Principes der lebendigen Kraft brauchen wir die Geschwindigkeit von  $E$ . Betrachtet man sie als die Resultante von  $2a\omega$  und  $a\omega'$  und ist  $v$  ihr Werth, so ist offenbar

$$v^2 = (2a\omega)^2 + (a\omega')^2 + 2 \cdot 2a\omega \cdot a\omega' \cos \varphi.$$

Hat man den Anfangswerth bestimmt, wie zuvor, indem man  $\cos \varphi = -\frac{1}{2}$ ,  $\omega = \omega' = \Omega$  setzt, so liefert das Princip der lebendigen Kraft nach § 142

$$\begin{aligned} m(k^2 + 5a^2)\omega^2 + m(k^2 + a^2)\omega'^2 + 4ma^2\omega\omega' \cos \varphi = \\ = m(2k^2 + 4a^2)\Omega^2 - E \frac{(q - 2a)^2}{2a}, \end{aligned}$$

wobei die Kräftefunction ebenso, wie früher, ermittelt wird. Da  $\frac{dq}{dt} = \omega' - \omega$  und

$q = 4a \cos \frac{1}{2}\varphi$  ist, so haben wir gerade drei Gleichungen zur Bestimmung von  $\omega$ ,  $\omega'$  und  $\varphi$ . Sind nur diese Grössen zu suchen, wie in den beiden obigen Fällen, so hat diese Form der Lösung den Vorzug der Kürze.

Beisp. 1. Zwei Stäbe  $AB$ ,  $BC$  von gleicher Masse sind durch ein Scharnier bei  $B$  verbunden und das Ende  $A$  liegt fest. Sie fallen aus einer Anfangslage unter der Wirkung der Schwere. Ihre Längen sind  $2a$  bez.  $2b$  und ihre Neigungen gegen den Horizont  $\theta$ ,  $\varphi$  zu irgend einer Zeit. Man beweise, dass



$$\frac{d}{dt} \left[ 16a^2 \frac{d\theta}{dt} + 4b^2 \frac{d\varphi}{dt} + 6ab \cos(\varphi - \theta) \left( \frac{d\theta}{dt} + \frac{d\varphi}{dt} \right) \right] = 9ag \cos \theta + 3bg \cos \varphi$$

und

$$8a^2 \left( \frac{d\theta}{dt} \right)^2 + 2b^2 \left( \frac{d\varphi}{dt} \right)^2 + 6ab \cos(\varphi - \theta) \frac{d\theta}{dt} \cdot \frac{d\varphi}{dt} = 9ag \sin \theta + 3bg \sin \varphi + C.$$

Die erste Gleichung erhält man aus der Winkelbewegungsgrösse um  $A$  für beide Körper, wie in § 78 erklärt wurde. Die zweite ist die Gleichung der lebendigen Kraft.

[Coll. Ex.]

Beisp. 2. An einen gleichförmigen Stab von der Länge  $2a$  ist durch einen Faden  $b$  ein materieller Punkt befestigt; der Stab und der Faden werden in der selben Geraden auf einen glatten Tisch gelegt und der materielle Punkt wird mit der Geschwindigkeit  $V$  senkrecht zum Faden fortgeschleudert; man beweise, dass der grösste Winkel  $\varphi$ , den der Faden mit dem Stab machen kann, durch

$$\sin^2 \frac{1}{2} \varphi = \frac{a(1+n)}{12b}$$

gegeben ist, worin  $n$  das Verhältniss der Masse des Stabes zu der des Punktes bedeutet. Man zeige auch, dass die Winkelgeschwindigkeit

$$\text{alsdann } \frac{V}{a+b} \text{ ist.}$$

[Coll. Ex.]

Der gemeinschaftliche Schwerpunkt  $G$  bewegt sich mit gleichförmiger Geschwindigkeit in einer Geraden. Sowohl die lebendige Kraft als die Winkelbewegungsgrösse um  $G$  sind constant.

Beisp. 3. Drei gleiche und gleichförmige Stangen sind aus solchem Material hergestellt, dass jeder Massenpunkt jeden andern mit einer Kraft abstösst, die dem Product ihrer Massen und ihrem Abstand direct proportional ist und sind an ihren Enden so verbunden, dass sie sich frei um sie drehen können und dass sie ein gleichseitiges Dreieck bilden. Eine der Verbindungen an den Ecken wird entfernt; man beweise, dass die Winkelgeschwindigkeit jeder der äusseren Stangen, wenn alle drei sich in gerader Linie befinden,  $\sqrt{8,4}$  mal so gross als ihre Winkelgeschwindigkeit zu der Zeit ist, wenn sie rechte Winkel mit der mittleren Stange bilden.

[Math. Tripos 1878.]

Beisp. 4. Vier gleiche Stäbe  $OA, AC, CB, BO$  sind durch Scharniere frei an ihren Enden verbunden, so dass sie einen Rhombus bilden und der Winkel  $AOB = \alpha$  ist. Das System rotirt in seiner Ebene mit der Winkelgeschwindigkeit  $\Omega$  um  $O$ , welches im Raum festliegt und dabei sind die Eckpunkte  $O, C$  durch einen Faden verbunden. Der Faden gibt nach und  $\omega, \omega'$  sind die Winkelgeschwindigkeiten der Stäbe zu irgend einer späteren Zeit. Man beweise, dass

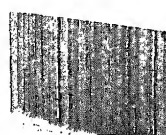
$$\text{ist.} \quad (\omega - \omega')^2 = 2 \left( 1 + \frac{3}{5} \cos \alpha \right) \left( \Omega^2 - \frac{2\Omega\omega\omega'}{\omega + \omega'} \right)$$

§ 148. Die Linse eines schweren Pendels enthält eine kugelförmige Aushöhlung, welche mit Wasser gefüllt ist. Man soll die Bewegung ermitteln.

$O$  sei der Aufhängungspunkt,  $G$  der Schwerpunkt des festen Theils des Pendels,  $Mk^2$  sein Trägheitsmoment für  $O$  und  $OG = h$ .  $C$  sei der Mittelpunkt der Wasserkugel,  $a$  ihr Radius und  $OC = c$ ;  $m$  sei die Masse des Wassers.

Wenn wir annehmen, das Wasser sei eine vollkommene Flüssigkeit, so muss nach der Definition einer Flüssigkeit die Action zwischen ihm und dem Gefäss die Richtung der Normalen zur Kugeloberfläche haben. Es existirt daher keine Kraft, welche die Flüssigkeit um ihren Schwerpunkt zu drehen sucht. Bei dem Hin- und Herschwingen des Pendels nimmt der Mittelpunkt der Kugel an dieser Bewegung Theil, ohne dass das Wasser rotirt.

Die Effectivkräfte des Wassers sind nach § 131 gleichwerthig mit der Effectivkraft der ganzen in ihrem Schwerpunkt vereinigten Masse und einem Paar  $mk^2 d\omega/dt$ ,



worin  $\omega$  die Winkelgeschwindigkeit des Wassers und  $m h^2$  sein Trägheitsmoment um einen Durchmesser ist.  $\omega$  ist aber, wie eben gezeigt wurde, Null; das Paar fällt also weg. Daraus folgt, dass man bei allen Problemen dieser Art, wenn der Körper sich nicht dreht oder sich mit gleichförmiger Geschwindigkeit dreht, den Körper in einen einzigen in seinem Schwerpunkt liegenden materiellen Punkt vereinigen kann.

Das Pendel und die vereinigte Flüssigkeit bilden nun einen starren um eine feste Axe rotirenden Körper; wenn daher  $\theta$  den Winkel bedeutet, den eine im Körper festliegende Linie  $CO$  mit der Verticalen bildet, so ist die Bewegungsgleichung nach § 89

$$(Mh^2 + mc^2) \frac{d^2\theta}{dt^2} + (Mh + mc) g \sin \theta = 0,$$

worin bei der Feststellung des Moments der Schwere vorausgesetzt wurde, dass  $O$ ,  $G$ ,  $C$  in grader Linie liegen. Die Länge  $L'$  des gleichwerthigen einfachen Pendels ist nach § 92

$$L' = \frac{MK^2 + mc^2}{Mh + mc}.$$

$mh^2$  sei das Trägheitsmoment der Wasserkugel um einen Durchmesser. Denkt man sich nun, das Wasser würde fest und wäre mit dem Gefäss starr verbunden, so findet man die Länge  $L$  des einfachen gleichwerthigen Pendels auf ähnliche Art

$$L = \frac{MK^2 + m(c^2 + h^2)}{Mh + mc}.$$

Es ist also  $L' < L$ , die Schwingungsdauer daher kleiner, als wenn das Ganze massiv wäre.

#### § 149. Die charakteristischen Merkmale sich bewegender Körper

Aus den Bewegungsgleichungen der Körper in § 135 ist ersichtlich, dass die Bewegung abhängt 1) von der Masse des Körpers, 2) der Lage des Schwerpunkts, 3) den äusseren Kräften, 4) den Trägheitsmomenten des Körpers um gerade durch seinen Schwerpunkt gehende Linien, 5) den geometrischen Gleichungen. Zwei Körper können so verschieden sein, wie möglich; wenn diese Merkmale dieselben sind, so bewegen sie sich auf dieselbe Art, d. h. ihre Schwerpunkte beschreiben dieselbe Bahn und ihre Winkelbewegungen um ihre Schwerpunkte sind dieselben. Dieser Satz wird oft mit Vorthail dazu verwendet, den gegebenen Körper mit einem andern zu vertauschen, dessen Bewegung sich leichter finden lässt.

Wenn z. B. eine Kugel eine *excentrische* kugelförmige Aushöhlung hat, welche mit einer Flüssigkeit von derselben Dichtigkeit wie die der massiven Kugel gefüllt ist, so hängt die Bewegung der Kugel von der Lage der Höhlung nicht ab; man kann also den hohlen Raum, wenn es vortheilhafter ist, in den Mittelpunkt verlegen. Denn da die Flüssigkeitskugel entweder nicht oder mit gleichförmiger Winkelgeschwindigkeit rotirt, so wird die Bewegung nicht verändert, wenn man die Flüssigkeit in einen in ihrem Centrum liegenden materiellen Punkt vereinigt. Alsdann ist offenbar das erste, zweite, dritte und fünfte Merkmal unabhängig von der Lage der Höhlung. Was das vierte angeht, so sei  $a$  der Radius der Kugel,  $b$  derjenige der Höhlung,  $c$  der Abstand ihres Mittel-

punkts vom Centrum der Kugel; das Trägheitsmoment des massiven Theils der Kugel ist alsdann  $\frac{4}{3} \pi a^3 \cdot \frac{2}{5} a^2 - \frac{4}{3} \pi b^3 \cdot \left( \frac{2}{5} b^2 + c^2 \right)$  und das der Flüssigkeit, wenn sie in ihrem Mittelpunkt vereinigt wird,  $\frac{4}{3} \pi b^3 \cdot c^2$ . Addirt man beide, so verschwindet  $c$ ; das ganze Trägheitsmoment ist daher von der Lage der Höhlung unabhängig.

Ein andres Beispiel ist die Bewegung einer gleichförmigen dreieckigen Lamelle unter dem Einfluss der Schwere. Ersetzt man die Fläche durch drei Drähte, welche ihren Umfang bilden, aber kein Gewicht haben, so bleiben die geometrischen Bedingungen der Bewegung im Allgemeinen unverändert und setzt man auf die Mittelpunkte der Drähte drei materielle Punkte, wovon jeder ein Drittel der Masse des Dreiecks enthält, so hat der Körper dieselben charakteristischen Merkmale, wie das wirkliche Dreieck und kann es in jedem Problem ersetzen.

Beisp. 1. Ein materielles Dreieck, welches sich im Zustand der Ruhe befindet, wird im Mittelpunkt einer Seite von einem Stoss senkrecht zu seiner Ebene getroffen; man zeige, dass die Momentanaxe die beiden andern Seiten halbirt. Trifft jedoch der Stoss einen Eckpunkt, so theilt die Momentanaxe die beiden Seiten, die in diesem Punkt zusammenlaufen, im Verhältniss von 3 : 1.

Dies ist eigentlich kein Fall ebener Bewegung, doch lassen sich die Resultate aus bereits gegebenen Sätzen ableiten, wenn man die Momente um eine Gerade nimmt, welche durch den Angriffspunkt des Stosses und einen der gleichwerthigen materiellen Punkte geht.

Beisp. 2. Eine materielle dreieckige Fläche  $ABC$  schwingt um eine Seite  $AB$  als horizontale Axe unter dem Einfluss der Schwere; man zeige, dass die Druckkräfte auf die feste Axe einem verticalen Druck auf den Mittelpunkt  $O$  von  $AB$  und einem Druck in der Ebene des Dreiecks gleichkommen, welcher den Abstand zwischen  $O$  und der Projection  $N$  von  $C$  auf  $AB$  halbirt. Der erste ist  $\frac{1}{3} W$  und der zweite ist der Spannung eines Fadenpendels von der Länge  $\frac{1}{2} CN$  und dem Linsengewicht  $\frac{2}{3} W$  gleich, wobei  $W$  das ganze Gewicht bezeichnet.

Die Rotationsträgheit einer rauhen Rolle, über welche ein Faden läuft, der zwei Theile eines dynamischen Systems verbindet, zog man früher dadurch in Rechnung, dass man die Rolle durch eine andre von derselben Grösse aber ohne Masse ersetzte und ihren Umfang mit einem materiellen Punkt belud. Ist  $a$  der Radius der Rolle,  $k$  ihr Trägheitsradius in Bezug auf das Centrum,  $m$  ihre Masse, so ist die Masse des materiellen Punktes  $\frac{k^2}{a^2} m$ , so dass sie also für eine cylindrische Rolle die Hälfte der Masse der Rolle ausmacht. Sie muss dann der Masse der übrigen an dem Faden befestigten materiellen Punkte zugezählt werden. Sind z. B. zwei schwere Massen  $M, M'$  durch einen Faden verbunden, der über eine cylindrische Rolle von der Masse  $m$  läuft, die sich frei um ihre Axe drehen kann, so ist die Bewegungsgleichung

$$\left( M + M' + \frac{m}{2} \right) \frac{dv}{dt} = (M - M') g,$$

worin  $v$  die Geschwindigkeit bedeutet. Die Trägheit der Rolle wird

dabei dadurch berücksichtigt, dass man einfach  $\frac{m}{2}$  zu der bewegten Masse addirt. Ist die Rolle ebenso im Raum beweglich wie sie sich drehen kann, so zieht man ihre Translationsträgheit wie gewöhnlich in Rechnung, indem man die ganze Masse in ihrem Schwerpunkt vereinigt. Da diese Vorstellung von der Rotationsträgheit jetzt nicht mehr oft benutzt wird, so überlassen wir den Beweis dieser Angaben, wenn einer nöthig sein sollte, dem Leser.

Beisp. 3. Die Endpunkte  $A$  und  $B$  eines Stabes  $AB$ , dessen Schwerpunkt in der Mitte  $O$  von  $AB$  liegt, sind gezwungen, sich längs zweier aufeinander senkrechter Geraden  $Ox$ ,  $Oy$  zu bewegen und irgend welche Kräfte wirken auf den Stab. Man zeige, dass die Bewegung dieselbe ist, als wenn die ganze Masse in seinem Schwerpunkt vereinigt wäre und alle Kräfte in dem Verhältniss  $a^2 + k^2 : a^2$  reducirt würden, unter  $2a$  die Länge  $AB$  und unter  $k$  den Trägheitsradius für den Schwerpunkt verstanden.

Beisp. 4. Eine kreisförmige Scheibe, deren Schwerpunkt in ihrem Centrum liegt, rollt auf einer vollkommen rauhen Curve unter dem Einfluss beliebiger Kräfte; man zeige, dass die Bewegung des Centrums dieselbe ist, als wenn die Curve glatt wäre und alle Kräfte im Verhältniss  $a^2 + k^2 : a^2$  reducirt würden, unter  $a$  den Radius der Scheibe und unter  $k$  den Trägheitsradius für das Centrum verstanden. Die normalen Druckkräfte auf die Curve sind jedoch in den beiden Fällen nicht dieselben. In irgend einer Lage der Scheibe beträgt der Unterschuss  $X \frac{k^2}{a^2 + k^2}$ , wenn  $X$  die Componente der an der Scheibe angreifenden Kraft längs der Normalen zur rauhen Curve ist.

§ 150. Die Spannung an irgend einem Punkt eines Stabes. Ist ein Stab  $OA$  befindet sich im Gleichgewicht unter der Einwirkung beliebiger Kräfte; man soll ihre Wirkung auf einen Querschnitt des Stabes bei  $P$  bestimmen. Diese Wirkung kann man als die Resultante der positiven oder negativen Spannungen der unzähligen Fasern auffassen, aus denen das Material des Stabes besteht. Aus der Statik ist bekannt, dass man sie zu einer Einzelkraft  $R$ , die an einem Punkt  $Q$ , den man beliebig wählen kann, angreift und zu einem Paar  $G$  verbinden kann. Da sich jeder Theil des Stabes im Gleichgewicht befindet, so müssen sie auch allen äusseren Kräften, welche an dem Stab auf der einen Seite des Querschnitts bei  $P$  angreifen, das Gleichgewicht halten. Ist der Stab unbegrenzt klein, so nimmt man  $Q$  gewöhnlich in der Ebene des Querschnitts an und die Kraft  $R$  und das Paar  $G$  sind dann zusammen das Maass für die Spannung des Querschnitts.

Wird der Stab durch die Wirkung der Kräfte gebogen, so werden die Fasern auf der einen Seite ausgedehnt, auf der andern zusammengepresst. Der Stab beginnt zu brechen, sobald die Fasern hinlänglich ausgedehnt oder gedrückt werden. Wir wollen die Tendenz der Kraft  $R$ , den Stab zu brechen, mit der des Paares  $G$  vergleichen. Ist  $A$  der Flächeninhalt des Querschnitts des Stabes, so verursacht eine Kraft  $F$ , die den Stab zieht, eine resultirende Kraft  $R = F$  und ruft eine Spannung  $F/A$  hervor. Wird der Stab durch ein Paar  $G$  gebogen, so

$\frac{F}{A}$  ist. Dieselbe Kraft  $F$  hat, wenn sie in dem Abstand  $p$  von  $P$  an dem Stab angreift, ein Paar  $G = Fp$  zur Folge, welches durch das von den Spannungen gebildete Paar im Gleichgewicht gehalten werden muss. Ist  $2a$  die mittlere Breite des Stabes, so ist die mittlere durch  $G$  hervorgerufene Spannung, auf die Flächeneinheit bezogen, von der Ordnung  $\frac{F}{A} \cdot \frac{p}{a}$ . Ist nun der Querschnitt des Stabes sehr klein, so

ist  $\frac{p}{a}$  sehr gross. Daraus geht hervor, dass das Paar, wenn es existirt, im Allgemeinen einen viel grösseren Einfluss auf das Brechen des Stabes ausübt, als die Kraft. Man nimmt daher oft dieses Paar zum Maass für die gesammte auf das Brechen des Stabes gerichtete Wirkung der Kräfte. Die Tendenz der Kräfte, einen Stab  $OA$  in einem Punkt  $P$  zu brechen, wird durch das Moment um  $P$  aller Kräfte, welche an einem der Segmente  $OP$ ,  $PA$  des Stabes angreifen, gemessen.

Die Componente der Kraft  $R$ , welche senkrecht zum Stab gerichtet ist, heisst die *Scheerkraft*. Sie kommt den senkrecht zum Stab gerichteten Componenten aller Kräfte, welche an einem der Segmente  $OP$ ,  $PA$  angreifen, gleich.

Beindet sich der Stab in Bewegung, so gelten nach dem D'Alembert'schen Princip dieselben Betrachtungen; vorausgesetzt, dass man die umgekehrten Effectivkräfte in die Kräfte einschliesst, die an dem Stab angreifen.

Meistens wird der Stab so wenig gebogen, dass man beim Aufstellen des Moments der gegebenen Kräfte die Wirkung der Krümmung vernachlässigen kann.

Ist der Querschnitt des Stabes nicht sehr klein, so wird das obige Maass für die „Tendenz zum Brechen“ unanwendbar. Man muss dann sowohl die Kraft als das Paar in Betracht ziehen. Dieser Fall liegt ausserhalb der Grenzen unsres Buches; wir verweisen den Leser auf die Werke über Elasticitätstheorie.

Liegt kein Stab sondern ein Faden vor, so verschwindet das Paar und die Kraft greift in der Richtung der Tangente an den Faden an. Die Inanspruchnahme des Fadens an irgend einem Punkt wird daher einfach durch seine Spannung gemessen.

§ 151. Ein Stab  $OA$  von der Länge  $2a$  und der Masse  $m$ , der sich frei um sein eines Ende  $O$  drehen kann, fällt in einer verticalen Ebene unter dem Einfluss der Schwere herab. Man suche die „Tendenz zum Brechen“ an einem Punkt  $P$ .

Sei ein Element des Stabes im Abstand  $u$  von  $P$  und auf derselben Seite von  $P$  wie das Ende  $A$  des Stabes. Es sei  $OP = x$  und  $\theta$  der Winkel, den der Stab mit der Verticalen zur Zeit  $t$  macht. Die Effectivkräfte für  $du$  sind

$$m \frac{du}{2a} (x+u) \frac{d^2\theta}{dt^2} \quad \text{und} \quad -m \frac{du}{2a} (x+u) \left( \frac{d\theta}{dt} \right)^2$$

senkrecht zum Stab bez. in seiner Richtung genommen. Die gegebene Kraft ist  $m \frac{du}{2a} g$ , die vertical abwärts gerichtet ist. Wendet man die Effectivkräfte um, so

ist die Tendenz zum Brechen bei  $P$  dem Moment aller Kräfte, welche an dem Theil  $PA$  des Stabes angreifen, in Bezug auf  $P$  gleich. Nennen wir es  $L$ , so ist

$$L = \int m \frac{du}{2a} g u \sin \theta + \int m \frac{du}{2a} (x+u) u \frac{d^2 \theta}{dt^2},$$

wobei die Grenzen von  $u=0$  bis  $u=2a-x$  gehen. Die Bewegungsgleichung ist ferner, wenn man die Momente um  $O$  nimmt,

$$m \frac{4a^3}{3} \frac{d^2 \theta}{dt^2} = -mg a \sin \theta.$$

Daraus ergibt sich leicht

$$L = -\frac{mg \sin \theta}{16a^2} x(2a-x)^2.$$

Das Minuszeichen bedeutet, dass die Kräfte  $PA$  um  $P$  in einer Richtung zu biegen suchen, welche derjenigen entgegengesetzt ist, in welcher  $\theta$  gemessen wurde.

Um zu ermitteln, wo der Stab, der gleichmässig stark vorausgesetzt wird, am wahrscheinlichsten brechen wird, muss man  $L$  zu einem Maximum machen.

Dies gibt  $\frac{dL}{dx} = 0$  und mithin  $x = \frac{2a}{3}$ . Der gesuchte Punkt liegt in einem Abstand vom festen Ende, der einem Drittel der Länge des Stabes gleich ist. Seine Lage, wie man sich merken möge, ist unabhängig von den Anfangsbedingungen.

Um die Scheerkraft bei  $P$  zu finden, muss man die Componente senkrecht zum Stab suchen. Wird das Resultat  $Y$  genannt, so ist

$$Y = \int m \frac{du}{2a} g \sin \theta + \int m \frac{du}{2a} (x+u) u \frac{d^2 \theta}{dt^2},$$

wobei die Grenzen dieselben wie zuvor sind. Dies gibt

$$Y = \frac{mg \sin \theta}{16a^2} (2a-x)(2a-3x),$$

welches an der Stelle verschwindet, an welcher die Tendenz zum Brechen ein Maximum ist und ein Maximum in einem Abstand vom festen Ende wird, der zwei Drittel der Länge des Stabes beträgt.

Um die Zugspannung bei  $P$  zu finden, muss man die Componente in der Richtung des Stabes suchen. Heisst das Resultat  $X$  und wird in der Richtung  $OA$  positiv genommen, so erhält man

$$X = -\int m \frac{du}{2a} g \cos \theta - \int m \frac{du}{2a} (x+u) \left( \frac{d\theta}{dt} \right)^2.$$

Geht der Stab vom Zustand der Ruhe aus bei einer Neigung  $\alpha$  gegen die Verticale, so findet man durch Integration der Bewegungsgleichung

$$\left( \frac{d\theta}{dt} \right)^2 = \frac{3g}{2a} (\cos \theta - \cos \alpha).$$

Mithin

$$X = \frac{mg}{8a^2} (2a-x) [-4a \cos \theta + 3(\cos \alpha - \cos \theta)(2a+x)].$$

Aus diesen Gleichungen folgt: (1) Die Grösse des Biegemoments und der Scheerkraft sind von den Anfangsbedingungen unabhängig. (2) Die Grösse sowohl des Momentes wie der Scheerkraft an einem beliebigen Punkt des Stabes variirt wie der Sinus der Neigung des Stabs gegen die Verticale. (3) Das Verhältniss der Grösse der Biegemomente an zwei gegebenen Punkten des Stabes bleibt immer dasselbe und dies gilt auch für die Scheerkräfte. (4) Die Zugspannung hängt von den Anfangsbedingungen ab und wenn der Stab nicht vom Zustand der Ruhe in horizontaler Richtung ausgeht, so ändert sich das Verhältniss der Spannungen an zwei gegebenen Punkten mit der Lage des Stabes.

§ 152. Ein starrer an einem Punkt vollständig gespaltener Reif rollt auf einer vollkommen rauhen horizontalen Ebene und keine andern Kräfte ausser der Schwere wirken auf ihn ein. Man beweise, dass das Biegemoment an dem von dem Spalt am weitesten entfernten Punkt immer dann ein Maximum wird, wenn der Spalt tiefer als das Centrum liegt und zugleich die Neigung des durch den Spalt gehenden Durchmessers gegen den Horizont  $\arctan \frac{2}{\pi}$  ist. [Math. Tripos, 1864.]

$\omega$  sei die Winkelgeschwindigkeit des Reifens,  $a$  sein Radius. Die Geschwindigkeit eines Punktes  $P$  des Reifens ist die Resultante aus der Geschwindigkeit  $a\omega$  parallel zur horizontalen Ebene und der gleichgrossen  $a\omega$  in der Richtung der Tangente an den Reifen. Die erste ist nach Richtung und Grösse constant und trägt daher zur Beschleunigung von  $P$  nichts bei. Die letztere ist der Grösse nach constant, aber in ihrer Richtung veränderlich und liefert  $a\omega^2$  als Beschleunigung in der Richtung des Radius des Reifens.  $A$  sei der Punkt, an welchem der Reif gespalten ist,  $B$  das andere Ende des Durchmessers,  $C$  das Centrum,  $\theta$  die Neigung von  $ACB$  gegen den Horizont.  $PP'$  sei irgend ein Element auf der oberen Hälfte des Kreises,  $BCP = \varphi$ . Dann ist das Biegemoment oder die Tendenz zu brechen bei  $B$  dem Ausdruck

$$\int_0^\pi \{-a\omega^2 a \sin \varphi + g[a \cos \theta - a \cos (\varphi + \theta)]\} a d\varphi = \\ = -2a^3\omega^2 + ga^2(\pi \cos \theta + 2 \sin \theta)$$

proportional. Er wird ein Maximum für  $\tan \theta = \frac{2}{\pi}$ .

Beisp. 1. Ein halbkreisförmiger Draht  $AB$  vom Radius  $a$  rotirt auf einer glatten horizontalen Ebene um sein eines Ende  $A$  mit constanter Winkelgeschwindigkeit  $\omega$ . Es sei  $\alpha\varphi$  der Bogen zwischen dem festen Punkt  $A$  und dem Punkt, an welchem die Tendenz zu brechen am grössten ist; man beweise, dass  $\tan \varphi = \pi - \varphi$  ist. Wird das Ende  $B$  plötzlich festgelegt und das andere  $A$  losgelassen, so ist die Tendenz zu brechen an einem Punkt  $P$  am grössten, für welchen

$$\frac{1}{2} \tan PBA = PBA$$

ist.

[Math. Tripos, 1886.]

Beisp. 2. Zwei Eckpunkte einer schweren quadratförmigen Lamelle, deren Seite  $a$  ist, sind mit zwei von dem Mittelpunkt eines Stabes, dessen Länge  $2a$  ist, gleichweit abstehenden Punkten so verbunden, dass das Quadrat um den Stab rotiren kann. Das Quadrat hat dasselbe Gewicht, wie der Stab. Wenn der Stab in horizontale Lage gebracht und an seinen Enden gestützt wird, so ist er im Begriff zu brechen. Der Stab wird nun in verticaler Lage an seinen Enden gehalten und dem Quadrat die Winkelgeschwindigkeit  $\omega$  gegeben. Man zeige, dass der Stab bricht, wenn  $a\omega^2 > 3g$  wird. [Coll. Exam.]

Beisp. 3. Ein Draht in der Gestalt des von der Axe abgeschnittenen Theils der Curve  $r = a(1 + \cos \theta)$  rotirt um den Coordinatenanfang mit der Winkelgeschwindigkeit  $\omega$ . Man beweise, dass die Tendenz zu brechen am Punkt  $\theta = \frac{\pi}{2}$  durch

$$m \frac{12\sqrt{2}}{5} \omega^2 a^3 \text{ gemessen wird. [St. John's Coll. (St. John's Coll. Examination Papers.)]}$$

Beisp. 4. Ein nicht homogener Stab  $OA$  wird wie ein Pendel um eine horizontale durch  $O$  gehende Axe geschwungen. Man beweise, dass, wenn der Stab bricht, dies an einem Punkt  $P$  geschieht, der dadurch bestimmt ist, dass der Schwerpunkt von  $PA$  das Schwingungscentrum des Pendels ist. [Math. Tripos, 1880.]

§ 153. Reibung zwischen unvollkommen rauhen Körpern. Die Componenten der Reaction. Wenn ein Körper auf einem andern rollt

und die Körper dabei gedrückt werden, so geben beide etwas nach und befinden sich daher längs einer kleinen Fläche in Berührung. In jedem Punkt dieser Fläche findet eine gegenseitige Einwirkung der Körper statt. Die Elemente grade hinter dem geometrischen Berührungspunkt sind im Begriff sich zu trennen und können das Bestreben haben aneinander hängen zu bleiben und die vor ihm können dem Zusammendrücken Widerstand zu leisten suchen. Die Gesamtheit der Wirkungen für alle Elemente ist 1) einer Componente  $R$  normal zur gemeinschaftlichen Berührungsebene und gewöhnlich *Normalreaction* genannt, gleichwerthig 2) einer in der Berührungsebene gelegenen Componenten  $F$ , *Reibung* genannt, 3) einem Paar  $L$ , dessen Axe in der Berührungsebene liegt und welches wir das *Paar der rollenden Reibung* nennen wollen und 4) wenn die Körper eine relative Geschwindigkeit um ihre gemeinschaftliche Normale haben, einem Paar  $N$  um diese Normale als Axe, welches das *Paar der drehenden Reibung* heissen möge.

Die beiden Paare sind, wie man durch Experimente gefunden hat, meistens sehr klein und werden im Allgemeinen vernachlässigt. Wenn jedoch die Reibungskräfte ebenfalls klein sind, kann es nöthig werden sie in Rechnung zu ziehen. Wir werden daher zuerst die Gesetze untersuchen, welche sich auf die Reibungskräfte beziehen, weil sie am wichtigsten sind und später die Gesetze, denen die Paare unterworfen sind.

§ 154. Die Reibungsgesetze. Um die Gesetze für die Reibungskräfte zu bestimmen, muss man Versuche an einigen einfachen Gleichgewichts- und Bewegungsfällen machen. Ein symmetrischer Körper werde also auf einen rauhen horizontalen Tisch gelegt und eine Kraft greife so an ihm an, dass jeder Punkt des Körpers parallel zu ihrer Richtung entweder sich bewegt oder gedrängt wird sich zu bewegen. Man findet dass, so lange die Kraft eine gewisse Grösse nicht erreicht hat, der Körper sich nicht bewegt. Das erste Reibungsgesetz lautet daher, dass die Reibung in einer solchen Richtung wirkt und eine solche Grösse hat, dass sie gerade ausreicht, Gleiten zu verhindern.

Wird nun die Kraft allmählich gesteigert, so findet man durch den Versuch, dass nicht mehr als eine gewisse Grösse der Reibung hervorgerufen werden kann und wenn mehr Reibung nöthig wäre um den Körper vom Gleiten abzuhalten, dass dann das Gleiten beginnt. Das zweite Reibungsgesetz stellt die Existenz dieser Grenze für die Grösse der Reibung, die zur Wirkung gebracht werden kann, fest. Ihr Werth heisst die *Grenzgrösse der Reibung*.

Das dritte ebenfalls durch Experimente gefundene Gesetz lautet, dass die Grenzgrösse der Reibung zu dem Normaldruck in einem bestimmten Verhältniss steht, welches für dieselben zwei in Berührung befindlichen Körper nahezu constant ist, sich aber ändert, wenn einer der Körper durch einen andern von verschiedenem Material ersetzt



wird. Dieses Verhältniss heisst der *Reibungscoefficient* der Materialien der beiden Körper. In der Mathematik nimmt man allgemein an, dass er constant sei.

Obgleich die Versuche über sein absolutes Constantsein nicht alle vollständig miteinander übereinstimmten, so hat man doch allgemein gefunden, dass, wenn die relative Bewegung der beiden Körper in allen Punkten der Berührungsfläche dieselbe ist, *der Reibungscoefficient nahezu von der Grösse der Berührungsfläche und der relativen Geschwindigkeit unabhängig ist.*

§ 155. Coulomb hat auf einen Unterschied hingewiesen, welcher zwischen statischer und dynamischer Reibung besteht. Die Reibung, welche überwunden werden muss, *um einen Körper relativ zu einem andern in Bewegung zu setzen*, ist grösser als die Reibung zwischen denselben Körpern, *wenn sie sich unter demselben Druck in Bewegung befinden.* Er fand auch, dass, wenn die Körper eine Zeit lang unter Druck in einer Gleichgewichtslage in Berührung blieben, die Reibung, die überwunden werden musste, grösser war, als wenn die Körper nur in Berührung gebracht und sofort vom Zustande der Ruhe aus unter demselben Druck in Bewegung gesetzt wurden. Bei einigen Körpern fand man nur einen sehr geringen Unterschied zwischen der statischen und dynamischen Reibung, bei andern war er beträchtlich<sup>1)</sup>. Die Experimente von Morin<sup>2)</sup> bestätigten im Allgemeinen seine Existenz. Nach Versuchen von Fleming Jenkin und J. A. Ewing, welche in den *Phil. Trans.*, 1877 beschrieben werden, war der Uebergang von statischer zu dynamischer Reibung nicht plötzlich. Mit Hülfe eines Apparates, der von den früher angewandten wesentlich abwich, waren sie im Stande bestimmte Messungen der Reibung zwischen Flächen zu machen, deren relative Geschwindigkeit von etwa einem Hundertstel bis etwa fünf Tausendstel engl. Fuss (3—6 mm) in der Secunde variirte. Es zeigte sich, dass in den Grenzen dieser verschwindend kleinen Geschwindigkeiten der Reibungscoefficient allmählich mit der Vergrösserung der Geschwindigkeit von seinem statischen bis zu seinem dynamischen Werth abnahm.

Die Versuche von Coulomb und Morin wurden mit Körpern gemacht, die sich mit mässiger Geschwindigkeit bewegten; in neuerer Zeit hat dagegen Capt. Douglas Galton<sup>3)</sup> Experimente über die Reibung zwischen gusseisernen Bremsblöcken und stählernen Radkränzen von Maschinen angestellt, die sich mit grosser Geschwindigkeit bewegten. Die Geschwindigkeit variirte von 7 bis zu 88 engl. Fuss

1) Die Resultate der Coulomb'schen Versuche findet man in seiner *Théorie des machines simples, Mémoires des Savants étrangers*, tome X. Diese Abhandlung erhielt 1781 den Preis der Académie des sciences und erschien 1809 in Paris in Sonderdruck.

2) *Nouv. expériences sur le frottement.* Metz 1833—1835 und spätere Aufsätze.

3) *Nature*, Bd. 18, S. 471.

per Secunde oder von 5 bis zu 100 km in der Stunde. Er kam zu den folgenden beiden Resultaten: 1) Der Reibungscoefficient war für grössere Geschwindigkeiten viel kleiner wie für geringere. 2) Er wurde kleiner, nachdem die Räder einige Secunden in Bewegung waren. Siehe den *Report of the British Association for the meeting in Dublin* 1878. Der Leser findet einen Bericht über Versuche mit *rollender Reibung* von Prof. Osborne Reynolds in den *Phil. Trans.*, 1876<sup>1)</sup>.

§ 156. Wenn man Körper *vollkommen rauh* nennt, so versteht man gewöhnlich darunter, dass sie so rauh sind, dass die Reibungsgrösse, welche dazu nöthig ist, Gleiten zu verhindern, unter den gegebenen Umständen ganz gewiss in Wirkung gesetzt werden kann. Der Reibungscoefficient ist daher praktisch unendlich gross. Nach dem ersten Reibungsgesetz ist die Reibungsgrösse, welche zur Wirkung kommt, diejenige, welche grade ausreicht Gleiten zu verhindern.

§ 157. *Anwendung der Reibungsgesetze.* Wir wollen nun die aus diesen Versuchen abgeleitete Theorie auf den Fall ausdehnen, in welchem ein Körper auf irgend eine Art in einer Ebene sich bewegt oder gedrängt wird sich zu bewegen. Nach einem bekannten kinematischen Satz, der im Anfang des nächsten Kapitels bewiesen werden wird, lässt sich eine solche Bewegung so vorstellen, als ob der Körper sich um ein Momentancentrum drehe. Ist  $O$  das Rotationscentrum, so bewegt sich oder sucht sich jeder Punkt  $P$  des Körpers in einer zu  $OP$  senkrechten Richtung zu bewegen.

Die Reibung bei  $P$  muss daher nach der oben gegebenen ersten Regel senkrecht zu  $OP$  aber in entgegengesetzter Richtung wirken. Bewegt sich  $P$ , so hat die Reibung bei  $P$  ihre Grenzgrösse und ist gleich  $\mu R$ , wenn  $R$  der Druck bei  $P$  und  $\mu$  der Reibungscoefficient ist. Bei einem in Bewegung befindlichen Körper ist daher die Richtung und Grösse der Reibung an jedem gleitenden Punkt in Ausdrücken der Coordinaten von  $O$  und des Druckes an dem Punkt bekannt.

2) Ueber *gleitende Reibung auf der Ebene* findet man eine vollständige Literaturangabe in dem Buch von Rühlmann, *Vorträge über Geschichte der technischen Mechanik*. Leipzig, 1885, in welchem alle Arbeiten von Bedeutung wie die von Hirn, Poinet, Bochet etc. besprochen werden. Für *gleitende Zapfenreibung* sind die von Tower im Auftrag der *Institution of Mechanical Engineers* angestellten Versuche massgebend, von denen sich eine ausführliche Besprechung in Dingler's Polytechnischem Journal vom 21./I. 1885 befindet. Eine Theorie darüber hat Reynolds, *Phil. Transactions*, 177 (1886) gegeben. Ausserdem ist wichtig das Buch von Thurston, *A treatise of friction and lost work in machinery and millwork*, 1894. Ueber *rollende Reibung* findet man eine vollständige Theorie in der oben genannten Arbeit von Reynolds, der sie auf gleitende Reibung zurückführt. Gute Literaturzusammenstellungen sind in Jeletski (Theorie der Reibung, deutsch von Lütroth u. Schepp, Leipzig, 1890), Henneberg (Technische Mechanik), Grashof (Theoretische Maschinenlehre) enthalten. Sehr elegant ist die Festschrift von Herrmann zum Universitätsjubiläum von Würzburg, 1882. Sie heisst: *Der Reibungswinkel*.

Soll man z. B. das kleinste Paar ermitteln, welches dazu nöthig ist eine schwere Scheibe, die mittelst mehrerer Stifte auf einem horizontalen Tisch ruht, in Bewegung zu setzen und sind die Druckkräfte an den Stiften bekannt, so erhält man durch Aufstellen der Componenten in zwei Richtungen und der Momente um eine verticale Axe drei Gleichungen. Aus diesen findet man das gesuchte Paar und die beiden Coordinaten von  $O$ .

Manchmal fällt  $O$  mit einem der Stützpunkte des Körpers zusammen. Alsdann hat die Reibung an *diesem* Punkt nicht ihren Grenzwert. Ihre Grösse reicht nur grade hin, den Punkt am Gleiten zu verhindern.

Beisp. Ein schwerer Körper ruht mittelst dreier Stifte  $A, B, C$  auf einem rauhen horizontalen Tisch und die Druckkräfte an den Stiften sind  $P, Q, R$ . Wenn an dem Körper ein Paar so angreift, dass er grade im Begriff ist, sich zu bewegen, zu zeigen, dass sich das Rotationscentrum in einem Punkt  $O$  befindet, der so liegt, dass die Sinusse der Winkel  $AOB, BOC, COA$  sich wie  $R : P : Q$  verhalten. Liegt aber der so bestimmte Punkt  $O$  nicht innerhalb des Dreiecks  $ABC$ , so fällt das Rotationscentrum mit einem der Stifte zusammen.

Dies folgt unmittelbar aus dem Kräfte-dreieck.

§ 158. Die Unstetigkeit der Reibung. Man beachte ganz besonders die eben erwähnte Unstetigkeit. Die Reibung an einem Stützpunkt, der gleitet, ist  $\mu R$ , wenn  $R$  der Normaldruck ist. Gleitet aber der Stützpunkt nicht, so ist die Reibung eine Grösse  $F$ , die unbekannt und jedenfalls kleiner als  $\mu R$  ist<sup>1)</sup>. Ihre Grösse muss man aus den Bewegungsgleichungen ableiten.

Ein sich bewegender Körper befinde sich mit einem Punkt  $A$  in Berührung mit einer festen rauhen Ebene und die Anfangsgeschwindigkeit von  $A$  sei Null. Der Punkt  $A$  kann entweder anfangen auf der Ebene zu gleiten oder der Körper kann nur rollen. Um zu bestimmen, welche dieser Bewegungen eintritt, können wir auf zwei Arten verfahren.

Bei der ersten Methode untersuchen wir die Reibung, die erforderlich ist, den Punkt  $A$  im Zustand der Ruhe zu halten. Unter der Annahme, der Körper rolle, stellen wir die Bewegungsgleichungen auf. Die Reibung  $F$  ist zwar unbekannt, wir haben aber eine geometrische Gleichung, welche die Bedingung ausdrückt, dass die Tangentialgeschwindigkeit von  $A$  Null ist. Durch Auflösung der Gleichungen finden wir das Verhältniss  $\frac{F}{R}$ . Ist dieses Verhältniss kleiner als der Reibungscoefficient  $\mu$ , so kann genug Reibung zur Wirkung kommen, um  $A$  im Zustand der Ruhe zu erhalten. *Der Körper beginnt daher zu rollen und fährt fort zu rollen, so lange das Verhältniss  $\frac{F}{R}$  kleiner als  $\mu$  bleibt.* Ist das Verhältniss  $\frac{F}{R}$  grösser als  $\mu$ , so gleitet der Körper

1) Es wird hier davon abgesehen, dass der Grenzwert des statischen Reibungscoefficienten dem dynamischen nicht gleich und auch der letztere nicht constant ist.  $\mu$  müsste eigentlich als *variabel* betrachtet werden.

bei  $A$ . Tritt dieser Fall ein, so stellen die aufgestellten Gleichungen die wahre Bewegung nicht dar und wir wenden die zweite Methode an.

Dabei bilden wir die Bewegungsgleichungen unter der Annahme, der Punkt  $A$  gleite auf der Ebene. Die Reibung ist dann  $\mu R$  statt  $R'$  und die geometrische Gleichung, die ausdrückt, dass bei  $A$  kein Gleiten stattfindet, fällt weg. Löst man die Gleichungen auf, so findet man die Tangentialgeschwindigkeit des Punktes  $A$  des Körpers. Ist sie nicht Null und der Richtung, in welcher die Reibung  $\mu R$  wirkt, wenn  $\mu$  ein eigenes ihm gegebenes Vorzeichen hat, entgegengesetzt, so hat man die wahre Bewegung gefunden. *Der Körper gleitet bei  $A$  und führt fort zu gleiten, so lange die Geschwindigkeit bei  $A$  nicht verschwindet.* Tritt dieser Fall ein, so muss man wieder auf die erste Methode zurückgreifen.

§ 159. *Die Unstetigkeit kann auch auf anderem Weg entstehen.* Wenn z. B. ein Körper über einen anderen gleitet, so ist die Reibung der Richtung der relativen Bewegung entgegengesetzt und numerisch der Normalreaction mit dem Reibungscoefficienten multiplicirt gleich. *Wechselt nun im Lauf der Bewegung die Richtung der Normalreaction ihr Zeichen, während die Bewegungsrichtung unverändert bleibt oder ändert sich das Vorzeichen der Bewegungsrichtung, während die Normalreaction ungeändert bleibt, so muss das Vorzeichen des Reibungscoefficienten vertauscht werden.* In Folge dessen kann es vorkommen, dass man neue dynamische Gleichungen ansetzen muss. Derselbe Fall tritt ein, wenn sich ein Körper in einem widerstehenden Mittel bewegt und dabei das Gesetz des Widerstandes eine grade Function der Geschwindigkeit ist, d. h. eine Function, die ihr Vorzeichen nicht wechselt, wenn die Geschwindigkeit ihre Richtung ändert.

§ 160. **Unbestimmte Bewegung.** Manchmal wird die Bewegung durch Einführung der Reibung unbestimmt. So haben wir in § 111 gesehen, dass die Componenten des Drucks eines in zwei Gelenken schwingenden Körpers auf die Gelenke in der Richtung der sie verbindenden Geraden statisch unbestimmt sind. Ihre Summe lässt sich finden, aber nicht jede einzelne. Die Bewegung jedoch ist bestimmt. Wären dagegen die Gelenke unvollkommen rau, so würden zwei Reibungspaare, an jedem Gelenk eines, auf den Körper wirken, deren gemeinschaftliche Axe die Gerade wäre, welche die Gelenke verbindet. Ihre Grösse würde dem Druck, multiplicirt mit einer von der Rauheit eines jeden Gelenkes abhängenden Constanten, gleich sein. Wären die Gelenke ungleich rau, so hinge die Grösse des resultirenden Paares von der Vertheilung des Drucks auf die beiden Gelenke ab. Alsdann wäre die Bewegung des Körpers unbestimmt.

Die wirkliche Bewegung findet man durch Benutzung der Elasticitätslehre.

§ 161. **Beispiele zur Reibung.** Beisp. 1. *Eine homogene Kugel wird im Zustand der Ruhe auf eine rauhe geneigte Ebene gebracht; der Reibungscoefficient ist  $\mu$ ; man bestimme, ob die Kugel gleitet oder rollt.*

$F$  sei die Reibung, die nöthig ist, damit die Kugel rollt. Das Problem wird dann dasselbe wie in § 144. Es ist daher  $F = \frac{2}{7} R \tan \alpha$ , unter  $\alpha$  die Neigung der Ebene gegen den Horizont verstanden.

Ist nun  $\frac{2}{7} \tan \alpha$  nicht grösser als  $\mu$ , so ist die in § 144 gegebene Lösung die richtige. Ist dagegen  $\mu < \frac{2}{7} \tan \alpha$ , so beginnt die Kugel auf der geneigten Ebene zu gleiten. Die nun folgende Bewegung ist durch die Gleichungen gegeben

$$\left. \begin{aligned} m \frac{d^2 x}{dt^2} &= mg \sin \alpha - \mu R \\ 0 &= -mg \cos \alpha + R \\ m a \frac{d^2 x}{dt^2} + m k^2 \frac{d^2 \theta}{dt^2} &= m g a \sin \alpha \end{aligned} \right\}.$$

Eliminirt man  $R$ , bedenkt, dass die Kugel vom Zustand der Ruhe ausgeht und integrirt, so erhält man

$$x = \frac{1}{2} g t^2 (\sin \alpha - \mu \cos \alpha), \quad \theta = \frac{5}{4} \mu \frac{g}{a} t^2 \cos \alpha.$$

Die Geschwindigkeit des Punktes der Kugel, welcher die Ebene berührt, ist

$$\frac{dx}{dt} - a \frac{d\theta}{dt} = g t \left( \sin \alpha - \frac{7}{2} \mu \cos \alpha \right).$$

Da aber nach der Voraussetzung  $\mu$  kleiner als  $\frac{2}{7} \tan \alpha$  ist, so kann diese Geschwindigkeit nie verschwinden. Die Reibung geht daher nie in rollende Reibung über; siehe auch § 136. Auf diese Art ist die Bewegung vollständig bestimmt.

Beisp. 2. Ein gleichförmiger Stab wird im Zustand der Ruhe mit seinem einen Ende in Berührung mit einer horizontalen Ebene gebracht, deren Reibungscoefficient  $\mu$  ist. Die Neigung des Stabes gegen die Verticale ist  $\alpha$ ; man zeige, dass er zu gleiten anfängt, wenn  $\mu(1 + 3 \cos^2 \alpha) < 3 \sin \alpha \cos \alpha$  ist. [Coll. Ex., 1881.]

Wenn  $\mu$  diesen Grenzwert hat, beginnt dann der Stab zu gleiten?

Wir wollen nur den letzten Theil der Aufgabe besprechen. Versteht man unter  $\theta$  den Winkel, den der Stab mit der Verticalen zu irgend einer späteren Zeit macht, so findet man durch Auflösung der Bewegungsgleichungen, dass die Reibung  $F$ , welche nöthig ist, um Gleiten zu verhüten, durch

$$\frac{F}{R} = \frac{\sin \theta \cos \theta + 2 \sin \theta (\cos \theta - \cos \alpha)}{\frac{4}{3} - \sin^2 \theta + 2 \cos \theta (\cos \theta - \cos \alpha)}$$

gegeben ist. Für  $\theta = \alpha$  ergibt sich  $F = \mu R$ . Nun ist  $\theta = \alpha + \xi$  zu setzen, unter  $\xi$  einen kleinen Winkel verstanden. Nach einigen leichten Reductionen findet man

$$\frac{F}{R} = \mu \left[ 1 + \frac{2(1 + 7 \cos 2\alpha) \xi}{\sin 2\alpha (5 + 3 \cos 2\alpha)} + \dots \right].$$

Der Coefficient von  $\xi$  ist positiv. Daher ist nach sehr kurzer Zeit mehr Reibung nöthig, um das Ende des Stabes im Zustand der Ruhe zu erhalten, als zur Wirkung gebracht werden kann. Der Stab beginnt zu gleiten.

§ 162. Eine homogene Kugel rotirt um einen horizontalen Durchmesser und wird vorsichtig auf eine rauhe horizontale Ebene gelegt. Der Reibungscoefficient ist  $\mu$ . Man bestimme die darauf folgende Bewegung.

wegt sich auf einer zur Anfangsrotationsaxe senkrechten Geraden. Diese Gerade sei die  $x$ -Axe und  $\theta$  der Winkel zwischen der Verticalen und dem Radius der Kugel, der anfangs vertical war.  $a$  sei der Radius der Kugel,  $mk^2$  ihr Trägheitsmoment um einen Durchmesser und  $\Omega$  die Anfangswinkelgeschwindigkeit.  $R$  sei die Normalreaction der Ebene. Die Bewegungsgleichungen sind dann offenbar

$$\left. \begin{aligned} m \frac{d^2 x}{dt^2} &= \mu R \\ 0 &= mg - R \\ mk^2 \frac{d^2 \theta}{dt^2} &= -\mu R a \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (1)$$

und daher

$$\frac{d^2 x}{dt^2} = \mu g, \quad a \frac{d^2 \theta}{dt^2} = -\frac{5}{2} \mu g \dots \dots \dots (2)$$

Integrirt man und bedenkt, dass  $\Omega$  der Anfangsworth von  $\frac{d\theta}{dt}$  ist, so erhält man

$$x = \frac{1}{2} \mu g t^2, \quad \theta = \Omega t - \frac{5}{4} \mu \frac{g}{a} t^2 \dots \dots \dots (3)$$

Diese Gleichungen können aber offenbar die ganze Bewegung nicht darstellen, denn nach ihnen vermehrt sich  $\frac{dx}{dt}$ , die Geschwindigkeit des Centrum beständig, was der Erfahrung durchaus widerspricht. Die Geschwindigkeit der die Ebene berührenden Punktes der Kugel ist

$$\frac{dx}{dt} - a \frac{d\theta}{dt} = -a \Omega + \frac{7}{2} \mu g t.$$

Sie verschwindet zur Zeit

$$t_1 = \frac{2}{7} \frac{a \Omega}{\mu g} \dots \dots \dots (4)$$

In diesem Augenblick ändert sich plötzlich der Charakter der Reibung. Sie wird jetzt so gross, dass sie nur hinreicht, den Berührungspunkt der Kugel im Zustand der Ruhe zu erhalten.  $F$  sei die zu diesem Zweck nöthige Reibung. Die Bewegungsgleichungen sind dann

$$\left. \begin{aligned} m \frac{d^2 x}{dt^2} &= F \\ 0 &= mg - R \\ mk^2 \frac{d^2 \theta}{dt^2} &= -F a \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (5)$$

und die geometrische Gleichung ist  $x = a\theta$ .

Differenzirt man die letzte zweimal und substituirt aus den dynamischen Gleichungen, so folgt  $F(a^2 + k^2) = 0$  und daher  $F = 0$ . Das heisst, es ist keine Reibung nöthig, um den Berührungspunkt der Kugel im Zustand der Ruhe zu halten und es wird also auch keine in Wirkung gesetzt. Die Kugel bewegt sich daher gleichförmig mit der Geschwindigkeit, die sie zur Zeit  $t_1$  hatte. Setzt man

den Werth von  $t_1$  in den Ausdruck für  $\frac{dx}{dt}$ , den man aus (3) erhält, so ergibt sich

dass diese Geschwindigkeit  $\frac{2}{7} a \Omega$  ist. Die Kugel bewegt sich mithin eine Zeit

$\frac{2}{7} \frac{a \Omega}{\mu g}$  hindurch mit gleichmässiger wachsender Geschwindigkeit und darauf gleich

mässig mit der Geschwindigkeit  $\frac{2}{7} a \Omega$ . Man beachte, dass die letzte unabhängig von  $\mu$  ist.

Ist die Ebene sehr rau, so ist  $\mu$  sehr gross und die Zeit  $t_1$  sehr klein. Geht man zur Grenze über und nimmt  $\mu$  unendlich gross an, so beginnt die Kugel sofort, sich mit gleichförmiger Geschwindigkeit zu bewegen.

§ 163. Bei dieser Untersuchung ist das Paar der rollenden Reibung vernachlässigt worden, welches die Verminderung der Winkelgeschwindigkeit bewirkt. Die Geschwindigkeit des tiefsten Punktes der Kugel hat das Bestreben, nicht länger Null zu bleiben und es ist daher eine kleine gleitende Reibung nöthig, um ihn in Ruhe zu halten. Nimmt man an, das Moment des Reibungspaares werde durch  $fmg$  gemessen, unter  $f$  eine Constante verstanden und führt diesen Ausdruck in (5) ein, so erhält die dritte Gleichung in (5) die Gestalt

$$mk^2 \frac{d^2 \theta}{dt^2} = -F'a - fmg,$$

während die übrigen unverändert bleiben. Löst man auf, wie früher, so wird

$$F' = -\frac{afmg}{a^2 + k^2}.$$

$F'$  ist also negativ und hält die Kugel auf. *Die Wirkung des Paares besteht darin, dass es eine Reibungskraft hervorruft, welche die Kugel allmählich zur Ruhe bringt.*

Bei der Bewegung der Kugel kann man die Wirkung des Luftwiderstandes bestimmen wollen. Der Haupttheil des Widerstandes wird ziemlich genau durch eine Kraft  $m\beta \frac{v^2}{a}$  dargestellt, welche am Centrum in einer der Bewegung entgegengesetzten Richtung angreift, unter  $v$  die Geschwindigkeit der Kugel und unter  $\beta$  eine Constante verstanden, deren Grösse von der Dichtigkeit der Luft abhängt. Ausserdem findet noch eine kleine Reibung zwischen der Kugel und der Luft statt, deren Grösse man weniger genau kennt. Wir wollen annehmen, sie werde durch ein Paar dargestellt, dessen Moment  $m\gamma v^2$  ist, worin  $\gamma$  eine Constante von geringer Grösse bedeutet. Die Bewegungsgleichungen lassen sich ohne Schwierigkeit lösen und man findet

$$\arctan v \sqrt{\frac{\beta + \gamma}{fg}} - \arctan V \sqrt{\frac{\beta + \gamma}{fg}} = -\frac{a \sqrt{(\alpha + \beta)fg}}{a^2 + k^2} t,$$

wobei  $V$  die Geschwindigkeit der Kugel zu der Zeit ist, von welcher an  $t$  gerechnet wird.

§ 164. **Reibungspaaire.** Um durch den Versuch die Grösse der rollenden Reibung zu bestimmen, setze man einen Cylinder von der Masse  $M$  und dem Radius  $r$  auf eine raue horizontale Ebene. Zwei Gewichte, deren Massen  $P$  und  $P + p$  sind, hänge man an einem dünnen Faden auf, der über den Cylinder läuft und durch einen in der horizontalen Ebene angebrachten Schlitz herabhängt.  $F$  sei die Reibungskraft,  $L$  das Paar an dem Berührungspunkt  $A$  des Cylinders mit der horizontalen Ebene. Man denke sich,  $p$  sei zuerst Null und werde allmählich vergrössert, bis der Cylinder sich grade zu bewegen anfängt. In diesem Augenblick ist, wenn man die Componenten in horizontaler Richtung nimmt,  $F = 0$  und, wie man aus den Momenten erhält,  $L = pgr$ . Aus den Versuchen von Coulomb und Morin ergab sich nun, dass  $p$  dem Normaldruck direct und  $r$  umgekehrt

proportional war. War  $p$  hinreichend gross um den Cylinder in Bewegung zu setzen, so blieb, wie Coulomb fand, seine Beschleunigung nahezu constant, woraus er folgerte, dass die rollende Reibung von der Geschwindigkeit nicht abhängt. Nach Morin's Experimenten war sie von der Länge des Cylinders nicht unabhängig. Vergl. die S. 144 citirte Arbeit von Reynolds.

Die Gesetze, die für das Paar der rollenden Reibung gelten, sind denen der Reibungskraft ähnlich. Seine Grösse reicht grade aus, um Rollen zu verhindern. Nicht mehr jedoch als eine gewisse Grösse kann in Wirkung gesetzt werden und diese heisst die *Grenzgrösse des Paares der rollenden Reibung*. Das Moment des Paares steht in constantem Verhältniss zur Grösse des Normalkrucks und dieses Verhältniss heisst der *Coefficient der rollenden Reibung*. Er hängt von den in Berührung befindlichen Materialien ab, aber nicht von der Krümmung der Körper und in gewissen Fällen nicht von der Winkelgeschwindigkeit.

Man scheint mit Körpern, die sich nur in einem Punkt berühren und deren Krümmung in verschiedenen Richtungen nicht dieselbe ist, keine Versuche angestellt zu haben. Da jedoch die Grösse des Paares der rollenden Reibung von der Krümmung nicht abhängt, so ist die Annahme wohl gestattet, dass die Momentanaxe, wenn kein drehendes Paar existirt, die Axe des ersten Paares ist.

§ 165. Um eine Probe auf die Reibungsgesetze zu machen, wollen wir die Resultate des folgenden Problems mit dem Versuch vergleichen

**Die Reibung eines Wagens.** Ein Wagen, der auf  $n$  Paar Rädern ruht, wird auf einer horizontalen Ebene durch eine horizontale Kraft  $2P$  mit gleichförmiger Bewegung fortgezogen. Man suche die Grösse von  $P$ .

Die Radien der Räder seien bez.  $r_1, r_2$ , etc., ihre Gewichte  $w_1, w_2$ , etc. und die Radien der Axen  $\varrho_1, \varrho_2$ , etc.  $2W$  sei das ganze Gewicht des Wagens  $2Q_1, 2Q_2$ , etc. die Druckkräfte auf die verschiedenen Axen, so dass also  $W = \sum Q$ . Der Druck zwischen den Rädern und Axen sei  $R_1, R_2$ , etc. und der Druck auf den Boden  $R'_1, R'_2$ , etc.  $C$  sei das gemeinschaftliche Centrum eines der Räder und der zugehörigen Axe,  $B$  ihr Berührungspunkt und  $A$  der Berührungspunkt des Rades mit dem Boden. Man nehme an, der Winkel  $ABC = \theta$  sei positiv wenn sich  $B$  hinter  $AC$  befindet.  $\mu$  sei der Coefficient der gleitenden Reibungskraft bei  $B$  und  $f$  der Coefficient des rollenden Reibungspaares bei  $A$ . Wenn man die Componenten in verticaler Richtung und die Momente um  $A$  nimmt, so erhält man die Gleichgewichtsgleichungen für jedes Rad

$$R' = Q + \omega \quad \dots \dots \dots (1)$$

$$\mu R(r \cos \theta - \varrho) - Rr \sin \theta = fR' \quad \dots \dots \dots (2)$$

Die Reibungskraft bei  $A$  tritt nicht auf, weil wir die Componenten in horizontaler Richtung nicht genommen haben. Die Gleichgewichtsgleichungen des Wagens findet man aus den der Componenten in verticaler und horizontaler Richtung

$$R \cos \theta + \mu R \sin \theta = Q \quad \dots \dots \dots (3)$$

$$\sum (R \sin \theta - \mu R \cos \theta) + P = 0 \quad \dots \dots \dots (4)$$

Die Effectivkräfte sind weggelassen worden, weil vorausgesetzt wurde, der Wagen bewege sich gleichförmig, so dass also  $M \frac{dv}{dt}$  des Wagens sowohl als  $m \frac{dv}{dt}$



$$\frac{\mu \left( \cos \theta - \frac{Q}{r} \right) - \sin \theta}{\cos \theta + \mu \sin \theta} = \frac{f}{r} \left( 1 + \frac{w}{Q} \right) \dots \dots \dots (5).$$

Daraus erhält man den Werth von  $\theta$ . Bei den meisten Rädern sind sowohl  $\frac{Q}{r}$  und  $\frac{w}{Q}$  als auch  $f$  klein. Alsdann ist  $\mu \cos \theta - \sin \theta$  eine kleine Grösse und wenn  $\mu = \tan \varepsilon$  gesetzt wird, so wird nahezu  $\theta = \varepsilon$ . Aus der dritten und vierten Gleichung findet man durch Elimination von  $R$

$$P = \sum \frac{\mu \cos \theta - \sin \theta}{\mu \sin \theta + \cos \theta} Q = \sum \left[ \frac{\mu}{\mu \sin \theta + \cos \theta} \cdot \frac{Q}{r} + \frac{f}{r} (Q + w) \right]$$

mit Benutzung der Gl. (5). Ist  $\frac{Q}{r}$  klein, so reicht es aus, in den ersten Bruch auf der rechten Seite für  $\theta$  seinen Näherungswerth  $\varepsilon$  zu setzen. Dies gibt

$$P = \sum \left[ \sin \varepsilon \frac{Q}{r} + f \frac{Q + w}{r} \right] \dots \dots \dots (6).$$

Dabei sind Ausdrücke von der Ordnung  $\left( \frac{Q}{r} \right)^2 Q$  vernachlässigt worden.

Sind sämmtliche Räder gleich und ähnlich, so wird, da  $\Sigma Q = W$  ist,

$$P = \sin \varepsilon \frac{Q}{r} W + f \frac{W + nw}{r} \dots \dots \dots (7).$$

Die Kraft, welche erforderlich ist, um einen Wagen von gegebenem Gewicht mit constanter Geschwindigkeit zu ziehen, ist daher von der Anzahl der Räder nahezu unabhängig.

Bei einem Gig sind die Räder gewöhnlich grösser als bei einem vierräderigen Wagen und die Zugkraft daher gewöhnlich geringer. Bei einem vierräderigen Wagen müssen die beiden Vorderräder klein sein, damit sie beim Drehen unter dem Wagen hergehen. Dadurch wird der Ausdruck  $\sin \varepsilon \frac{Q_1}{r_1} Q_1$  in der Gleichung für  $P$ , der von dem Radius  $r_1$  des Vorderrades abhängt, gross. Um die Einwirkung dieses Ausdrucks zu vermindern, sollte man die Ladung so vertheilen, dass ihr Schwerpunkt nahezu über der Axe der grösseren Räder liegt, falls der Druck  $Q_1$  im Zähler nicht bedeutend ist.

Von einem französischen Ingenieur Morin wurden in den Jahren 1837, 1838 zu Metz und später 1839 und 1841 zu Courbevoie zahlreiche Versuche gemacht in der Absicht mit äusserster Genauigkeit die Kraft festzustellen, die dazu nöthig ist, Wagen verschiedener Art über gewöhnliche Strassen zu ziehen. Diese Experimente wurden auf Anordnung des französischen Kriegsministers und später unter der Leitung des Ministers der öffentlichen Arbeiten ausgeführt. Die Wirkung einer jeden Aenderung wurde besonders bestimmt; so wurde derselbe Wagen mit verschiedenen Lasten beladen auf derselben Strasse in demselben Zustand der Feuchtigkeit gezogen, um die Wirkung des Druckes festzustellen. Dann liess man das Gewicht unverändert und nahm Räder von verschiedenem Radius aber derselben Breite u. s. w.

Als allgemeines Resultat fand man, dass der Widerstand für Wagen mit gleichen Rädern sich direct wie der Druck und mit gleicher Ladung sich umgekehrt wie der Durchmesser der Räder änderte, dagegen von der Anzahl der Räder unabhängig war. Auf nassem Boden vermehrte sich der Widerstand mit der Abnahme der Breite des Radkranzes, auf trockner Strasse hing er dagegen von ihrer Breite nicht ab. Variirte man die Geschwindigkeit vom Schrittfahren

bis zum Galopp, so wuchs bei ihrer Vermehrung der Widerstand in nassem Boden nicht merklich, dagegen vermehrte er sich auf fester Strasse, wenn der Boden sehr ungleich war. Als Annäherungsergebniss fand man, dass er sich durch eine Function von der Form  $a + bV$  ausdrücken lasse, wobei  $a$  und  $b$  zwei von der Beschaffenheit der Strasse und der Steifheit des Wagens abhängige Constanten und  $V$  die Geschwindigkeit war.

Morin's analytische Bestimmung von  $P$  stimmt nicht ganz mit der unsrigen überein, doch war sie so, dass sie den Vergleich zwischen Theorie und Beobachtung nicht wesentlich beeinflusste. Siehe seine *Notions Fondamentales de Mécanique* Paris 1855. Wie man sieht, scheinen Morin's Versuche die oben gegebenen Gesetze der rollenden Reibung zu bestätigen.

§ 166. Probleme zur Reibung. Beisp. 1. Eine homogene Kugel wird ohne Rotation eine unvollkommen rauhe Ebene, deren Neigung gegen den Horizont  $\alpha$  ist, direct hinaufgeworfen. Der Reibungscoefficient ist  $\mu$ . Man zeige, dass die ganze Zeit, während welcher die Kugel die Ebene hinaufsteigt, dieselbe ist, wie wenn die Ebene glatt wäre und dass die Zeit, während welcher die Kugel gleitet zu der, während welcher sie rollt, sich verhält wie  $2 \operatorname{tg} \alpha : 7\mu$ .

Beisp. 2. Eine homogene Kugel rollt auf einer unvollkommen rauhen festen Kugel hinab und geht vom Zustand der Ruhe von dem höchsten Punkt aus. Die Kugeln trennen sich, wenn die ihre Mittelpunkte verbindende Gerade den Winkel  $\varphi$  mit der Verticalen macht; man beweise, dass

$$\cos \varphi + 2\mu \sin \varphi = A e^{2\mu \varphi}$$

ist, worin  $A$  eine Function von  $\mu$  allein ist.

[Coll. Ex.]

Man verfährt wie in § 145 und zeigt, dass  $R$  positiv bleibt und die Kugel rollt, bis  $\frac{2 \sin \varphi}{\mu} = 17 \cos \varphi - 10$  wird. Die Kugel gleitet dann und  $R$  wechselt sein Vorzeichen, wenn  $\varphi$  der obigen Gleichung genügt.

Beisp. 3. Auf einen rauhen Cylinder von der Masse  $2nm$ , der im Stande ist, sich um seine horizontale Axe zu drehen, wird ein materieller Punkt von der Masse  $m$  und dem Reibungscoefficienten  $\mu$  vertical über seine Axe gelegt. Das System wird dann leicht gestört. Man zeige, dass der Punkt auf dem Cylinder zu gleiten beginnt, nachdem er einen Winkel  $\theta$ , der durch die Gleichung

$$(n+3) \cos \theta - 2 = \frac{n \sin \theta}{\mu}$$

gegeben ist, beschrieben hat.

Beisp. 4. Eine homogene Kugel von der Masse  $M$  wird auf einen unvollkommen rauhen Tisch gelegt, dessen Reibungscoefficient  $\mu$  ist und ein Punkt von der Masse  $m$  an das Ende eines horizontalen Durchmessers befestigt. Man zeige, dass die Kugel zu rollen oder zu gleiten beginnt, je nachdem  $\mu$  grösser oder kleiner als  $\frac{5(M+m)m}{7M^2 + 17Mm + 5m^2}$  ist. Wenn  $\mu$  diesem Werth gleichkommt, so beginnt die Kugel zu rollen, falls  $5m^2$  kleiner als  $M^2 + 11Mm$  ist.

Beispiel 5. Ein Stab  $AB$  hat zwei kleine Ringe an seinen Enden, welche an zwei rauhen horizontalen zu einander rechtwinkligen Stäben  $Ox$ ,  $Oy$  hingleiten. Der Stab beginnt seine Bewegung, wenn er nahezu mit  $Ox$  zusammenfällt, mit der Winkelgeschwindigkeit  $\Omega$ . Man zeige, dass die Bewegung des Stabes, wenn der Reibungscoefficient kleiner als  $\sqrt{2}$  ist, durch  $\theta = \frac{2 - \mu^2}{3\mu} \left( 1 + \frac{3\mu\Omega t}{2 - \mu^2} \right)$  gegeben ist, bis  $\operatorname{tg} \theta = \frac{2}{\mu}$  wird und dass die Winkelgeschwindigkeit  $\omega$  ist, wenn

$$\Omega^2 c - \frac{6\mu}{2-\mu^2} \arctan \frac{2}{\mu} = \omega^2 \frac{(2+\mu^2)(4+\mu^2)}{(2-\mu^2)(4-\mu^2)}$$

ergibt. Wie bewegt er sich, wenn  $\mu^2 > 2$  ist?

§ 167. Die Steifheit von Seilen. Nachdem Coulomb den in § 164 beschriebenen Apparat mit einem dünnen Faden zur Bestimmung der Reibungsgesetze benutzt hatte, ersetzte er den Faden durch ein steiferes Seil und wiederholte seine Versuche, um ein Maass für die Steifheit von Seilen zu erhalten. Er kam zu folgenden Resultaten. Nimmt man an, ein Seil  $ABCD$  liefe über eine Rolle vom Radius  $r$ , berühre sie in  $B$  und  $C$  und bewege sich in der Richtung  $ABCD$ , so kann man die Steifheit dadurch zur Darstellung bringen, dass man voraussetzt, das Seil sei vollkommen biegsam und die Spannung  $T$  des Theils  $AB$  des Seils, welcher eben auf die Rolle gewunden wird, werde um eine Grösse  $R$  vermehrt. Die Kraft  $R$  misst die Steifheit und ist gleich  $\frac{a+bT}{r}$ , wenn  $a$  und  $b$  von der Beschaffenheit des Seils abhängige Constante sind.

Daraus geht also hervor, dass in der Gleichung der Momente um die Axe der Rolle die Steifheit des Seils, welches auf die Rolle gewunden werden soll, durch ein Widerstandspaar von der Grösse  $a + bT$  dargestellt wird, worin  $T$  die Spannung des Seils ist, welches gebogen werden soll und  $a, b$  zwei von der Beschaffenheit des Seils abhängige Constanten sind. Die Steifheit des Seils, welches abgewunden wird, wird durch ein Paar dargestellt, dessen Grösse eine ähnliche Function der Spannung dieses Theils ist. Doch wird sie, da sie viel kleiner als die erstere ist, allgemein vernachlässigt.

Ausser den eben erwähnten Versuchen stellte Coulomb noch viele andere an, denen er ein andres System zu Grunde legte. Er fertigte auch Tabellen der Werthe von  $a$  und  $b$  für Seile verschiedener Art an und berücksichtigte dabei den Grad der Trockenheit und Neuheit und die Anzahl der unabhängigen Fäden, aus denen das Seil bestand. Auch stellte er Regeln auf, um die durch die Steifheit hervorgerufenen Widerstände verschieden dicker Seile mit einander zu vergleichen.

## Momentankräfte bei der ebenen Bewegung.

§ 168. Die Bewegungsgleichungen. Sind es Stösskräfte, die gegeben sind, so erfordert der in § 131 dieses Kapitels aufgestellte allgemeine Satz nur geringe Aenderungen.

$(u, v)$  bez.  $(u', v')$  seien die Componenten der Geschwindigkeit des Schwerpunkts irgend eines Körpers des Systems parallel zu rechtwinkligen Axen grade vor bez. grade nach der Wirkung der Stösskräfte;  $\omega$  und  $\omega'$  die Winkelgeschwindigkeiten des Körpers um seinen

Schwerpunkt zur selben Zeit.  $Mk^2$  sei das Trägheitsmoment des Körpers um den Schwerpunkt. Die Effectivkräfte des Körpers sind dann zwe Stosskräften gleichwerthig, die durch  $M(u' - u)$  und  $M(v' - v)$  gemessen werden und an dem Schwerpunkt parallel den Coordinatenachsen angreifen, und ausserdem einem Stoss paar, das durch  $Mk^2(\omega' - \omega)$  gemessen wird.

Die resultirenden Effectivkräfte aller Körper des Systems findet man auf dieselbe Art. Nach d'Alembert's Princip sind sie den gegebenen Kräften gleichwerthig. Die Bewegungsgleichungen ergeben sich dann, indem man die Componenten in solchen Richtungen und die Momente um solche Punkte nimmt, die am vortheilhaftesten erscheinen.

Um ein Beispiel zu geben, möge ein einzelner Körper von einem Stoss getroffen werden, dessen Componenten  $X$ ,  $Y$  sind und dessen Moment um den Schwerpunkt  $L$  ist. Die Bewegungsgleichungen sind dann offenbar

$$M(u' - u) = X, \quad M(v' - v) = Y, \quad Mk^2(\omega' - \omega) = L.$$

Man wird finden, dass sich die Elimination der unbekannten Reactionen in vielen Fällen durch das Princip der virtuellen Arbeit ohne Schwierigkeit ausführen lässt.

§ 169. Man beachte, dass diese Ausdrücke für die Effectivkräfte von den Unterschieden der Bewegungsgrössen grade vor und grade nach der Wirkung der Stosskräfte abhängen. Wir können daher die Gleichungen, die man aus den Componenten in einer beliebigen Richtung und den Momenten um einen beliebigen Punkt erhält, in den beiden folgenden Formen zusammenfassen:

$$\begin{aligned} \left( \begin{array}{c} \text{Comp. der linear. Bewegungsgr.} \\ \text{nach dem Stoss} \end{array} \right) &= \left( \begin{array}{c} \text{Comp. d. lin. Beweg.gr.} \\ \text{vor dem Stoss} \end{array} \right) \\ &= \left( \begin{array}{c} \text{Componente} \\ \text{der Momentankr.} \end{array} \right), \\ \left( \begin{array}{c} \text{Winkelbewegungsgrösse} \\ \text{nach dem Stoss} \end{array} \right) &= \left( \begin{array}{c} \text{Winkelbewegungsgrösse} \\ \text{vor dem Stoss} \end{array} \right) \\ &= \left( \begin{array}{c} \text{Moment der} \\ \text{Momentankr.} \end{array} \right). \end{aligned}$$

Ein elementarer Beweis dieser beiden Resultate findet sich in § 86; der Ausdruck für die lineare Bewegungsgrösse in § 74 und verschiedene Ausdrücke für die Winkelbewegungsgrösse in § 134.

Wirkt ein einzelner Schlag oder Stoss auf ein System, so nimmt man am besten die Momente um einen Punkt in seiner Richtungs linie und vermeidet damit die Einführung des Stosses in die Gleichungen. Aus der Momentengleichung ergibt sich dann, dass die Winkelbewegungsgrösse eines Systems um einen Punkt in der Richtung des Stosses durch diesen Stoss nicht geändert wird.

§ 170. Beisp. 1. *Ein Strick wird um den Umfang eines kreisförmigen Haspels gewunden und das freie Ende an einem festen Punkt befestigt. Der Haspel wird dann in die Höhe gehoben und so fallen gelassen, dass der Strick in dem Moment, in dem er straff wird, vertical ist und eine Tangente an den Haspel bildet. Die ganze Bewegung geht parallel einer Ebene vor sich; man bestimme die Wirkung des Stosses.*

Der Haspel fällt zuerst ohne Rotation vertical herab.  $v$  sei die Geschwindigkeit seines Centrums in dem Augenblick, in dem der Strick angezogen wird;  $v'$ ,  $\omega'$  die Geschwindigkeit des Centrums und die Winkelgeschwindigkeit grade nach dem Stoss.  $T$  sei die Spannung in Folge des Stosses,  $mk^2$  das Trägheitsmoment des Haspels um seinen Schwerpunkt,  $a$  sein Radius.

Um die unbekannte Spannung nicht in die Bewegungsgleichungen einführen zu müssen, wollen wir die Momente um den Berührungspunkt des Stricks mit dem Haspel nehmen. Man erhält

$$m(v' - v)a + mk^2\omega' = 0 \quad . \quad . \quad . \quad (1).$$

Grade nach dem Stoss hat der Theil des Haspels, der sich in Berührung mit dem Strick befindet, keine Geschwindigkeit. Daher ist

$$v' - a\omega' = 0 \quad . \quad . \quad . \quad (2).$$

Weil nun  $k^2 = \frac{a^2}{2}$ , so wird  $\omega' = \frac{2v}{3a}$ ,  $v' = \frac{2}{3}v$ . Soll die Spannung in Folge des Stosses bestimmt werden, so nehme man die Verticalcomponenten

$$m(v' - v) = -T \quad . \quad . \quad . \quad (3),$$

woraus sich  $T = \frac{1}{3}mv$  ergibt.

*Die spätere Bewegung zu finden.* Das Centrum des Haspels beginnt vertical herabzufallen und eine horizontale Kraft greift nicht an ihm an. Es fährt daher fort in einer verticalen Geraden sich abwärts zu bewegen und während der ganzen folgenden Bewegung bleibt der Strick vertical. Die Bewegung lässt sich mithin wie in § 144 leicht ermitteln. Setzt man  $\alpha = \frac{1}{2}\pi$  und ist  $F$  die schliessliche Spannung des Stricks, so lässt sich zeigen, dass  $F$  ein Drittel des Gewichts ist und dass der Haspel mit der gleichförmigen Beschleunigung  $\frac{2}{3}g$  fällt. Die Anfangsgeschwindigkeit  $v'$  des Haspels ist oben bestimmt worden; die in der Zeit  $t$  nach dem Stoss zurückgelegte Strecke ist also  $v't + \frac{2}{3}gt^2$ .

Beisp. 2. *Eine Kugel bewegt sich unter beliebigen Anfangsbedingungen in einer verticalen Ebene, die eine feste geneigte Ebene in der Linie des stärksten Falls schneidet. Man beweise, dass der Ausdruck  $M = au + k^2\omega - agt \sin \alpha$ , wenn die Kugel rauh und elastisch ist, durch irgend einen Stoss auf die Ebene nicht geändert wird und während der ganzen Bewegung constant bleibt. Dabei ist  $\omega$  die Winkelgeschwindigkeit der Kugel,  $u$  die Geschwindigkeit ihres Centrums parallel der Ebene und abwärts zu einer beliebigen Zeit  $t$ ,  $a$  ihr Radius und  $\alpha$  die Neigung der Ebene gegen den Horizont.*

Man bemerke, dass der Stoss im Berührungspunkt stattfindet. Nimmt man die Momente um diesen Punkt, so wird

$$au' + k^2\omega' = au + k^2\omega,$$

wenn  $u'$ ,  $\omega'$  die Werthe von  $u$ ,  $\omega$  nach dem Stoss sind. Der Ausdruck  $U$  wird daher durch den Stoss nicht geändert.

Da eine geometrische Gleichung nicht nöthig war, um dieses Resultat zu erhalten, so hat es Gültigkeit, mag der Körper elastisch sein oder nicht, mag er rollen oder gleiten.

Wenn der Körper abprallt und die Ebene verlässt, so beschreibt sein Schwerpunkt eine Parabel. Alsdann sind, wie wir wissen, sowohl  $u - gt \sin \alpha$  als  $\omega$  con-

stant. Der Ausdruck  $U$  bleibt daher während der parabolischen Bewegung unverändert.

Trifft der Körper wieder auf die Ebene, so hat wie zuvor auch dieser zweite wie jeder folgende Stoss keine Aenderung von  $U$  zur Folge.

Wenn der Körper auf der Ebene einfach rollt oder gleitet ohne zu springen, so ist wie in § 144

$$ma \frac{d^2 x}{dt^2} + mk^2 \frac{d\omega}{dt} = mga \sin \alpha.$$

Durch Integration findet man, dass auch während dieser Bewegung der Ausdruck für  $U$  sich nicht ändert.

Wenn nach einer beliebigen Anzahl von Sprüngen die Kugel über einen Theil der Ebene sich bewegt, der so rau und unelastisch ist, dass sie rollt, so erhalten wir ausserdem noch die Gleichung  $u = a\omega$ . Nimmt man dazu noch die Bedingung, dass der Ausdruck  $U$  seinem Anfangswerth gleich ist, so erhält man zwei Gleichungen, aus denen sich die Werthe von  $u$  und  $\omega$  ableiten lassen.

§ 171. Stoss gegen einen einzelnen unelastischen Körper. Eine Scheibe von beliebiger Gestalt bewegt sich in ihrer eigenen Ebene auf irgend eine Art. Plötzlich wird einer ihrer Punkte  $O$  ergriffen und gezwungen sich auf eine gegebene Art zu bewegen. Man suche die Anfangsbewegung der Scheibe.

$Ox, Oy$  seien die beiden rechtwinkligen Richtungen, auf welche die Bewegung am vorthellhaftesten bezogen wird.  $(u, v)$  seien, wie in § 168 erklärt wurde, die Componenten der Geschwindigkeit des Schwerpunkts  $G$  in diesen Richtungen und  $\omega$  die Winkelgeschwindigkeit des Körpers grade vor dem Augenblick, in welchem die Bewegung von  $O$  geändert wird. Wenn man z. B.  $Ox$  passender Weise so wählen kann, dass es der Bewegungsrichtung des Schwerpunkts parallel läuft, so tritt die Vereinfachung  $v = 0$  ein.  $(u', v')$  seien die Componenten der Geschwindigkeit des Schwerpunkts in den gleichen Richtungen und  $\omega'$  die Winkelgeschwindigkeit grade nach der Aenderung;  $(x, y)$  die Coordinaten des Schwerpunkts in dem Augenblick der Aenderung, auf die Axen  $Ox, Oy$  bezogen, und  $OG$  sei  $= r$ .

Da die Winkelbewegungsgrösse des Körpers um den Punkt des Raums, durch welchen  $O$  geht, durch den Stoss nicht geändert wird, so ist nach § 134

$$M(xv' - yu' + k^2\omega') = M(xv - yu + k^2\omega).$$

$(U', V')$  seien die Componenten der Geschwindigkeit von  $O$  grade nach der Aenderung. Nach § 137 erhält man dann

$$u' = U' - y\omega', \quad v' = V' + x\omega'.$$

Aus diesen drei Gleichungen ergibt sich leicht

$$(k^2 + r^2)\omega' = x(v - V') - y(u - U') + k^2\omega.$$

Wird der Punkt  $O$  plötzlich festgehalten, so ist  $U' = 0, V' = 0$  und man findet

$$(k^2 + r^2)\omega' = xv - yu + k^2\omega.$$

Weiteres über diesen Gegenstand bringen wir später in den Paragraphen über *relative Bewegung*.

§ 172. Den Stoss gegen  $O$  zu ermitteln, der dazu nöthig ist, die gegebene Aenderung hervorzurufen.  $X$ ,  $Y$  seien die Componenten der Stosskraft parallel den Axen  $Ox$ ,  $Oy$ . Nach § 168 erhält man durch Zerlegung parallel zu den Axen

$$M(u' - u) = X, \quad M(v' - v) = Y.$$

Nimmt man die  $x$  Axe so an, dass sie durch den Schwerpunkt geht, so wird  $y = 0$  und man findet durch Substitution

$$X = -M(u - U'), \quad Y = M \frac{k^2}{k^2 + r^2} (r\omega - v + V').$$

§ 173. Beisp. 1. Eine kreisförmige Scheibe dreht sich um einen festen Punkt  $A$  ihres Umfangs. Plötzlich wird  $A$  losgelassen und ein anderer Punkt  $B$  des Umfangs festgelegt. Man zeige, dass die Winkelgeschwindigkeit auf ein Drittel ihres Werthes reducirt wird, wenn  $AB$  ein Quadrant ist. Ist  $AB$  ein Drittel des Umfangs, so steht die Scheibe still.

Beisp. 2. Eine Scheibe von beliebiger Gestalt bewegt sich auf beliebige Art. Plötzlich wird die Bewegung eines Punktes  $O$  geändert; man zeige, dass die Vermehrung der lebendigen Kraft

$$MW'^2 \left(1 - \frac{p'^2}{k^2 + r^2}\right) - MW^2 \left(1 - \frac{p^2}{k^2 + r^2}\right)$$

gleichkommt, worin  $W, W'$  die resultirenden Geschwindigkeiten von  $O$  grade vor und grade nach der Aenderung,  $p, p'$  die Lothe von dem Schwerpunkt auf die Bewegungsrichtungen von  $O$  sind und die übrige Bezeichnung dieselbe, wie zuvor, ist.

Wenn  $O$  zum Stillstand kommt und der Verlust an lebendiger Kraft eine gegebene Grösse sein soll, so muss  $O$  auf einem gewissen Kegelschnitt liegen, welcher zu zwei zusammenfallenden Geraden wird, wenn die ganze lebendige Kraft verloren geht.

§ 174. Beispiele von Stössen verschiedener Art. Beisp. 1. Eine unelastische Kugel vom Radius  $a$ , die mit der Geschwindigkeit  $V$  auf einer glatten horizontalen Ebene gleitet, trifft gegen einen vollkommen rauhen festen Punkt oder Stift in der Höhe  $c$  über der Ebene. Man zeige, (1) dass die Kugel nur dann über den

Stift springt, wenn die Geschwindigkeit  $V$  grösser als  $\sqrt{2gc \frac{a^2 + k^2}{(a - c)^2}}$  ist; (2)

dass die Kugel sofort den Stift verlässt, wenn  $V$  diesen Werth hat und  $\frac{c}{a}$  grösser

als  $\frac{a^2 + k^2}{3a^2 + k^2}$  ist; (3) dass die Kugel in dem letzten Fall den Stift nach der Zeit  $t$  wieder trifft, die durch die kleinere Wurzel der Gleichung

$$\frac{1}{4} g^2 t^2 - U \sin \alpha g t + U^2 - a g \cos \alpha = 0$$

gegeben ist, worin  $U^2 = 2gc \frac{a^2}{a^2 + k^2}$  und  $\cos \alpha = 1 - \frac{c}{a}$  ist. Man zeige auch, dass die Wurzeln dieser quadratischen Gleichung reell und positiv sind.

Beisp. 2. Ein rechtwinkliges Parallelepipedon von der Masse  $3m$ , dessen Basis ein Quadrat  $ABCD$  ist, ruht auf einer horizontalen Ebene und kann sich um  $CD$  als Gelenk drehen. Die Höhe des Körpers ist  $3a$  und die Seite der Basis  $a$ . Ein Massenpunkt  $m$ , der sich mit der horizontalen Geschwindigkeit  $v$  bewegt, trifft grade wider die Mitte der verticalen Seitenfläche, die über  $AB$  steht und setzt sich da fest, ohne einzudringen. Man zeige, dass der Körper nur dann umfällt, wenn  $v^2$  grösser als  $\frac{53}{9}ga$  ist. [King's Coll.]

Beisp. 3. Eine verticale Säule von der Gestalt eines graden Kreiscylinders ruht auf einer vollkommen rauhen horizontalen ebenen Scheibe. Plötzlich wird die Scheibe mit der Geschwindigkeit  $V$  in einer Richtung fortgestossen, die den Winkel  $e$  mit dem Horizont macht. Man zeige, dass die Säule nicht umgeworfen wird, wenn (1) eine durch den Schwerpunkt gezogene Parallele zur Richtung des Stosses die Basis trifft und (2) die Geschwindigkeit des Stosses nicht grösser als  $U$  ist, wobei  $U$  aus der Gleichung  $U^2 = \frac{1}{6}gl(15 + \cos^2 \theta) \frac{1 - \cos \theta}{\cos^2(\theta + e)}$  hervorgeht. Darin ist  $2l$  die Länge der Diagonale des Cylinders und  $\theta$  der Winkel zwischen der Diagonale und der Verticalen.

Beisp. 4. Man suche den Verticaldruck des Cylinders auf die Ebene, wenn die Geschwindigkeit des Stosses gegen die horizontale Ebene  $U$  genau gleichkommt. Man zeige, dass der Cylinder während des ganzen Aufstiegs des Schwerpunkts die Ebene nur dann zu berühren fortführt, wenn  $1 + \frac{1}{2}\sin \theta < 3\cos \theta$  ist. Welchen allgemeinen Charakter hat die Bewegung, wenn diese Bedingung nicht erfüllt ist?

Der Cylinder berühre den Boden mit dem Punkt  $A$  seines Randes und  $\varphi$  sei der Winkel der Diagonalen durch  $A$  mit der Verticalen. Nach dem Princip der lebendigen Kraft ist dann

$$(k^2 + l^2) \left( \frac{d\varphi}{dt} \right)^2 = C - 2gl \cos \varphi,$$

wobei  $k^2 = l^2 \left( \frac{1}{3} \cos^2 \theta + \frac{1}{4} \sin^2 \theta \right)$  ist nach § 17, Beisp. 8. Wird die Winkelgeschwindigkeit des Cylinders gleich Null, wenn der Schwerpunkt seine höchste Lage einnimmt, so ist  $C = 2gl$ . Ist ferner  $mR$  die verticale Reaction bei  $A$ , unter  $m$  die Masse des Cylinders verstanden, so hat man  $\frac{d^2}{dt^2}(l \cos \varphi) = R - g$ . Aus diesen Gleichungen ergibt sich

$$R \frac{k^2 + l^2}{gl^2} = 3 \cos^2 \varphi - 2 \cos \varphi + \frac{1}{3} \cos^2 \theta + \frac{1}{4} \sin^2 \theta.$$

Verschwindet  $R$ , so wird  $\cos \varphi = \frac{1}{3} \left( 1 \pm \frac{1}{2} \sin \theta \right)$ . Soll  $R$  dasselbe Vorzeichen behalten, so müssen diese beiden Werthe von  $\varphi$  durch die besonderen Umstände des Falles unmöglich sein, das heisst beide Werthe von  $\varphi$  müssen grösser als  $\theta$  sein. Daraus folgt dann das obige Resultat.

§ 175. Erdbeben. Die beiden letzten Probleme sind durch ihre Verbindung mit Mallet's Theorie der Erdbeben von Interesse. Nimmt man an, die Wirkung eines Erdbebens auf ein Gebäude könne durch eine Bewegung der Basis dargestellt werden, wie die eben beschriebene Bewegung der Ebene war, so hängen sowohl die Richtung als die Grösse des gleichwerthigen Stosses nicht von dem Gebäude, auf das die Wirkung stattfindet, sondern nur von der Beschaffenheit des Erdbebens an der betreffenden Stelle ab.

Auf Grund dieses Principes hat Mallet einen sehr einfachen Seismometer construirt. Sechs grade Cylinder, die aus einem harten Material, z. B. Buchs-



baum hergestellt sind und dieselbe Höhe aber verschiedene Durchmesser haben, werden nach ihrer Grösse geordnet auf einem Brett aufgestellt, das an dem wagrechten Boden befestigt ist. Dabei haben je zwei einen solchen Abstand voneinander, dass derjenige, welcher umfällt, seinen Nachbar nicht treffen kann. Findet nun ein Erdstoss statt, so fallen einige Cylinder um, andre bleiben stehen. Hat z. B. der Stoss die Cylinder mit der kleineren Basis 4, 5, 6 umgeworfen und die breiteren 1, 2, 3 stehen lassen, so muss er grösser gewesen sein als der Stoss, welcher dazu nöthig ist, Nr. 4 umzuwerfen und nicht gross genug, um Nr. 3 umzustossen.

Mallet gebraucht die in Beisp. 3 gegebene Formel, welche er Dr. Haughton zuschreibt. Der Werth von  $e$  ist klein, wenn der Ursprung oder das Centrum des Erdbebens entfernt ist, so dass man als erste Annäherung  $e = 0$  setzen kann. Es scheint nicht bemerkt worden zu sein, dass bei der Anwendung *dieser* Formel auf die *stehen gebliebenen Cylinder* die letzteren den Bedingungen in Beisp. 4 genügen müssen.

Im December 1857 fand ein sehr heftiges Erdbeben in den südlichen Provinzen Italiens statt. Mallet besuchte im Anfang des folgenden Jahres den Schauplatz zu dem besondern Zweck, die näheren Umstände des Stosses festzustellen. Das zu lösende Problem war in gewissem Grad ein mechanisches. Die Lage der umgestürzten Säulen und Gebäude war gegeben, man sollte die Tiefe und die Lage des Centrums oder Ursprungs des Erdbebens, die Geschwindigkeit der Erdbebenwelle und die Grösse des Stosses an bestimmten Stellen ermitteln. In diesem Fall lag das Centrum etwa 5 km unter der Oberfläche der Erde und die Geschwindigkeit der Welle betrug etwa 250 m in der Secunde, während die Geschwindigkeit des Stosses, der verschiedene Gebäude umwarf, nur 3,6 m in der Secunde ausmachte. Die letztere kommt etwa der Geschwindigkeit gleich, die ein materieller Punkt, der vom Zustand der Ruhe ausgeht, unter dem Einfluss der Schwere erlangt, wenn er eine Höhe von  $\frac{1}{2}$  bis 1 m durchfällt. Siehe *The Great Neapolitan Earthquake of 1857*, 2 Bände, 1862, von R. Mallet. Aus den Beobachtungen, die während der Erdbeben vom December 1884 in Spanien und August 1886 in Charleston angestellt wurden, schloss man auf eine viel grössere Tiefe des Centrums, als die oben angegebene. Siehe Flammariön, *L'Astronomie*, Oct. 1887.

Das oben beschriebene Säulenseismometer hat in der Praxis keine grossen Erfolge gehabt. Die Verschiebung der Erde ist nicht eine einfache gradlinige Bewegung, sondern vielmehr eine fortgesetzte Reihe von Bewegungen in verschiedenen Richtungen. Die Säulen erhalten durch sie rotirende Bewegungen und fallen daher in verschiedenen Richtungen um. Ein Modell der wirklichen Bahn eines Punktes der Erdoberfläche während des schweren Erdbebens in Japan vom Januar 1887 hat Prof. Sekiya mit Hülfe eines langen Kupferdrahts construirt und in der *Nature* vom 26. Januar 1888 beschrieben. Welche Genauigkeit man ihm auch zuschreiben mag, jedenfalls zeigt es die complicirte Natur der Verückung. Berichte über moderne Seismometer findet der Leser in Milne's *Earthquakes* 1886, der *Nature* vom 12. April und 26. Juli 1888 und dem *Phil. Mag.* April 1887. Siehe auch *Seismological Investigation. First report of the Committee [R. of the British Ass. f. the adv. of science, 1896]*, an dem hauptsächlich Milne theilnimmt. Die Geschwindigkeiten und Amplituden der Wellen der longitudinalen und transversalen Schwingung wurden gesondert bestimmt. Man fand, dass die Bewegung eines Punktes der Erdoberfläche derart ist, wie sie aus der Zusammensetzung zweier harmonischer Bewegungen von verschiedenen Perioden und verschiedenen Richtungen resultiren würde.

§ 176. Stoss gegen einen zusammengesetzten unelastischen Körper. Vier gleiche Stäbe, von denen jeder die Länge  $2a$  und die Masse  $m$  hat, sind durch Gelenke so verbunden, dass sie sich frei bewegen können und einen Rhombus bilden.

Das System fällt vom Zustand der Ruhe aus unter der Einwirkung der Schwere, wobei eine Diagonale vertical gerichtet ist, und schlägt wider eine feste horizontale unelastische Ebene. Man suche die nun folgende Bewegung. Siehe § 408.

$AB, BC, CD, DA$  seien die Stäbe und  $AC$  die verticale Diagonale, die mit  $A$  wider die horizontale Ebene schlägt.  $V$  sei die Geschwindigkeit eines jeden Punktes des Rhombus grade vor dem Aufstossen und  $\alpha$  der Winkel, den jeder Stab mit der Verticalen macht.

$u, v$  seien die horizontale und verticale Geschwindigkeit des Schwerpunkts und  $\omega$  die Winkelgeschwindigkeit eines der oberen Stäbe grade nach dem Stoss. Die Effectivkräfte eines der Stäbe sind dann der Kraft  $m(v - V)$  gleichwerthig, die vertical und  $mu$ , die horizontal am Schwerpunkt angreift und ausserdem einem Paar  $mk^2\omega$ , welches den Winkel  $\alpha$  zu vergrössern sucht.  $R$  sei der Stoss bei  $C$ , dessen Richtung nach den Regeln der Symmetrie horizontal sein muss. Um die Reactionen bei  $B$  nicht in unsere Gleichungen einführen zu müssen, wollen wir die Momente für den Stab  $BC$  um  $B$  nehmen und erhalten so

$$mk^2\omega + m(v - V)a \sin \alpha - mu a \cos \alpha = -R \cdot 2a \cos \alpha \quad (1).$$

Jeder der beiden unteren Stäbe beginnt sich um sein Ende  $A$  als festen Punkt zu drehen. Ist  $\omega'$  seine Winkelgeschwindigkeit grade nach dem Stoss, so ist das Moment der Bewegungsgrösse um  $A$  grade nach dem Stoss  $m(k^2 + a^2)\omega'$  und grade vorher  $mVa \sin \alpha$ . Die Differenz der beiden ist das Moment der Effectivkräfte des Stabes um  $A$ . Wir können nun für die beiden Stäbe  $AB, BC$  zusammen die Momente um  $A$  nehmen und erhalten

$$m(k^2 + a^2)\omega' - mVa \sin \alpha - mk^2\omega + m(v - V)a \sin \alpha + mu \cdot 3a \cos \alpha = R \cdot 4a \cos \alpha \quad (2).$$

Die geometrischen Gleichungen kann man so finden. Da die beiden Stäbe während der ganzen Bewegung gleiche Winkel mit der Verticalen bilden müssen, so ist

$$\omega' = \omega \quad (3).$$

Da ferner die beiden Stäbe bei  $B$  verbunden sind, so müssen die Geschwindigkeiten ihrer Endpunkte der Richtung und Grösse nach gleich sein. Nimmt man die horizontalen und verticalen Componenten, so wird

$$u + a\omega \cos \alpha = 2a\omega' \cos \alpha \quad (4),$$

$$v - a\omega \sin \alpha = 2a\omega' \sin \alpha \quad (5).$$

Diese fünf Gleichungen reichen zur Bestimmung der Anfangsbewegung aus.

Eliminirt man  $R$  aus (1) und (2), drückt in den geometrischen Gleichungen  $u, v, \omega'$  durch  $\omega$  aus und substituirt diese Ausdrücke, so findet man

$$\omega = \frac{3}{2} \cdot \frac{V \sin \alpha}{a(1 + 3 \sin^2 \alpha)} \quad (6).$$

Wir hätten dabei die Einführung der unbekannten Reaction  $R$  durch Benutzung des Satzes von der virtuellen Arbeit vermeiden können. Wir wollen dem System eine solche Verrückung geben, dass die Neigung eines jeden Stabes gegen die Verticale um dieselbe Grösse  $\delta\alpha$  vergrössert wird. Die virtuelle Arbeit eines Paares, wie z. B.  $mk^2\omega$ , findet man durch Multiplication seines Moments mit der Drehung, also mit  $\delta\alpha$ ; die Arbeit einer Kraft dagegen, wie z. B.  $mu$ , durch Multiplication ihrer Grösse mit der linearen Verschiebung ihres Angriffspunktes. Das Princip der virtuellen Arbeit liefert dann

$$mk^2\omega \delta\alpha - m(v - V) \delta(3a \cos \alpha) + mu \delta(a \sin \alpha) + m(k^2 + a^2)\omega' \delta\alpha + mV \delta(a \cos \alpha) = 0$$

und reducirt

$$(2k^2 + a^2)\omega - Va \sin \alpha + 3(v - V)a \sin \alpha + ua \cos \alpha = 0.$$

Die weitere Lösung erfolgt dann wie oben.

Resultat. Man zeige, dass

$$X_{2n+1} - 5 X_{2n+2} - 2 X_{2n+3} = 0$$

und

$$X_{2n+2} - 5 X_{2n+1} - 2 X_{2n} = 0$$

ist, wenn  $X_n$  die Stossaction am  $n$ ten Eckpunkt bezeichnet, und finde daraus  $X$

Beisp. 5. Zwei gleichförmige Stäbe  $AB, BC$  von gleicher Länge und Masse, die bei  $B$  durch ein glattes Gelenk verbunden sind, liegen auf einer glatten horizontalen Ebene; das Ende  $A$  wird so getroffen, dass es sich mit gegebener Geschwindigkeit in einer Richtung zu bewegen beginnt, welche die Winkel  $\theta$ , mit den Stäben macht; man zeige, dass, wenn  $\sin(2\varphi - \theta) = 3 \sin \theta$  ist,  $AB$  seine Bewegung ohne Rotation beginnt. [Coll. Exam. 1880.]

Man nehme die Momente für den Stab  $BC$  um  $B$  und für beide Stäbe um  $A$ , so wie in § 169 gezeigt wurde.

Beisp. 6. Drei gleiche und ähnliche Stäbe, welche sich um ihr gemeinschaftliches Ende drehen können, werden rechtwinklig zueinander so gehalten, dass sich die drei anderen Endpunkte in einer horizontalen Ebene befinden und das gemeinschaftliche Ende entweder ober- oder unterhalb liegt. Man lässt sie nun auf eine glatte unelastische horizontale Ebene fallen; man zeige, dass die Geschwindigkeit ihres Schwerpunkts sich um die Hälfte vermindert.

§ 178. Die beiden Punkte des Maximalstosses. Eine freie unelastische Lamelle von beliebiger Gestalt dreht sich in ihrer eigenen Ebene um das Momentencentrum  $S$  und stösst an dem Punkt  $P$ , welcher in der den Schwerpunkt  $G$  mit verbindenden Geraden liegt, gegen ein Hinderniss. Man bestimme die Lage des Punktes  $P$ , wenn die Grösse des Stosses ein Maximum sein soll. [Poinso, Sur la percussion des corps, Liouville's Journal, 1857].

Erstens. Das Hinderniss  $P$  sei ein festliegender Punkt. Es sei  $GP = x$  und  $R$  die Stosskraft. Setzt man  $SG = h$  und sind  $\omega, \omega'$  die Winkelgeschwindigkeiten um  $G$  vor und nach dem Zusammentreffen, so ist  $h\omega$  die Translationsgeschwindigkeit von  $G$  grade vor dem Stoss.  $v'$  sei ferner die Translationsgeschwindigkeit von  $G$  grade nach dem Zusammentreffen. Man erhält die Gleichungen

$$\omega' - \omega = \frac{Rx}{Mk^2}, \quad v' - h\omega = -\frac{R}{M} \quad \dots \quad (1)$$

und, wenn man annimmt, der Stosspunkt werde zum Stillstand gebracht,

$$v' + x\omega' = 0 \quad \dots \quad (2)$$

Mit Hülfe dieser Gleichungen drückt man  $R$  durch  $x$  aus und macht  $R$  zu einem Maximum. Man findet so zwei Werthe für  $x$ , einen positiven und einen negativen. Beide entsprechen Punkten stärksten Stosses, aber in entgegengesetzter Richtung. Es gibt einen Punkt  $P$ , mit dem der Körper vor und einen Punkt  $P'$ , mit dem er hinter der Richtung seiner Translation im Raum stärker als mit jedem andern Punkt widerschlägt.

Die beiden Punkte  $P, P'$  haben gleichen Abstand von  $S$  und wenn  $O$  das Schwingungscentrum in Bezug auf  $S$  als Aufhängungscentrum ist, so wird  $SP^2 = SG \cdot SO$ . Macht man  $P$  zum Aufhängungspunkt, so ist  $P'$  das entsprechende Schwingungscentrum und  $PP'$  wird in  $G$  und  $O$  harmonisch getheilt. Ferner ist die Grösse der Stösse dem Abstand von  $G$  umgekehrt proportional.

Zweitens. Das Hinderniss sei ein freier materieller Punkt von der Masse  $m$ . Wir erhalten ausser den Gleichungen (1) noch die Bewegungsgleichung des Punktes  $m$ . Ist  $V'$  seine Geschwindigkeit nach dem Zusammenstoss, so ist  $V' = \frac{m}{R}$

Der Berührungspunkt der beiden Körper hat nach dem Zusammenstoss die nämliche Geschwindigkeit; statt der Gleichung (2) erhält man daher  $V' = v' + x\omega'$ . Man findet  $x$  wie zuvor, indem man  $R$  zu einem Maximum macht.  $x$  hat zwei Werthe

Es existiren noch andere ausgezeichnete Punkte in einem in Bewegung befindlichen Körper, deren Lage sich auffinden lässt. So kann man darnach fragen, mit welchen Punkten der Körper gegen ein festes Hinderniss stossen muss, *erstens* damit die Translationsgeschwindigkeit seines Schwerpunkts und *zweitens*, damit die Winkelgeschwindigkeit ein Maximum wird. Diese Punkte hat Poinso<sup>t</sup> die Centren der Maximalreflexion bez. Conversion genannt. Sie sind jedoch nicht wichtig genug, um hier eine eingehende Besprechung zu rechtfertigen.

Beisp. Eine freie Lamelle von beliebiger Gestalt dreht sich in ihrer eignen Ebene um das Momentancentrum  $S$  und stösst auf ein festes Hinderniss  $P$ , welches in der Geraden liegt, die den Schwerpunkt  $G$  mit  $S$  verbindet. Man suche die Lage von  $P$ , *erstens*, wenn der Schwerpunkt zum Stillstand kommen soll und *zweitens*, wenn zwar seine Geschwindigkeit nach dem Stoss dieselbe wie vorher, ihre Richtung aber die umgekehrte sein soll.

Resultat. In dem ersten Fall fällt  $P$  entweder mit  $G$  oder dem Schwingungscentrum zusammen. Im zweiten findet man die Punkte, wenn  $SG = h$ ,  $x = GP$  gesetzt wird, aus der Gleichung

$$2hx^2 = k^2(x - h). \quad [\text{Poinso<sup>t</sup>.}]$$

§ 179. Elastische glatte Körper. *Zwei Körper stossen zusammen; man erkläre die Beschaffenheit der zwischen ihnen stattfindenden Action.*

Wenn zwei Kugeln von hartem Material aufeinandertreffen, so scheinen sie sich fast augenblicklich zu trennen und durch die gegenseitige Einwirkung wird eine endliche Aenderung der Geschwindigkeit in jedem erzeugt. Diese plötzliche Geschwindigkeitsänderung ist das Merkmal einer Stosskraft. Die Schwerpunkte der Kugeln mögen sich vor dem Zusammenstoss in derselben Geraden mit den Geschwindigkeiten  $u$  und  $v$  bewegen. Nach dem Stoss fahren sie fort sich auf dieser Geraden zu bewegen und dabei seien  $u'$ ,  $v'$  ihre Geschwindigkeiten. Sind  $m$ ,  $m'$  die Massen der Kugeln und ist  $R$  die Action zwischen ihnen, so erhält man nach § 168

$$u' - u = -\frac{R}{m}, \quad v' - v = \frac{R}{m'} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1).$$

Diese Gleichungen reichen zur Bestimmung der drei Grössen  $u'$ ,  $v'$ ,  $R$  nicht aus. Um eine dritte zu erhalten, hat man in Betracht zu ziehen, was während des Stosses vor sich geht.

Jede der Kugeln wird durch die andere etwas zusammengedrückt, so dass sie also keine vollkommenen Kugeln mehr sind. Jede sucht auch im Allgemeinen ihre frühere Gestalt wieder anzunehmen, es findet daher ein Zurückprallen statt. Die Periode des Stosses lässt sich mithin in zwei Theile zerlegen: 1) die Periode der Compression, während welcher sich der Abstand zwischen den Schwerpunkten der beiden Körper vermindert und 2) die Restitutionsperiode, in welcher der Abstand der Schwerpunkte zunimmt. Die zweite Periode geht zu Ende, wenn die Körper sich trennen.

Da die Anordnung der materiellen Punkte eines Körpers durch den Stoss gestört wird, so müssten wir eigentlich, um genau zu sein,

die relative Bewegung der verschiedenen Theile des Körpers bestimmen. Wir müssten jeden Körper als eine Sammlung freier materieller Punkte betrachten, die durch gegenseitige Actionen verbunden sind. Diese Punkte könnten, in Bewegung gesetzt, immer fortfahren sich zu bewegen und dabei um gewisse mittlere Lagen im Körper schwingen.

Man pflegt indessen anzunehmen, dass die Aenderungen der Gestalt und Structur so gering sind, dass ihre Wirkung auf die Veränderung der Schwerpunktslage und des Trägheitsmoments des Körpers vernachlässigt werden kann und ferner dass die ganze Zeit des Zusammenstosses so kurz ist, dass die Verrückung des Körpers in dieser Zeit unbeachtet bleiben darf. Stimmen diese Annahmen für irgend welchen Körper mit der Wirklichkeit nicht überein, so müssen die Wirkungen ihres Zusammenstosses aus den Gleichungen zweiter Ordnung abgeleitet werden. Wir können daher annehmen, dass im Moment der stärksten Compression die Schwerpunkte der beiden Körper sich mit gleicher Geschwindigkeit bewegen.

Das Verhältniss der Grösse der Action zwischen den Körpern während der Restitutionsperiode zu der Actionsgrösse während der Zusammendrückens ist für Körper von verschiedenem Material verschieden. Es hängt davon ab, wie schnell oder langsam die Körper ihre ursprüngliche Gestalt wieder herzustellen suchen. Geschieht es sehr langsam, so findet die Trennung statt, während die Körper noch in ihre frühere Form zurückkehren, und die Action während der Restitution ist alsdann kleiner als die während der Compression. Nehmen die Körper dagegen ihre vorige Gestalt so schnell wieder an, dass sie im Augenblick der Trennung diese Gestalt wieder haben, so ist die Action während der Restitution der während der Compression gleich.

Manchmal kann man die Kraft während der Restitutionsperiode vernachlässigen. Die Körper nennt man dann *unelastisch*. In diesem Fall ist grade nach dem Zusammenstoss  $u' = v'$  und daraus erhält man  $R = \frac{mm'}{m+m'}(u-v)$  und  $u' = \frac{mu + m'v}{m+m'}$ .

Kann die Restitutionskraft nicht vernachlässigt werden, so sei  $R_0$  die ganze Action zwischen den Körpern,  $R_0$  die Action bis zum Moment der grössten Compression. Die Grösse von  $R$  muss man durch Versuche feststellen. Dies kann derart geschehen, dass man die Werthe von  $u'$  und  $v'$  bestimmt und dann  $R$  mit Hülfe der Gleichungen (1) findet. Solche Versuche hat vor Allem Newton angestellt und gefunden, dass  $\frac{R}{R_0}$  ein constantes Verhältniss ist, welches von dem Material der Körper abhängt. Wir wollen es mit  $1+e$  bezeichnen. Die Grösse  $e$  überschreitet niemals die Einheit; in dem Grenzfall, wenn  $e=1$  ist, heissen die Körper vollkommen elastisch.

Nimmt man an, der Werth von  $e$  sei bekannt, so lassen sich die Geschwindigkeiten nach dem Stoss leicht ermitteln. Die Action  $R$

wird zuerst unter der Voraussetzung berechnet, dass die Körper unelastisch wären und daraus der ganze Werth von  $R$  durch Multiplication mit  $1 + e$  gefunden. Man erhält

$$R = \frac{mm'}{m + m'} (u - v) (1 + e),$$

woraus man  $u'$  und  $v'$  mit Hülfe der Gl. (1) findet.

§ 180. Als Beispiel wollen wir untersuchen, wie die Bewegung des in § 170 besprochenen Haspels beeinflusst wird, wenn der Strick so wenig elastisch ist, dass man diese Theorie anwenden kann.

Da der Punkt des Haspels, welcher sich mit dem Strick in Berührung befindet, in dem Moment der grössten Compression keine Geschwindigkeit hat, so misst die in dem § 170 gefundene Stosswirkung die ganze dem Haspel mitgetheilte Bewegungsgrösse vom Beginn des Stosses bis zum Moment der stärksten Compression. Wie aus dem Vorigen hervorgeht, findet man die gesammte mitgetheilte Bewegungsgrösse vom Beginn an bis zum Ende der Restitutionsperiode durch Multiplication der in § 170 gefundenen Spannung mit  $1 + e$ , wenn  $e$  das Maass für die Elasticität des Stricks ist. Dies gibt  $T = \frac{1}{3} mv (1 + e)$ . Die Bewegung des Haspels, an dem diese bekannte Stosskraft angreift, ergibt sich leicht. Die Verticalcomponenten sind  $m(v' - v) = -\frac{1}{3} mv (1 + e)$ . Nimmt man die Momente um den Schwerpunkt, so ist  $mk^2 \omega' = \frac{1}{3} mva (1 + e)$ , woraus sich  $v'$  und  $\omega'$  ableiten lassen.

Beisp. Ein gleichförmiger Balken balancirt um eine horizontale, durch seinen Schwerpunkt gehende Axe und ein vollkommen elastischer Ball fällt von der Höhe  $h$  auf sein eines Ende; man bestimme die Bewegungen des Balkens und des Balls.

Resultat.  $M, m$  seien die Massen des Balkens und des Balles;  $2a$  die Länge des Balkens;  $V, V'$  die Geschwindigkeiten des Balls grade vor und nach dem Stoss,  $\omega'$  die Winkelgeschwindigkeit des Balkens. Es ist dann  $\omega' = \frac{6mV}{(M + 3m)a}$ ,

$$V' = V \cdot \frac{3m - M}{3m + M}.$$

§ 181. **Rauhe Körper.** Bisher haben wir nur die Stosswirkung normal zur gemeinsamen Fläche der beiden Körper betrachtet. Sind aber die Körper rauh, so tritt offenbar eine Stossreibung in Wirksamkeit. Da die Stosskraft nur das Integral einer sehr grossen Kraft ist, die sehr kurze Zeit wirkt, so könnten wir wohl annehmen, die Stossreibung folge denselben Gesetzen wie die gewöhnliche. Diese Gesetze beruhen aber auf Versuchen und wir sind nicht sicher, ob sie auch in dem äussersten Fall gelten, wenn die Kräfte sehr gross sind. Auf besonderen Wunsch Poisson's unternahm es Morin, diesen Punkt durch Versuche aufzuklären. Er fand, dass die Stossreibung zwischen zwei Körpern, welche sich treffen und gleiten, zu der Normalstosskraft in demselben Verhältniss steht wie bei gewöhnlicher Reibung und dass das Verhältniss von der relativen Geschwindigkeit der sich treffenden

Körper nicht abhängt. Morin's Versuch wird im folgenden Paragraphen beschrieben.

§ 182. Auf dem Deckel eines Kastens  $AB$ , der mit Schrot so beladen werden kann, dass man ihm jedes gewünschte Gewicht geben kann, sind zwei verticale Hölzer  $AC$ ,  $BD$  angebracht. Ein Querhölzchen verbindet  $C$  mit  $D$  und trägt ein Gewicht  $mg$ , das mittelst eines Fadens an ihm aufgehängt ist. Das Gewicht des Kastens mit seiner Belastung ist  $Mg$ . Ein Seil  $AEF$  geht horizontal von dem Kasten aus über eine glatte Rolle  $E$  und trägt bei  $F$  das Gewicht  $(M + m)g$ . Der Kasten kann auf einer horizontalen Ebene gleiten, deren Reibungscoefficient  $\mu$  ist. Wenn er daher einmal in Bewegung gesetzt ist, gleitet er in gerader Linie mit gleichförmiger Geschwindigkeit, die wir  $V$  nennen wollen. Nun wird plötzlich der Faden, der  $mg$  trägt, durchgeschnitten; das Gewicht fällt in den Kasten und liegt in ihm sofort fest. Offenbar wird dadurch eine Stossreibung zwischen dem Kasten und der horizontalen Ebene hervorgerufen. Wenn die Geschwindigkeit des Kastens unmittelbar nach dem Stoss wieder  $V$  gleichkommt, so ist der Coefficient der Stossreibung dem der endlichen Reibung gleich.

Man kann sich dies auf folgende Art klar machen.  $t$  sei die Zeit des Falls. Wenn das Gewicht den Kasten trifft, hat es die horizontale Geschwindigkeit  $V$  und die verticale  $gt$ ; der Kasten dagegen die horizontale Geschwindigkeit  $V + ft$ , wenn  $f = \frac{\mu mg}{M + (M + m)\mu}$  ist.

$F$  und  $R$  mögen die horizontale und verticale Componente der Stosskraft zwischen dem Kasten und der horizontalen Ebene sein. Ein Stoss findet statt zwischen dem fallenden Gewicht und dem Kasten und eine Stossspannung in dem Seil  $AEF$ ; durch sie werden die durch die äusseren Stösse  $F$  und  $R$  erzeugten Bewegungsgrössen über das ganze System verbreitet.  $V'$  sei die gemeinsame Geschwindigkeit des ganzen Systems grade nachdem die Stösse  $F$  und  $R$  vollendet sind. Durch den Versuch fand man, dass diese Geschwindigkeit gleich  $V$  ist.

Nimmt man die Componenten in horizontaler und verticaler Richtung wie in § 168, so erhält man

$$[M + m + (M + m)\mu] V' - [M + (M + m)\mu] (V + ft) - mV = - \frac{1}{2} mgt^2$$

$$mgt = R.$$

Setzt man  $V' = V$  und substituirt für  $f$ , so ergibt sich  $F = \mu R$ .

Beisp. Man zeige, dass der resultirende Stoss zwischen dem Kasten und dem fallenden Gewicht vertical gerichtet ist.

§ 183. Wir wollen nun die Theorie des unelastischen Stosses in § 179 verallgemeinern. Zwei Körper von beliebiger Gestalt mögen in dem Punkt  $A$  aufeinanderstossen und Aenderungen der Gestalt un-

Structur wie zuvor vernachlässigt werden. Die relativen Tangential- und Normalgeschwindigkeiten der Berührungspunkte der beiden Körper sind, *wenn sie auf die in § 137 angegebene Art berechnet werden*, nicht Null. Sie heissen die relativen Gleitungs- und Compressionsgeschwindigkeiten. Es treten also zwei Reactionen auf, eine normal gerichtete Kraft und eine Reibung, deren Verhältniss  $\mu$ , der Reibungscoefficient, ist. Im weiteren Verlauf des Stosses wird die relative Normalgeschwindigkeit zerstört und wird Null in dem Moment der stärksten Compression.  $R$  sei die ganze Bewegungsgrösse, welche in dieser sehr kurzen Zeit von dem einen auf den andern Körper normal übertragen wird. Diese Kraft  $R$  ist eine unbekannte Reaction, zu deren Bestimmung die geometrische Bedingung dient, dass gleich nach dem Zusammenstoss die normalen Geschwindigkeiten der Berührungspunkte gleich sind. Diese Bedingung muss auf die in § 137 erklärte Art ausgedrückt werden.

Die relative gleitende Geschwindigkeit bei  $A$  vermindert sich gleichfalls. Wenn sie vor dem Moment der stärksten Compression verschwindet, so kommt während der übrigen Zeit des Zusammenstosses, wenn überhaupt, nur so viel Reibung und in solcher Richtung zur Wirkung, als nöthig ist, um die Berührungspunkte bei  $A$  am Gleiten zu verhindern, vorausgesetzt, dass dieser Betrag kleiner ist als die Grenzgrösse der Reibung.  $F$  sei die ganze Bewegungsgrösse, welche tangential von dem einen auf den andern Körper übertragen wird. Diese Reaction  $F$  ist durch die Bedingung zu bestimmen, dass gleich nach dem Zusammenstoss die Tangentialgeschwindigkeiten der Berührungspunkte gleich sind. Wenn jedoch die gleitende Bewegung vor dem Moment der stärksten Compression nicht verschwindet, so tritt die volle Grösse der Reibung in der dem relativen Gleiten entgegengesetzten Richtung in Wirkung und es ist  $F = \mu R$ . Im Allgemeinen lassen sich die beiden Fälle auf folgende Art unterscheiden. In dem ersten Fall müssen die Werthe von  $F$  und  $R$ , welche man durch Auflösung der Bewegungsgleichungen findet, derart sein, dass  $F < \mu R$  ist. In dem zweiten muss die relative Endgeschwindigkeit der Berührungspunkte bei  $A$  dieselbe Richtung nach wie vor dem Zusammenstoss haben. Diese Bedingungen sind jedoch nicht ausreichend, denn es ist möglich, dass in verwickelteren Fällen das Gleiten seine Richtung während des Zusammenstosses ändert oder zu ändern sucht. Siehe § 187.

§ 184. Sind die Körper, welche aufeinanderstossen, elastisch, so kann sowohl eine normale Reaction als eine Reibung während der Restitutionsperiode auftreten. Manchmal muss man dieses Stadium der Bewegung als ein Problem für sich ansehen. Die Bewegungen der Körper im Moment der stärksten Compression, wie man sie gefunden hat, dienen als Anfangsbedingungen für einen neuen Bewegungszustand unter der Wirkung anderer Stosskräfte; die während der



Restitution zur Wirkung kommende Reibung muss denselben Gesetzen folgen, wie die während der Compression. Genau wie vorher bieten sich zwei Fälle dar; entweder findet Gleiten statt während der ganzen Restitutionsperiode oder nur während eines Theils derselben. Sie werden in der schon erklärten Weise behandelt.

§ 185. Ein sehr wichtiger Unterschied existirt zwischen den Bedingungen der Compression und der Restitution. Während der Compression ist die Normalreaction unbekannt. Die Bewegung des Körpers grade vor der Compression ist gegeben und es besteht eine geometrische Gleichung, welche ausdrückt, dass die relative Normalgeschwindigkeit der Berührungspunkte am Ende der Compressionsperiode Null ist. Aus dieser geometrischen Gleichung wird dann die Compressionskraft abgeleitet. Man findet zwar auf diese Art die Bewegung des Körpers grade vor der Restitution, aber nicht die Bewegung grade nach ihr, die doch zu bestimmen ist. Für sie ist keine geometrische Gleichung vorhanden. Jedoch steht die Restitutionskraft in einem bestimmten Verhältniss zur Compressionskraft und ist somit bekannt.

§ 186. Historische Uebersicht.<sup>1)</sup> Das Problem des Zusammenstosses zweier glatter unelastischer Körper wird von Poisson in seinem *Traité de Mécanique Seconde édition*, 1833 behandelt. Unter der Voraussetzung, dass die Bewegung eines jeden der beiden Körper grade vor dem Zusammenstoss gegeben sei, stellt er für jeden sechs Bewegungsgleichungen zur Bestimmung der Bewegung grade nach dem Stoss auf. Sie enthalten 13 unbekannte Grössen, nämlich die Componenten der Geschwindigkeiten der Schwerpunkte der Körper längs dreier rechtwinkliger Axen, die Componenten der Winkelgeschwindigkeiten der Körper um dieselben Axen und schliesslich die gegenseitige Reaction der beiden Körper. Die Gleichungen reichen mithin zur Bestimmung der Bewegung nicht aus. Eine dreizehnte Gleichung erhält man dann aus dem Satz, dass der Stoss mit dem Moment der stärksten Compression beendigt ist, d. h. in dem Augenblick, in welchem die normalen Geschwindigkeiten der Berührungspunkte der beiden Körper, die sich treffen, gleich sind.

In dem Fall, in welchem die Körper *elastisch* sind, theilt Poisson den Stoss in zwei Perioden. Die erste beginnt mit der ersten Berührung der Körper und endigt im Moment der stärksten Compression; die zweite beginnt in diesem Augenblick und endigt, wenn die Körper sich trennen. Die Bewegung am Ende der ersten Periode findet man genau so, wie bei der Annahme, sie seien unelastisch. Die Bewegung am Ende der zweiten Periode ergibt sich aus dem Satz, dass die ganze dem einen Körper von dem andern während der zweiten Periode mitgetheilte Bewegungsgrösse in constantem Verhältniss zu der während der ersten Periode des Stosses mitgetheilten steht. Das Verhältniss hängt von der Elasticität der beiden Körper ab und kann nur durch Versuche ermittelt werden, die man mit einfachen Stössen an Körpern aus demselben Material anstellt.

Sind die Körper *rau* und *gleiten* während des Zusammenstosses *aufeinander*, so findet gleichzeitig, wie Poisson bemerkt, ein Reibungsstoss statt. Dies ergibt sich aus dem Satz (§ 181), dass die Reibungsgrösse in jedem Augenblick ein constantes Verhältniss zum Normaldruck haben und dass ihre Richtung der relativen Be-

1) Siehe auch Poinso in Liouv. J. (2) II, 283 und IV, 161, 421. Chelin in *Bologna Mem.* Serie 3, VI, 409, VIII, 273.

wendung auf eine Kugel, die entweder unelastisch oder vollkommen elastisch ist, auf eine raue Ebene stösst und sich vor dem Zusammenstoss um eine horizontale zur Bewegungsrichtung ihres Schwerpunkts senkrechte Axe dreht. Er zeigt, dass man verschiedene Fälle unterscheiden müsse, (1) wenn das Gleiten während des ganzen Stosses dieselbe Richtung behält und nicht verschwindet, (2) wenn es während des Stosses verschwindet und Null bleibt, (3) wenn das Gleiten verschwindet und das Vorzeichen wechselt. Der dritte Fall enthält jedoch eine unbekannte Grösse und seine Formeln reichen daher zur Bestimmung der Bewegung nicht aus. Poisson weist darauf hin, dass das Problem sehr complicirt wird, wenn die Kugel eine Anfangsrotation um eine Axe hat, die auf der verticalen Ebene nicht senkrecht steht, in welcher sich ihr Schwerpunkt bewegt. Er versucht nicht das Problem zu lösen, sondern geht zu einer ausführlichen Besprechung des Zusammenstosses glatter Körper über.

Coriolis untersucht in seinem *Jeu de Billard* (1835) den Zusammenstoss zweier *rauen* Kugeln, die während der ganzen Zeit des Stosses aufeinander gleiten. Er zeigt, dass beim Zusammentreffen zweier *rauen* Kugeln die Richtung des Gleitens während des ganzen Stosses dieselbe bleibt.

Ed. Phillips untersucht im 14. Band von Liouville's Journal, 1849, das Problem des Zusammenstosses zweier *rauer unelastischer* Körper von beliebiger Gestalt, wenn die Reibungsrichtung während des ganzen Stosses nicht nothwendig dieselbe zu bleiben braucht, unter der Annahme, dass *das Gleiten während des Stosses nicht verschwindet*. Er theilt die Periode des Stosses in Elementartheile und wendet Poisson's Regel für die Grösse und Richtung der Reibung auf jede Elementarperiode an. Er gibt an, wie man die Auflösung der Gleichungen durchführen kann und bespricht speciell den Fall, in welchem die Hauptaxen der beiden Körper für den Berührungspunkt einander parallel sind und überdies der Schwerpunkt eines jeden Körpers auf der gemeinschaftlichen Normalen im Berührungspunkt liegt. Er kommt dabei zu zwei Resultaten, die wir in dem Kapitel über *Bewegungsgrösse* bringen werden.

Phillips geht nicht auf eine detaillirte Untersuchung des Zusammenstosses *elastischer* Körper ein, wenn er auch bemerkt, die Periode des Stosses müsse in zwei Theile zerlegt werden, die gesondert zu betrachten seien. Er meint jedoch, sie böten keine weiteren Eigenthümlichkeiten dar, wenn man dieselben Voraussetzungen mache.

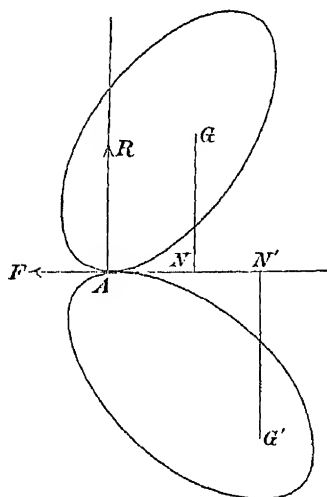
Den Fall, in welchem das Gleiten verschwindet und die Reibung unstetig wird, scheint er nicht untersucht zu haben.

In diesem Kapitel werden wir die Theorie der Stosskräfte nur so weit verfolgen, als die ebene Bewegung in Betracht kommt. In dem Kapitel VI über *Bewegungsgrösse* wird die Theorie wieder aufgenommen und auf Körper von beliebiger Gestalt in dem Raum von drei Dimensionen ausgedehnt werden.

§ 187. **Das Problem des Stosses im Allgemeinen.** *Zwei Körper von beliebiger Gestalt stossen auf eine gegebene Art widereinander. Man soll die Bewegung grade nach dem Stoss finden. Die Körper sind glatt oder rauh, elastisch oder nicht.*

$G$ ,  $G'$  seien die Schwerpunkte der beiden Körper,  $A$  der Berührungspunkt.  $U$ ,  $V$  seien die Componenten der Geschwindigkeit von  $G$  grade vor dem Stoss parallel zur Tangente bez. Normalen in  $A$ ;  $u$ ,  $v$  die Componenten der Geschwindigkeit zur Zeit  $t$  nach dem Beginn des Stosses, aber ehe er zu Ende ist, so dass also  $t$  unbegrenzt

klein ist.  $\Omega$  sei die Winkelgeschwindigkeit des Körpers mit dem Schwerpunkt  $G$  grade vor dem Stoss,  $\omega$  die Winkelgeschwindigkeit nach dem



Intervall  $t$ . Sie werden positiv genommen, wenn sie rotiren wie die Zeiger einer Uhr.  $M$  sei die Masse des Körpers,  $k$  sein Trägheitsradius um  $G$ .  $GN$  sei ein Loth von  $G$  auf die Tangente in  $A$  und  $AN = x$ ,  $NG = y$ . Dieselben Buchstaben mit einem Strich bezeichnen die entsprechenden Grössen für den andern Körper.

§ 188. Die Körper seien *vollkommen rauh und unelastisch*, so dass beim Ende des Stosses die relative Geschwindigkeit des Gleitens sowohl als die relative Geschwindigkeit der Compression Null sind (siehe § 156). Nimmt man alsdann an,  $t$  sei der ganzen Dauer des Stosses gleich, so beziehen sich die Buchstaben  $u, v, \omega, u', v', \omega'$  auf die Bewegung gleich nach dem Stoss. Wir erhalten dann nach § 137

$$\left. \begin{aligned} u - y\omega - u' - y'\omega' &= 0 \\ v + x\omega - v' - x'\omega' &= 0 \end{aligned} \right\}.$$

Die Componenten parallel zur Tangente und Normalen im Berührungspunkte ergeben nach § 169

$$\left. \begin{aligned} M(u - U) + M'(u' - U') &= 0 \\ M(v - V) + M'(v' - V') &= 0 \end{aligned} \right\}$$

und nimmt man die Momente für jeden Körper um den Berührungspunkt

$$\left. \begin{aligned} Mh^2(\omega - \Omega) + M(u - U)y - M(v - V)x &= 0 \\ M'h'^2(\omega' - \Omega') + M'(u' - U')y' - M'(v' - V')x' &= 0 \end{aligned} \right\}.$$

Diese sechs Gleichungen reichen zur Bestimmung der Bewegung gleich nach dem Stoss aus.

§ 189. Sind die Körper *vollkommen glatt und unelastisch*, so hat die erste dieser sechs Gleichungen keine Gültigkeit und statt der dritten erhält man aus den Componenten parallel zur Tangente für jeden einzelnen Körper

$$u - U = 0, \quad u' - U' = 0.$$

§ 190. Sind die Körper *glatt und elastisch*, so ist die Normalreaction in die Gleichungen einzuführen. Wir schreiben die Gleichungen (1) und (2), wie weiter unten in § 192, mit der einzigen Aenderung nieder, dass  $F = 0$  gesetzt wird. Gleichung (4) gibt dann die Ge

Stosses. Setzt man  $C = 0$ , so erhält man wie in Gleichung (6) den Werth von  $R$  bis zu dem Augenblick der stärksten Compression, d. h.  $R = \frac{C_0}{a'}$ , und durch Multiplication mit  $1 + e$  nach § 179 den vollen Werth von  $R$  für den ganzen Stoss. Substituirt man dann diesen Werth in die Gleichungen (1) und (2), so ergibt sich  $u, v, \omega, u', v', \omega'$ .

§ 191. Beisp. Zwei glatte vollkommen elastische Körper stossen gegeneinander.  $D, D'$  seien die Componenten der Geschwindigkeit des Berührungspunkts eines jeden grade vor dem Zusammenstoss mit dem andern in der Richtung der Normalen. Man beweise, dass die vom Körper  $M$  verlorene lebendige Kraft  $\frac{C_0}{a'^2} \left( D' \frac{k^2 + x^2}{Mk^2} - D \frac{k'^2 + x'^2}{M'k'^2} \right)$  ist, wobei die Bezeichnung dieselbe, wie in dem nächsten Satz ist.

Eine andre Art, die Aenderung der lebendigen Kraft zu finden, wird in Kapitel VII gegeben.

§ 192. Sind nun ferner *die Körper unvollkommen rauh und elastisch*, so ist die Grösse der Reibung, die zur Wirkung gebracht werden kann, wie in § 158 erklärt wurde, begrenzt. Die in § 188 erhaltenen Resultate sind auf den Fall nicht anwendbar, in welchem die Grenzgrösse der Reibung nicht ausreicht, das relative Gleiten auf Null zu reduciren. Um darüber eine Entscheidung treffen zu können, muss man den Reibungs- und Normalstoss in die Gleichungen einführen.

$R$  sei die ganze dem Körper  $M$  in der Zeit  $t$  nach Beginn des Stosses durch den Normaldruck und  $F$  die durch den Reibungsdruck mitgetheilte Bewegungsgrösse. Wir nehmen an, sie griffen an dem Körper, dessen Masse  $M$  ist, in den Richtungen  $NG$  bez.  $NA$  an. Man muss dann voraussetzen, dass sie auf den Körper von der Masse  $M'$  in umgekehrter Richtung wirken.

Da  $R$  die ganze dem Körper  $M$  in der Richtung der Normalen mitgetheilte Bewegungsgrösse darstellt, so ist die in der Zeit  $dt$  mitgetheilte Bewegungsgrösse  $dR$ . Da die Körper nur gegeneinander stossen können, so muss  $dR$  positiv sein und die Körper müssen sich nach § 136, wenn  $dR$  verschwindet, voneinander trennen. Man kann daher die Grösse von  $R$  zum Maass des Fortschritts des Stosses nehmen. Sie ist im Anfang Null, vermehrt sich nach und nach und wird bei der Beendigung des Zusammenstosses ein Maximum. Es ist, wie man finden wird, vortheilhafter,  $R$  anstatt  $t$  zur unabhängigen Variablen zu wählen.

Die dynamischen Gleichungen sind nach § 168

$$\left. \begin{aligned} M(u - U) &= -F \\ M(v - V) &= R \\ Mk^2(\omega - \Omega) &= Fy + Rx \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (1),$$

$$\left. \begin{aligned} M'(u' - U') &= F \\ M'(v' - V') &= -R \\ M'k'^2(\omega' - \Omega') &= Fy' - Rx' \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (1)$$

Die relative Geschwindigkeit des Gleitens der Berührungspunkte ist nach § 137

$$S = u - y\omega - u' - y'\omega' \dots \dots \dots (2)$$

und die relative Druckgeschwindigkeit nach demselben Paragraphen

$$C = v' + x'\omega' - v - x\omega \dots \dots \dots (3)$$

Substituiert man in diese Gleichungen aus den dynamischen Gleichungen, so ergibt sich

$$S = S_0 - aF - bR \dots \dots \dots (4)$$

$$C = C_0 - bF - a'R \dots \dots \dots (5)$$

worin

$$S_0 = U - y\Omega - U' - y'\Omega' \dots \dots \dots (6)$$

$$C_0 = V' + x'\Omega' - V - x\Omega \dots \dots \dots (7)$$

$$a = \frac{1}{M} + \frac{1}{M'} + \frac{y^2}{Mk^2} + \frac{y'^2}{M'k'^2} \dots \dots \dots (8)$$

$$a' = \frac{1}{M} + \frac{1}{M'} + \frac{x^2}{Mk^2} + \frac{x'^2}{M'k'^2} \dots \dots \dots (9)$$

$$b = \frac{xy}{Mk^2} - \frac{x'y'}{M'k'^2} \dots \dots \dots (10)$$

sind.

Man kann die fünf letzten Grössen die Constanten des Stosses nennen. Die beiden ersten  $S_0$ ,  $C_0$  stellen die Anfangsgeschwindigkeiten des Gleitens und der Compression dar. Wir sehen sie als positiv an, so dass also der Körper  $M$  über den Körper  $M'$  bei Beginn der Compression gleitet. Die drei andern Constanten  $a$ ,  $a'$ ,  $b$  sind von der Anfangsbewegung der aufeinander treffenden Körper unabhängig. Die Constanten  $a$  und  $a'$  sind ihrem Wesen nach positiv, während  $b$  jedes der beiden Vorzeichen haben kann. Es wird von Vorthail sein, wenn man beachtet, dass  $aa' > b^2$  ist.

§ 193. Der darstellende Punkt. Es kommt oft vor, dass  $b = 0$  wird, in welchem Fall die Discussion der Gleichungen sich sehr vereinfacht. Aber auch in diesem einfachen, ganz gewiss jedoch in dem allgemeinen Fall, ist es leichter den Aenderungen der Kräfte zu folgen wenn man die graphische Methode anwendet.

Es handelt sich um das Folgende. Während  $R$  von Null an mittel gleichem fortgesetzter Zuwächse  $dR$  zu seinem schliesslichen Maximumwerth vorschreitet, rückt auch  $F$  von Null an durch fortgesetzte Zuwächse  $dF$  vor, welche jedoch nicht immer dasselbe Vorzeichen zu haben brauchen und die durch ein veränderliches Gesetz beherrscht werden da entweder  $dF = \pm \mu dR$  ist oder  $dF$  grade ausreicht, relative B

Beisp. 1. Man zeige, dass die Richtung der Stossaction an dem Drehpunkt  $B$  mit dem Horizont einen Winkel macht, dessen Tangente  $(3 \sin^2 \alpha - 2) \cotg \alpha$  ist.

Beisp. 2. Wenn der Elasticitätscoefficient der Ebene  $e$  ist, zu zeigen, dass der durch (6) gegebene Werth von  $\omega$  mit  $1 + e$  multiplicirt werden muss.

Die nun folgende Bewegung zu finden. Dies geschieht sehr leicht mit Hülfe des Princips der lebendigen Kraft. Um jedoch möglichst viele Lösungsarten zu erläutern, wollen wir anders verfahren. Die Effectivkräfte an jedem der oberen Stäbe werden durch die Differentialquotienten  $m \frac{dv}{dt}$ ,  $m \frac{du}{dt}$ ,  $mk^2 \frac{d\omega}{dt}$  dargestellt und das Moment für jeden der unteren Stäbe ist  $m(k^2 + a^2) \frac{d\omega'}{dt}$ .  $\theta$  sei der Winkel, den jeder Stab zur Zeit  $t$  mit der Verticalen macht. Nimmt man die Momente ebenso wie vorher, so erhält man

$$mk^2 \frac{d\omega}{dt} + m \frac{dv}{dt} a \sin \theta - m \frac{du}{dt} a \cos \theta = -R \cdot 2a \cos \theta + mga \sin \theta \quad (1)',$$

$$m(k^2 + a^2) \frac{d\omega'}{dt} - mk^2 \frac{d\omega}{dt} + m \frac{dv}{dt} a \sin \theta + m \frac{du}{dt} \cdot 3a \cos \theta = R \cdot 4a \cos \theta + 2mga \sin \theta \quad (2)'. \quad . . . . .$$

Die geometrischen Gleichungen bleiben dieselben wie zuvor, wenn man  $\theta$  statt  $\alpha$  schreibt. Durch Elimination von  $R$  und Einsetzen der Werthe von  $u$  und  $v$  findet man

$$(2k^2 + a^2) \frac{d\omega}{dt} + a^2 \left[ 9 \sin \theta \frac{d}{dt} (\omega \sin \theta) + \cos \theta \frac{d}{dt} (\omega \cos \theta) \right] = 4ga \sin \theta$$

und durch Multiplication der beiden Seiten mit  $\omega = \frac{d\theta}{dt}$  und Integration

$$[2(k^2 + a^2) + 8a^2 \sin^2 \theta] \omega^2 = C - 8ga \cos \theta.$$

Im Anfang, wenn  $\theta = \alpha$  ist, hat  $\omega$  den durch Gl. (6) gegebenen Werth. Die Winkelgeschwindigkeit  $\omega$  ist daher, wenn die Neigung eines Stabes gegen die Verticale  $\theta$  ist, durch

$$(1 + 3 \sin^2 \theta) \omega^2 = \frac{9V^2}{4a^2} \cdot \frac{\sin^2 \alpha}{1 + 3 \sin^2 \alpha} + \frac{3g}{a} (\cos \alpha - \cos \theta)$$

gegeben.

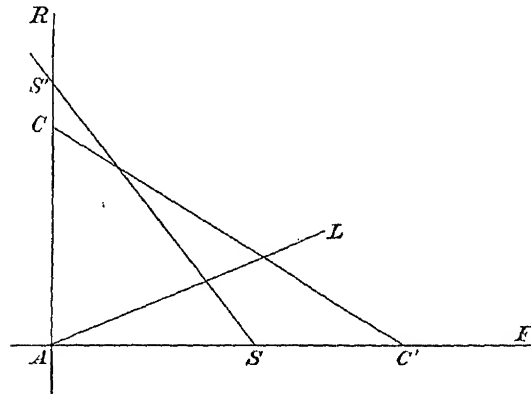
§ 177. Beisp. 1. Ein Quadrat bewegt sich frei um eine Diagonale mit der Winkelgeschwindigkeit  $\omega$ ; einer der nicht in der Diagonale gelegenen Eckpunkte wird festgehalten; man bestimme den Stossdruck auf den festen Punkt und zeige, dass die augenblickliche Winkelgeschwindigkeit nachher  $\frac{\omega}{7}$  ist. [Christ's Coll.]

Beisp. 2. Drei gleiche Stäbe, die sich in einer Geraden befinden und durch Gelenke miteinander verbunden sind, bewegen sich senkrecht zu ihrer Länge mit der Geschwindigkeit  $v$ . Der Mittelpunkt des mittleren Stabes wird plötzlich festgehalten; man zeige, dass sich die Enden der beiden andern in der Zeit  $\frac{4\pi a}{9v}$  treffen, wenn  $a$  die Länge eines jeden Stabes bedeutet. [Coll. Ex.]

Beisp. 3. Die Punkte  $ABCD$  sind Eckpunkte eines Quadrats;  $AB, CD$  sind zwei gleiche und ähnliche Stäbe, die durch den Faden  $BC$  verbunden werden. Der Punkt  $A$  erhält einen Stoss in der Richtung  $AD$ ; man zeige, dass die Anfangsgeschwindigkeit von  $A$  siebenmal so gross als die von  $D$  ist. [Queen's Coll.]

Beisp. 4. Eine Reihe gleicher Balken  $AB, BC, CD \dots$  ist durch Gelenke verbunden; die Balken werden auf eine glatte horizontale Ebene so gelegt, dass jeder mit den beiden anliegenden rechte Winkel bildet und das Ganze eine treppenähnliche Figur bildet. Dem Ende  $A$  wird in der Richtung  $AB$  ein Stoss gegeben; man bestimme die Stossaction an jedem Gelenk. [Math. Tripos.]

den Reibungsgrenzwert zu behalten, bis  $P$  die Gerade  $SS'$  erreicht. Die Abscisse des Durchschnittspunktes ist  $R_0 = \frac{S_0}{a\mu + b}$ . Sie gibt den ganzen normierten Schlag an vom Beginn des Stosses bis zu der Zeit,



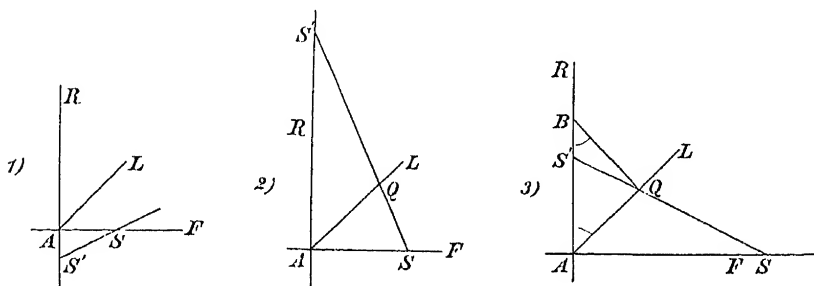
welcher die Reibung von gleitender zu wälzender übergehen kann. Ist  $b$  negativ, so schneiden sich die Geraden  $AL$  und  $SS'$  auf der positiven Seite der  $F$ -Achse überhaupt nicht. Alsdann behält die Reibung ihren Grenzwert während des ganzen Stosses. Ist dagegen  $b$  positiv, so erreicht die darstellende Punkt  $P$  die Gerade  $SS'$  und

dieser Zeit tritt nur soviel Reibung in Wirkung, als hinreicht, Gleiten zu verhüten, vorausgesetzt, dass diese Grösse kleiner als Grenzwert der Reibung ist. Ist der spitze Winkel, den  $SS'$  mit  $R$ -Achse bildet, kleiner als  $\arctan \mu$ , so ist die Reibung  $dF$ , die notwendig ist, um Gleiten zu verhindern, kleiner als der Grenzwert der Reibung  $\mu dR$ .  $P$  wandert daher weiter auf  $SS'$  in solcher Richtung, dass die Abscisse  $R$  fortfährt, in positivem Sinn zu wachsen und damit erreicht die Reibung, so lange der Stoss dauert, ihren Grenzwert nicht wieder.

Ist dagegen der spitze Winkel, den  $SS'$  mit der  $R$ -Achse macht, grösser als  $\arctan \mu$ , so ist das Verhältniss von  $dF$  zu  $dR$  numerisch grösser als  $\mu$  und es ist mehr Reibung nöthig um Gleiten zu verhüten, als zur Wirkung gebracht werden kann. Die Reibung fährt dann fort ihren Grenzwert zu behalten und der Punkt  $P$  bewegt sich nachdem er  $SS'$  erreicht hat, auf einer Geraden, die denselben Winkel mit der  $R$ -Achse wie  $AL$  macht. Diese Gerade muss auf der entgegengesetzten Seite von  $SS'$  liegen, weil der spitze Winkel zwischen  $SS'$  und  $AR$  grösser als der Winkel  $LAR$  ist. Da ferner der Punkt  $P$  die Linie  $SS'$  gekreuzt hat, so ändert sich die Richtung des relativen Gleitens und mithin auch die Richtung der Reibung. Offenbar behält dann die Reibung während des ganzen Stosses ihren Grenzwert.

Ein Beispiel zu jedem der drei Fälle geben wir in den drei Diagrammen auf S. 175. Die Figuren unterscheiden sich durch die Lage der Geraden keines Gleitens. In allen drei Figuren bewegt sich der darstellende Punkt von  $A$  aus auf der Geraden  $AL$ , die mit  $AR$  denselben

Winkel  $LAR$  einschliesst, dessen Tangente  $\mu$  ist. In Fig. (1) ist der Winkel zwischen der Geraden keines Gleitens d. h.  $SS'$  und  $AR$  so gross, dass  $AL$  und  $SS'$  sich in dem positiven Quadranten nicht schneiden. Die Reibung behält daher während des ganzen Stosses ihren Grenzwert. In den beiden andern Figuren schneiden sich  $AL$



und  $SS'$  in einem Punkt  $Q$ . In Fig. (2) ist der Winkel  $SS'A$  kleiner als der Winkel  $LAR$ , der darstellende Punkt wandert daher, nachdem er  $Q$  erreicht hat, auf  $QS'$  weiter. In Fig. (3) ist der Winkel  $SS'A$  grösser als  $LAR$ , der darstellende Punkt bewegt sich also, nachdem er in  $Q$  angekommen, auf der Geraden  $QB$  auf der andern Seite von  $SS'$  derart weiter, dass der Winkel  $QBA$  dem Winkel  $QAR$  gleich ist.

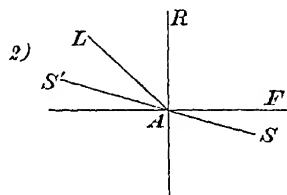
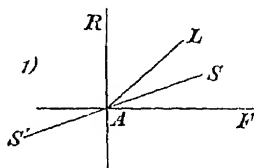
Trifft  $P$  auf die Gerade  $CC'$ , so hört die Compression auf und die Restitution beginnt. Der Durchgang ist aber durch weiter keine Eigenthümlichkeit als diese ausgezeichnet. Ist  $R_1$  die Abscisse des Kreuzungspunkts von  $P$  mit  $CC'$ , so endigt der ganze Stoss, wie man aus Gründen, die auf Versuchen beruhen, annimmt, wenn  $R_2$ , die Abscisse von  $P$ , gleich  $R_1(1 + e)$  wird, unter  $e$  das Maass der Elasticität der beiden Körper verstanden.

Offenbar gibt es sehr viele verschiedene Fälle, je nach der relativen Lage der drei Geraden  $AL$ ,  $SS'$  und  $CC'$ ; immer aber lässt sich das Fortschreiten des Stosses auf die eben erklärte Art verfolgen, die man kurz auf folgende Weise zusammenfassen kann. Der darstellende Punkt  $P$  wandert auf  $AL$ , bis er  $SS'$  trifft. Dann schreitet er entweder auf  $SS'$  weiter oder auf einer Geraden, die mit der  $R$ -Axe denselben Winkel wie  $AL$  macht, aber auf der entgegengesetzten Seite von  $SS'$  liegt. Die Gerade, auf welcher er weitergeht, ist diejenige von beiden, die am steilsten auf der  $F$ -Axe steht. Er wandert auf dieser Linie in solcher Richtung weiter, dass die Abscisse  $R$  sich vergrössert und bleibt auf der Geraden bis zum Ende des Stosses. Den vollen Werth von  $R$  für den ganzen Stoss findet man durch Multiplication der Abscisse des Punktes, in welchem  $P$  die Gerade  $CC'$  kreuzt, mit  $1 + e$ . Der volle Werth von  $F$  ist die entsprechende Ordinate von  $P$ . Setzt man sie in die dynamischen Gleichungen (1) und (2) ein, so lässt sich die Bewegung grade nach der Collision leicht ermitteln.



Ist  $S_0 = 0$ , so wird  $S = -aF - bR$ . In diesem Fall geht die Gerade keines Gleitens durch den Koordinatenanfang  $A$ . Ist der spitze Winkel, den diese Gerade mit der  $R$ -Axe macht, kleiner als  $\arctan \mu$ , d. h. ist  $\frac{b}{a}$  numerisch kleiner als  $\mu$ , so bewegt sich der darstellende Punkt auf ihr in solcher Richtung, dass seine Abscisse  $R$  beständig wächst. Die Reibung bleibt daher während des ganzen Stosses kleiner als ihr Grenzwert.

Ist dagegen der spitze Winkel, den die Linie keines Gleitens mit der  $R$ -Axe macht, grösser als  $\arctan \mu$ , d. h. ist  $\frac{b}{a}$  numerisch grösser als  $\mu$ , so bewegt sich der darstellende Punkt auf der Geraden  $AL$ , welche mit der  $R$ -Axe den spitzen Winkel  $LAR = \arctan \mu$  bildet. Die Gerade liegt auf der positiven oder negativen Seite von  $AR$ , nachdem  $S$  positiv oder negativ ist. Da der numerische Werth von  $S$  grösser als  $a\mu$  und  $F = \pm \mu R$  ist, so hängt das Vorzeichen von  $S$  von dem Vorzeichen von  $-bR$  ab und hat daher  $S$  das entgegengesetzte Zeichen von  $b$ . Daraus folgt, dass die Gerade  $AL$  innerhalb des spitzen Winkels liegt, den die Linie keines Gleitens mit  $AR$  macht.



So liegt  $AL$  in Fig. (1) auf der positiven, in Fig. (2) auf der negativen Seite von  $AR$ . Da  $AL$  die Linie keines Gleitens nicht noch einmal treffen kann, so behält die Reibung ihren Grenzwert während des ganzen Stosses.

Der darstellende Punkt verfolgt seinen Weg entweder auf  $S$  oder auf  $AL$ , je nachdem der Fall liegt, bis zu dem Ende des Stosses. Der volle Werth von  $R$  für den ganzen Stoss ergibt sich durch Multiplication der Abscisse des Punktes, in welchem  $P$  die Gerade  $C$  kreuzt, mit  $1 + e$ . Der volle Werth von  $F$  ist die entsprechende Ordinate von  $P$ . Setzt man sie in die dynamischen Gleichungen, so findet man die Bewegung grade nach dem Stoss.

§ 195. Sind die Körper glatt, so fällt die Gerade  $AL$  mit der  $R$ -Axe zusammen. Der darstellende Punkt  $P$  bewegt sich auf der  $R$ -Axe und den vollen Werth von  $R$  für den ganzen Stoss erhält man durch Multiplication der Abscisse von  $C$  mit  $1 + e$ .

Sind die Körper vollkommen rauh (§ 156), so fällt  $AL$  mit der  $F$ -Axe zusammen. Der darstellende Punkt  $P$  bewegt sich auf der  $F$ -Axe, bis er an dem Punkt  $S$  anlangt. Er wandert dann auf der Linie

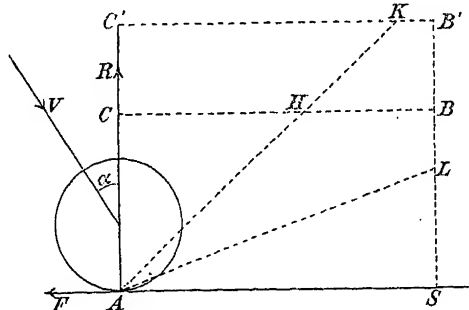
keines Gleitens weiter, bis er die Linie  $CC'$  der grössten Compression erreicht. Sind die Körper unelastisch, so sind die Coordinaten  $R_1, F_1$  dieses Durchschnittspunkts die gesuchten Werthe von  $R$  und  $F$ ; sind sie aber unvollkommen elastisch, so setzt der darstellende Punkt seinen Weg auf der Linie keines Gleitens fort. Der volle Werth von  $R$  für den ganzen Stoss ist dann  $R_2 = R_1(1 + e)$  und den vollen Werth von  $F$  erhält man durch Substitution dieses Werthes von  $R$  in die Gleichung der Linie keines Gleitens.

§ 196. Die Reibung braucht während des Zusammenstosses nicht immer dieselbe Richtung zu haben. Sie muss allerdings dasselbe Vorzeichen behalten, so lange  $P$  sich auf  $AL$  bewegt; hat  $P$  aber  $SS'$  erreicht, so ändert sich die Bewegungsrichtung und die in der Zeit  $dt$  zur Wirkung kommende Reibung  $dF$  kann dasselbe oder das entgegengesetzte Vorzeichen, wie vorher, haben. Offenbar aber kann sie ihr Zeichen nur einmal während des Stosses wechseln. Ist  $b = 0$ , so steht die Gerade  $SS'$  senkrecht auf der  $F$ -Axe und alsdann kann sich offenbar ihr Vorzeichen nicht ändern.

Es ist möglich, dass die Reibung ihren Grenzwert während des Stosses behält, so dass also die Körper fortwährend aufeinander gleiten. Dazu ist nothwendig, dass entweder die Gerade  $SS'$  weniger steil zur  $F$ -Axe gerichtet ist als  $AL$ , oder dass der Punkt  $P$  die Gerade  $SS'$  überhaupt nicht erreicht, weil seine Abscisse schon früher grösser als  $R_2$  geworden ist. In dem ersten Fall muss  $b$  grösser als  $\mu a$  sein; die Abscissen der Durchschnittspunkte von  $AL$  mit  $SS'$  und  $CC'$  sind  $R_0 = \frac{S_0}{a\mu + b}$  bez.  $R_1 = \frac{C_0}{b\mu + a}$ . In dem zweiten Fall muss  $R_1$  positiv und  $R_0$  entweder negativ oder positiv und zugleich grösser als  $R_1(1 + e)$  sein.

§ 197. Beisp. 1. Der Abprall eines Balls. Ein kugelförmiger Ball bewegt sich ohne Rotation auf einer glatten horizontalen Ebene und trifft mit der Geschwindigkeit  $V$  gegen eine rauhe verticale Wand, deren Reibungscoefficient  $\mu$  ist. Die Richtung der Bewegung des Schwerpunktes vor dem Anprall macht mit der zur Wand Senkrechten den Winkel  $\alpha$ ; man bestimme die Bewegung grade nach dem Zusammenstoss.

Dies ist das allgemeine Bewegungsproblem für alle kugelförmigen ohne Anfangsrotation gegen eine rauhe elastische Ebene geschleuderten Bälle. Es findet Anwendung sowohl auf den gegen die Bande gestossenen Billardball als auf den Cricketball, der vom Boden abspringt. Hat der Ball eine Anfangsrotation, so bedarf man im Allgemeinen des Raumes von drei Dimensionen; dieser Fall wird später erörtert werden.



In der Figur S. 177 stellt die Ebene des Papiers eine horizontale durch den Mittelpunkt der Kugel gelegte Ebene vor. Die verticale Ebene, gegen welche der Ball anstösst, schneidet die Ebene des Papiers in  $AS$ .

$u, v$  seien die Componenten der Geschwindigkeit des Centrums zur Zeit nach dem Beginn des Zusammenstosses längs der Wand und senkrecht zu ihr;  $\omega$  sei die Winkelgeschwindigkeit in demselben Moment;  $R$  und  $F$  die Normal- und Reibungsstösse vom Beginn des Zusammenstosses bis zur Zeit  $t$ ;  $M$  die Masse und  $r$  der Radius der Kugel.

Man erhält dann

$$\left. \begin{aligned} M(u - V \sin \alpha) &= -F \\ M(v + V \cos \alpha) &= R \\ Mk^2 \omega &= Fr \end{aligned} \right\}.$$

Die Geschwindigkeit des Gleitens des Berührungspunktes ist

$$S = u - r\omega = V \sin \alpha - \frac{r^2 + k^2}{k^2} \frac{F}{M}$$

und die Geschwindigkeit der Compression des Berührungspunktes

$$C = -v = V \cos \alpha - \frac{R}{M}.$$

Man trage in der Figur eine Länge  $AS$ , die  $\frac{k^2}{r^2 + k^2} MV \sin \alpha$  und eine andre  $AC$ , die  $MV \cos \alpha$  darstellt, auf der  $F$ - bez. der  $R$ -Axe auf.  $SB$  und  $CE$  parallel zu den Richtungen von  $R$  und  $F$  sind dann die Linien *keines Gleitens* und der *stärksten Compression*. Man sieht auch, dass  $\tan BAC = \frac{k^2}{r^2 + k^2} \tan \alpha = \frac{2}{7} \tan \alpha$  ist. Im Anfang des Stosses gleitet die Kugel auf der Wand; der darstellende Punkt  $P$ , dessen Coordinaten  $R$  und  $F$  sind, beginnt daher die Gerade  $F = \mu R$  zu beschreiben.

Ist  $\mu > \frac{2}{7} \tan \alpha$ , so schneidet diese Gerade die Linie *keines Gleitens*  $SB$  in einem Punkt  $L$ , bevor sie die Linie der grössten Compression trifft. Der darstellende Punkt beschreibt daher die gebrochene Linie  $ALB$ . Im Moment der grössten Compression sind  $F$  und  $R$  die Coordinaten von  $B$ .

Daher ist

$$F = \frac{2}{7} MV \sin \alpha, \quad R = MV \cos \alpha.$$

Sie sind unabhängig von  $\mu$ , weil, wie man aus der Figur sieht, mehr als genug Reibung zur Wirkung gebracht werden kann, um die gleitende Bewegung zu zerstören.

Ist  $\mu < \frac{2}{7} \tan \alpha$ , so schneidet die Gerade  $F = \mu R$  die Linie der grössten Compression  $CB$  in einem Punkt  $H$ , bevor sie die Linie *keines Gleitens* trifft. Die Reibung reicht daher nicht aus, das Gleiten zu zerstören. In dem Moment der grössten Compression sind die Coordinaten von  $H$

$$F = \mu MV \cos \alpha, \quad R = MV \cos \alpha.$$

Wenn die Kugel unelastisch ist, so hat man diese Werthe von  $F$  und  $R$  nur in die Bewegungsgleichungen einzusetzen, um die Werthe von  $u, v, \omega$  grade nach dem Zusammenstoss zu finden.

Ist die Kugel unvollkommen elastisch und hat den Elasticitätscoefficienten  $e$ , so setzt der darstellende Punkt  $P$  seinen Weg fort, bis seine Abscisse  $R$  den Werth erreicht hat

$$R = MV \cos \alpha (1 + e).$$

Stellt  $AC'$  diesen Werth von  $R$  vor und zieht man  $C'B'$  parallel zu  $CB$ , so wird, wie zuvor,  $\operatorname{tg} B'AC' = \frac{2}{7} \frac{\operatorname{tg} \alpha}{1+e}$ .

Ist  $\mu > \frac{2}{7} \frac{\operatorname{tg} \alpha}{1+e}$ , so beschreibt der darstellende Punkt eine gebrochene Linie wie  $ALB'$  und schneidet  $GB'$ , bevor er  $B'C'$  trifft. In diesem Fall sind  $F$  und  $R$  die Coordinaten von  $B'$ ,

$$F = \frac{2}{7} MV \sin \alpha, \quad R = MV \cos \alpha (1+e).$$

Ist  $\mu < \frac{2}{7} \frac{\operatorname{tg} \alpha}{1+e}$ , so beschreibt der darstellende Punkt eine nicht gebrochene Linie, etwa  $AHK$ , und schneidet  $B'C'$ , ehe er  $SB'$  trifft. In diesem Fall sind  $F$  und  $R$  die Coordinaten von  $K$ ,

$$F = \mu MV \cos \alpha (1+e), \quad R = MV \cos \alpha (1+e).$$

Wenn  $\beta$  den Winkel bedeutet, den die Bewegungsrichtung des Centrums des Balls mit der Normalen zur Wand nach dem Stoss macht, so ist  $\operatorname{tg} \beta = \frac{u}{v}$ . Man erhält daher

$$\operatorname{tg} \beta = \frac{5}{7} \frac{\operatorname{tg} \alpha}{e}, \quad \text{oder} \quad = \frac{\operatorname{tg} \alpha - \mu(1+e)}{e},$$

je nachdem  $\mu$  grösser oder kleiner als  $\frac{2}{7} \frac{\operatorname{tg} \alpha}{1+e}$  ist.

Beisp. 2. Ein unvollkommen elastischer Cricketball wird so geworfen, dass er mit der Winkelgeschwindigkeit  $\Omega$  um eine horizontale Axe rotirt, die auf der Ebene der von seinem Centrum beschriebenen Parabel senkrecht steht. Grade, ehe er den Boden trifft, hat sein Centrum die Geschwindigkeit  $V$  und macht die Richtung seiner Bewegung mit der Normalen den Winkel  $\alpha$ . Man zeige, dass der Abprallwinkel  $\beta$  entweder durch

$$e \operatorname{tg} \beta = \frac{5}{7} \operatorname{tg} \alpha + \frac{2}{7} \frac{r \Omega}{V \cos \alpha}, \quad \text{oder} \quad = \operatorname{tg} \alpha - \mu(1+e)$$

gegeben ist, je nachdem  $\mu$  grösser oder kleiner als

$$\frac{2}{7} \left[ \operatorname{tg} \alpha - \frac{r \Omega}{V \cos \alpha} \right] \frac{1}{1+e}$$

ist.

Beisp. 3. Eine Kugel vom Radius  $a$  rollt auf dem Boden mit der Geschwindigkeit  $U$  und stösst normal gegen eine verticale Wand, deren Reibungs- und Elasticitätscoefficienten  $\mu$  und  $e$  sind. Ist  $\mu(1+e) > \frac{2}{7}$ , so endigt das Gleiten vor dem Ende der Stossperiode und die Kugel prallt daher mit der horizontalen Geschwindigkeit  $-Ue$  und der verticalen  $\frac{2}{7}U$  ab, wie man findet, wenn man die Momente um den Berührungspunkt nimmt. Das Centrum der Kugel beschreibt darauf eine Parabel und die Kugel trifft später den Boden. Ist der Boden unelastisch und sein Reibungscoefficient  $\mu' < e + \frac{2}{7}$ , so hört das Gleiten nicht vor dem Ende des Stosses auf. Am Ende des Stosses hat das Centrum der Kugel die Geschwindigkeit  $-U(e - \frac{2}{7}\mu')$  und die Winkelgeschwindigkeit  $(2 - 5\mu') \frac{U}{7a}$ . Die Reibung fährt fort, als endliche Kraft zu wirken, so dass die Kugel schliesslich auf dem Boden mit der gleichförmigen Geschwindigkeit  $-\frac{5}{7}U(e - \frac{4}{35})$  rollt.

Beisp. 4. Eine dünne gleichförmige Schale von der Gestalt einer Halbkugel und dem Radius  $a$ , deren Basis vertical steht, rotirt mit der Winkelgeschwindigkeit  $\Omega$  um eine horizontale, durch ihren Schwerpunkt gehende und der Basis parallele Axe. Sie wird mit einem Punkt ihrer Basis in Berührung mit einer

festen, rauhen, horizontalen Ebene gebracht. Der Elasticitätscoefficient ist  $e$ ; der Reibungscoefficient grösser als 2. Man beweise, dass der Berührungspunkt der Schale mit der Ebene sich nach dem Zusammenstoss in verticaler Richtung mit der Geschwindigkeit  $\frac{5}{34}ae\Omega$  zu bewegen beginnt.

§ 198. Beisp. 1. Man zeige, dass der darstellende Punkt  $P$ , wenn er sich so, wie es oben beschrieben wurde, bewegt, die Linie der stärksten Compression kreuzen und dass die Abscisse  $R$  des Kreuzungspunktes positiv sein muss.

Beisp. 2. Man zeige, dass der Kegelschnitt, dessen Gleichung, auf die  $R$ - und  $F$ -Axe bezogen,  $aF^2 + 2bFR + a'R^2 = s$  ist, unter  $s$  eine Constante verstanden eine Ellipse ist und dass die Geraden keines Gleitens und stärkster Compression zu der  $F$ - bez.  $R$ -Axe conjugirten Durchmessern parallel sind. Man zeige auch, dass der Durchschnittspunkt der Geraden keines Gleitens und stärkster Compression in dem von den conjugirten Durchmessern gebildeten Winkel liegt welcher den ersten Quadranten enthält oder in diesem Quadranten enthalten ist.

Beisp. 3. Zwei Körper, von denen jeder um einen festen Punkt rotirt, stossen widereinander; man suche die Bewegung grade nach dem Stoss.

$G, G'$  in der Fig. auf S. 170 seien die festliegenden Punkte. Nimmt man die Momente um die festen Punkte, so kommt man nahezu zu denselben Resultaten wie in dem dort betrachteten Fall.

Beisp. 4. Man zeige, dass die bei dem Zusammenstoss zweier Körper verloren gehende lebendige Kraft aus einer der beiden Formeln

$$\begin{aligned} \text{verlorene lebendige Kraft} &= 2FS_0 + 2RC_0 - aF^2 - 2bFR - a'R^2 \\ &= \frac{(aC_0^2 - 2bS_0C_0 + a'S_0^2) - (aC^2 - 2bSC + a'S^2)}{aa' - b^2} \end{aligned}$$

gefunden werden kann, wenn man unter  $F, R$  die ganze zur Wirkung kommende Reibungs- bez. normal gerichtete Kraft und unter  $C_0, S_0, C, S$  die Anfangs- und Endwerthe der Compressions- bez. Gleitungsgeschwindigkeit versteht. Sind die Körper vollkommen rauh und unelastisch, so ist  $C$  sowohl als  $S$  Null.

## Anfangsbewegungen.

§ 199. Bruch einer Stütze. Ein System von Körpern befinde sich im Gleichgewicht und eine seiner Stützen gebe plötzlich nach. Man suche die Anfangsbewegungen der verschiedenen Körper und die Anfangswerthe der zwischen ihnen bestehenden Reactionen.

Das Problem, die Anfangsbewegung eines dynamischen System zu ermitteln, wird dadurch gelöst, dass man die Coordinaten der sich bewegenden materiellen Punkte in Potenzen der Zeit  $t$  entwickelt ( $x, y, \theta$ ) seien die Coordinaten eines Körpers des Systems. Der Kürze halber möge der Index Null die Anfangswerthe bezeichnen. So gebe  $\frac{d^2x}{dt^2}$  den Anfangswerth von  $\frac{d^2x}{dt^2}$  an. Nach Taylor's Theorem ist

$$x = a + \frac{d^2x_0}{dt^2} \cdot \frac{t^2}{2!} + \frac{d^3x_0}{dt^3} \cdot \frac{t^3}{3!} + \dots \quad (1)$$

worin  $\frac{dx_0}{dt}$  weggelassen wurde, weil der Voraussetzung nach das System vom Zustand der Ruhe ausgeht.

*Erstens. Man soll nur die Anfangswerthe der Reactionen finden.* Die dynamischen Gleichungen enthalten die Coordinaten, ihre zweiten Differentialquotienten in Bezug auf  $t$  und die unbekannten Reactionen. Es gibt so viele geometrische Gleichungen als Reactionen. Aus diesen sind die zweiten Differentialquotienten zu eliminiren und so die Reactionen zu ermitteln. Man verfährt ebenso, wie bei der ersten Lösungsmethode in § 135 und zwar auf folgende Art.

Man stelle die geometrischen Gleichungen auf, differenzire jede zweimal und vereinfache dann die Resultate dadurch, dass man für die Coordinaten ihre Anfangswerthe substituirt. So möge, wenn wir Cartesische Coordinaten gebrauchen,  $\varphi(x, y, \theta) = 0$  eine geometrische Beziehung ausdrücken; wir erhalten, weil  $\frac{dx_0}{dt} = 0$ ,  $\frac{dy_0}{dt} = 0$ ,  $\frac{d\theta_0}{dt} = 0$  sind,

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} \frac{d^2 x_0}{dt^2} + \frac{\partial \varphi}{\partial y} \frac{d^2 y_0}{dt^2} + \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} \frac{d^2 \theta_0}{dt^2} = 0.$$

Das Verfahren bei der Differentiation der Gleichungen kann manchmal sehr vereinfacht werden, wenn der Coordinatenanfang so gewählt wird, dass die Anfangswerthe wenigstens einiger Coordinaten Null werden. *Man kann dann die Gleichungen dadurch vereinfachen, dass man die Quadrate und Producte aller dieser Coordinaten vernachlässigt.* Denn, kommt z. B. das Glied  $x^2$  vor, so verschwindet sein zweiter Differentialquotient  $2 \left[ x \frac{d^2 x}{dt^2} + \left( \frac{dx}{dt} \right)^2 \right]$ , wenn der Anfangswerth von  $x$  Null ist.

Die geometrischen Gleichungen müssen unter der Voraussetzung aufgestellt werden, dass die Körper ihre *allgemeine* Lage haben, weil wir sie differenziren wollen. Bei den dynamischen Gleichungen ist dies aber nicht der Fall. Sie können unter der Annahme niedergeschrieben werden, dass jeder Körper seine *Anfangslage* habe. Man erhält diese Gleichungen nach den Regeln, die in § 135 gegeben wurden. Die dort für die Effectivkräfte gegebenen Formeln lassen bei unsrem Problem einige Vereinfachungen zu. So nehmen z. B., weil  $\frac{dr_0}{dt} = 0$  und  $\frac{d\varphi_0}{dt} = 0$  sind, die Beschleunigungen in der Richtung des Radius-vectors und senkrecht zu ihm die einfachen Formen an  $\frac{d^2 r_0}{dt^2}$  und  $r \frac{d^2 \varphi_0}{dt^2}$ . Ferner verschwindet die Beschleunigung  $\frac{v^2}{\rho}$  längs der Normalen. Wenn wir z. B. die Anfangsrichtung der Bewegung des Schwerpunktes eines der Körper kennen, so ist es von Vortheil, die Componenten in der Richtung der Normalen zur Bahn zu nehmen. Dies liefert eine Gleichung, die nur die gegebenen Kräfte und solche Spannungen oder Reactionen enthält, die an dem Körper wirken. Ist nur eine Reaction vorhanden, so reicht diese Gleichung aus, ihren Anfangswerth zu bestimmen.

Man kann die Regel kurz so fassen: Man stelle die geometrischen Gleichungen des Systems in seiner allgemeinen Lage auf, differenzire jede zweimal und vereinfache die Resultate dadurch, dass man statt der Coordinaten ihre Anfangswerthe setzt. Man stelle ferner die dynamischen Gleichungen des Systems unter der Annahme auf, dass es sich in seine Anfangslage befinde und eliminire die zweiten Differentialquotienten, wodurch man zu einer hinreichenden Anzahl von Gleichungen kommt, um die Anfangswerthe der Reactionen bestimmen zu können.

Man kann aus den Gleichungen auch die Werthe von  $\frac{d^2 x_0}{dt^2}$ ,  $\frac{d^2 y_0}{dt^2}$  ableiten und so durch ihre Substitution in die Gl. (1) die Anfangsbewegung bis zu den Gliedern finden, die von  $t^2$  abhängen.

§ 200. Zweitens. Man soll die Anfangsbewegung selbst finden. Bei der nun folgenden Untersuchung wollen wir die Differentialquotienten nach der Zeit der Kürze halber mit Accenten bezeichnen, so dass z. B.  $\frac{d^2 x}{dt^2}$  durch  $x''$  dargestellt wird. Wie viele Glieder der Reihe (1) man beibehalten muss, hängt von der Natur des Problems ab. Es werde z. B. der Krümmungsradius der von dem Schwerpunkt eines der Körper beschriebenen Bahn gesucht. Man hat

$$\varphi = \frac{(x'^2 + y'^2)^{\frac{3}{2}}}{x'y'' - y'x''}.$$

Setzt man  $u = x'y'' - y'x''$  und differenzirt, so erhält man

$$u' = x'y''' - y'x''' ,$$

$$u'' = x'y^{IV} - y'x^{IV} + x''y''' - y''x''' ,$$

$$u''' = x'y^V - y'y^V + 2(x''y^{IV} - y''x^{IV}).$$

Substituirt man in die Taylor'sche Entwicklung und beachtet, dass

$$x'_0 = 0, \quad y'_0 = 0$$

ist, so wird

$$x'y'' - y'x'' = \frac{1}{2}(x''_0 y'''_0 - x'''_0 y''_0) t^2 + \frac{1}{3}(x''_0 y_0^{IV} - x_0^{IV} y''_0) t^3 + \dots$$

und ähnlich

$$(x'^2 + y'^2)^{\frac{3}{2}} = (x_0''^2 + y_0''^2)^{\frac{3}{2}} t^3 + \dots$$

Wenn nun der Körper vom Zustand der Ruhe ausgeht, so ist der Krümmungsradius Null. Ist aber

$$x_0'' y_0''' - x_0''' y_0'' = 0,$$

so ist die Richtung der Beschleunigung für den Augenblick stationär. Es ist dann

$$\varphi = 3 \frac{(x_0''^2 + y_0''^2)^{\frac{3}{2}}}{x_0'' y_0^{IV} - x_0^{IV} y_0''}.$$

Um diese Differentialquotienten zu ermitteln, kann man so verfahren. Man differenzire jede dynamische Gleichung zweimal und reducire sie dann auf ihre Anfangsform, indem man für  $x, y, \theta$ , etc. ihre Anfangswerthe und  $x', y', \theta'$  gleich Null setzt. Man differenzire jede geometrische Gleichung einmal und reducire sie dann ebenso auf ihre Anfangsform. Man erhält auf diese Art genug Gleichungen zur Bestimmung von  $x_0'', x_0''', x_0^{IV}$ , etc.,  $R_0, R_0', R_0''$ , etc., wenn  $R$  eine der unbekannten Reactionen ist. Oft ist es vortheilhaft, die unbekannten Reactionen aus den Gleichungen zu eliminiren, *ehe* man differenzirt. Alsdann kommen nur die unbekannten Differentialquotienten  $x_0'', x_0'''$ , etc. in den Gleichungen vor.

Diese Operationen lassen sich im Allgemeinen durch einige einfache Betrachtungen sehr abkürzen. Eine dynamische Gleichung sei von der Form

$$Lx'' + My'' + N\theta'' + P = 0,$$

worin  $L, M, N, P$  Functionen nur von  $x, y, \theta$  sind. Durch zweimalige Differentiation erhält man, wenn  $x_0' = 0, y_0' = 0, \theta_0' = 0$  gesetzt wird,

$$Lx_0^{IV} + My_0^{IV} + N\theta_0^{IV} + \Delta(Lx_0'' + My_0'' + N\theta_0'' + P) = 0,$$

worin  $\Delta = x_0'' \frac{\partial}{\partial x} + y_0'' \frac{\partial}{\partial y} + \theta_0'' \frac{\partial}{\partial \theta}$  ist.

Setzt man  $x = x_0 + \xi, y = y_0 + \eta$ , etc., so dass also  $\xi, \eta$ , etc. kleine Grössen sind, so ist leicht ersichtlich, dass alle Glieder in  $L, M$ , etc., welche  $\xi^2, \eta^2$ , etc. enthalten, aus der Endgleichung verschwinden. Sind daher  $x_0^{IV}, y_0^{IV}, \theta_0^{IV}$  zu ermitteln und werden zu diesem Zweck die dynamischen Gleichungen differenzirt, so brauchen die Coefficienten  $L, M$ , etc. nur bis zur ersten Potenz der kleinen Grössen  $\xi, \eta$ , etc. genau zu sein.

Auf dieselbe Art findet man, dass sich eine geometrische Gleichung wie  $\varphi(x, y, \theta) = 0$  auf die Differentialgleichung vierter Ordnung

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} x_0^{IV} + \frac{\partial \varphi}{\partial y} y_0^{IV} + \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} \theta_0^{IV} + 3\Delta^2 \varphi = 0$$

reducirt. Es brauchen daher die geometrischen Gleichungen nur bis zur zweiten Potenz der kleinen Grössen genau zu sein. Ebenso müssen, wenn wir die Anfangswerthe der sechsten Differentialquotienten suchen, die dynamischen Gleichungen bis zur zweiten, die geometrischen bis zur dritten Potenz dieser Grössen genau sein.

Wir werden später sehen, dass sich diese Anfangsdifferentialquotienten leichter aus den Lagrange'schen Gleichungen ableiten lassen.

Wenn die Richtung der Bewegung eines der in Betracht kommenden Schwerpunkte bekannt ist, so kann man die Tangente an seine Bahn zur  $y$ -Axe nehmen. Alsdann ist  $\varphi = y^2/2x$ , worin  $x$  eine kleine Grösse zweiter und  $y$  erster Ordnung ist. Man kann daher die Quadrate von  $x$  und die dritten Potenzen von  $y$  vernachlässigen. Dadurch verein-



Beisp. 6. Ein Massenpunkt ist mittelst dreier gleicher Stricke von der Länge  $a$  an drei Punkten aufgehängt, die ein gleichseitiges Dreieck, dessen Seiten  $2b$  ist, in einer horizontalen Ebene bilden. Wenn ein Strick durchschnitten wird, so ändert sich die Spannung eines jeden der andern sofort in dem Verhältniss  $\frac{3a^2 - 4b^2}{2(a^2 - b^2)}$ . [Coll. Ex.]

Beisp. 7. Eine Kugel, die auf einer rauhen horizontalen Ebene ruht, wird in eine unendlich grosse Anzahl von halbkreisförmigen Scheiben zerschnitten, welche durch einen Faden wieder zusammengebunden sind. Dabei steht der Durchmesser der Kugel, durch welchen die ebenen Flächen der Scheiben gehen, vertical. Man zeige, dass, wenn der Faden durchschnitten wird, der Druck auf die Ebene sich sofort in dem Verhältniss  $\frac{45\pi^2}{2048}$  vermindert. [Emm. Coll. 1871.]

Beisp. 8. Eine glatte Kugel ruht auf einer horizontalen Ebene und eine gleiche Kugel ist so gegen sie gestützt, dass die Verbindungslinie der Mittelpunkte den Winkel  $\varphi$  mit der Verticalen macht. Man beweise, dass grade nach der Entfernung der Stützen das Verhältniss des Drucks auf die Ebene zu dem Druck zwischen den Kugeln  $2 : \cos \varphi$  ist. [Coll. Ex.]

Beisp. 9. Ein Stab von der Masse  $m$  und Länge  $2a$ , der sich um sein eines Ende als festen Punkt drehen kann, wird durch einen kleinen Ring von der Masse  $p$  gesteckt. Das System geht vom Zustand der Ruhe aus, wobei der Stab horizontal ist und der Ring den Abstand  $c$  vom festen Punkt hat. Man zeige, dass die Polarcoordinaten des Ringes auf den festen Punkt bezogen  $c + \frac{d^4 r_0}{dt^4} \frac{t^4}{24}$  und  $\frac{d^2 \theta_0}{dt^2} \frac{t^2}{2}$  sind. Man bestimme auch  $\frac{d^2 \theta_0}{dt^2}$  und beweise, dass  $\frac{d^4 r_0}{dt^4} = g \frac{d^2 \theta_0}{dt^2} + 2c \left( \frac{d^2 \theta_0}{dt^2} \right)^2$  ist. Daraus leite man den Anfangskrümmungsradius der Bahn des Massenpunktes ab. [May Ex. 1888.]

Beisp. 10. Eine massive Halbkugel von der Masse  $M$  ruht auf einer vollkommen rauhen horizontalen Ebene und ein Punkt von der Masse  $m$  wird vorsichtig in dem Abstand  $c$  vom Centrum auf sie gelegt. Man beweise, dass der Anfangskrümmungsradius der von dem Punkt beschriebenen Bahn  $\frac{3mc^3}{Mk^2}$  ist, wenn man mit  $k$  den Trägheitsradius der Halbkugel in Bezug auf eine Tangente an ihren Scheitelpunkt bezeichnet. [Math. Tripos, 1888.]

Beisp. 11. Eine Gartenwalze ruht auf einer horizontalen Ebene, die rauh genug ist, um Gleiten zu verhindern und der Griff wird so gehalten, dass die Ebene durch die Axe des Cylinders und den Schwerpunkt  $G$  des Griffes den Winkel  $\alpha$  mit dem Horizont macht. Der Griff wird losgelassen; man zeige, dass der Anfangskrümmungsradius der von  $G$  beschriebenen Bahn  $\frac{c(\sin^2 \alpha + n \cos^2 \alpha)^{\frac{3}{2}}}{n}$  ist, worin  $(n-1)M(k^2 + a^2) = ma^2$ . Dabei ist  $c$  der Abstand des Punktes  $G$  von der Axe des Cylinders,  $m$  die Masse des Griffes,  $Mk^2$  das Trägheitsmoment des Cylinders für seine Axe und  $\alpha$  sein Radius. [Math. Tripos, 1894.]

## Relative Bewegung oder sich bewegende Axen.

§ 203. Bei vielen dynamischen Problemen hat man nur die relative Bewegung der verschiedenen Körper des Systems zu finden. In solchen Fällen ist es von Vortheil, wenn man sie bestimmen kann, ohne vorher

die absolute Bewegung eines jeden Körpers im Raum ermittelt zu haben. Nehmen wir an, die relative Bewegung in Bezug auf einen Körper (A) werde gesucht, so sind zwei Fälle zu unterscheiden: 1) der Körper (A) hat nur eine Translationsbewegung; 2) er hat nur eine Rotationsbewegung. Hat er beide, sowohl Translations- als Rotationsbewegung, so lässt sich dies als eine Combination der beiden Fälle ansehen. Wir wollen sie die Reihe nach betrachten.

§ 204. **Der Fundamentalsatz.** Es möge die relative Bewegung eines dynamischen Systems in Bezug auf einen sich bewegenden Punkt  $C$  zu ermitteln sein. Man kann offenbar  $C$  zur Ruhe bringen, wenn man an jedem Element des Systems eine Beschleunigung anbringt, die derjenigen von  $C$  gleich und entgegengesetzt ist. Man muss ferner annehmen, dass eine Anfangsgeschwindigkeit, die der von  $C$  gleich und entgegengesetzt ist, jedem Element ertheilt worden ist.

$f$  sei die Beschleunigung von  $C$  zur Zeit  $t$ . Wenn an jedem materiellen Punkt  $m$  eines Körpers dieselbe beschleunigende Kraft  $f$  einer gegebenen Richtung parallel angreift, so sind diese Kräfte zusammengenommen offenbar einer Kraft  $f\Sigma m$  äquivalent, die am Schwerpunkt angreift. Wenn man daher den Punkt  $C$  eines Systems zur Ruhe bringen will, so reicht es aus, an dem Schwerpunkt eines jeden Körpers in einer der Beschleunigungsrichtung von  $C$  entgegengesetzten Richtung eine durch  $Mf$  gemessene Kraft anzubringen, wenn  $M$  die Masse des Körpers und  $f$  die Beschleunigung von  $C$  bedeutet.

Der Punkt  $C$  kann nun zum Anfangspunkt der Coordinaten genommen werden und man kann auch die Momente um ihn nehmen, grade als wäre er ein im Raum festliegender Punkt.

Die Gleichung für die Momente wollen wir etwas genauer untersuchen.  $(r, \theta)$  seien die Polarcoordinaten eines Elements eines Körpers von der Masse  $m$ , auf  $C$  als Coordinatenanfang bezogen. Die Beschleunigungen des Punktes in der Richtung des Radiusvectors  $r$  und senkrecht zu ihm sind  $\frac{d^2 r}{dt^2} - r\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2$  und  $\frac{1}{r}\frac{d}{dt}\left(r^2\frac{d\theta}{dt}\right)$ . Nimmt man die Momente um  $C$ , so erhält man

$$\Sigma m \frac{d}{dt}\left(r^2 \frac{d\theta}{dt}\right) = \begin{cases} \text{dem Moment der gegebenen Kräfte um } C \text{ plus dem} \\ \text{Moment um } C \text{ der umgekehrten am Schwer-} \\ \text{punkt, wie wir annehmen, angreifenden Effectiv-} \\ \text{kräfte von } C. \end{cases}$$

Liegt der Punkt  $C$  im Körper fest und bewegt sich mit ihm, so ist  $\frac{d\theta}{dt}$  für jedes Element des Körpers dasselbe und, wie in § 88, ist

$$\Sigma m \frac{d}{dt}\left(r^2 \frac{d\theta}{dt}\right) = Mk^2 \frac{d^2 \theta}{dt^2}.$$

§ 205. Aus der allgemeinen Gleichung für die Momente um einen in Bewegung befindlichen Punkt  $C$  folgt, dass man die Gleichung

$$\frac{d\omega}{dt} = \frac{\text{Moment der Kräfte um } C}{\text{Trägheitsmoment für } C}$$

in den folgenden Fällen benutzen kann:

*Erstens*, wenn der Punkt  $C$  sowohl im Körper als im Raum festliegt oder im Körper festliegend sich im Raum mit gleichförmiger Geschwindigkeit bewegt, weil dann die Beschleunigung von  $C$  Null ist;

*zweitens*, wenn der Punkt  $C$  der Schwerpunkt ist, denn alsdann ist zwar die Beschleunigung nicht Null, aber das Moment verschwindet;

*drittens*, wenn der Punkt  $C$  das Momentancentrum und die Bewegung eine kleine Schwingung oder eine Anfangsbewegung ist, die vom Zustand der Ruhe ausgeht. Zur Zeit  $t$  dreht sich der Körper um  $C$ ; die Geschwindigkeit von  $C$  ist daher Null. Zur Zeit  $t + dt$  dreht sich der Körper um einen andern sehr nahe bei  $C$  liegenden Punkt  $C'$ . Es sei  $CC' = d\sigma$ , die Geschwindigkeit von  $C$  ist dann  $\omega d\sigma$ . In der Zeit  $dt$  ist daher die Geschwindigkeit von  $C$  von Null auf  $\omega d\sigma$  gewachsen, seine Beschleunigung ist folglich  $\omega \frac{d\sigma}{dt}$ . Um die genaue Gleichung der Momente um  $C$  zu erhalten, muss man die Effectivkraft  $\Sigma m \cdot \omega \frac{d\sigma}{dt}$  in der umgekehrten Richtung am Schwerpunkt anbringen.

Bei kleinen Schwingungen sind aber  $\omega$  sowohl als  $\frac{d\sigma}{dt}$  kleine Grössen, deren Quadrate und Producte vernachlässigt werden dürfen und bei einer Anfangsbewegung ist  $\omega$  Null. Das Moment dieser Kraft ist daher wegzulassen und die Bewegungsgleichung ist dieselbe, wie wenn  $C$  ein festliegender Punkt wäre.

Es ist zu beachten, dass man die Momente um jeden dem Momentancentrum sehr nahe liegenden Punkt nehmen kann; doch wird es in der Regel vortheilhafter sein, sie um das Centrum in seiner gestörten Lage zu nehmen, weil alsdann die Momente irgend welcher an dem Rotationscentrum etwa vorhandener Reactionen verschwinden.

§ 206. Wird die genaue Momentengleichung um das Momentancentrum verlangt, so kann man auf folgende Art verfahren. Ist  $L$  das Moment der gegebenen Kräfte um das Momentancentrum,  $G$  der Schwerpunkt,  $r$  der Abstand des Schwerpunkts vom Momentancentrum  $C$ ,  $M$  die Masse des Körpers, so ist das Moment der gegebenen Kräfte und der umgekehrten Effectivkräfte um  $C$

$$L - M\omega \frac{d\sigma}{dt} \cdot r \cos GC C.$$

Versteht man unter  $k$  den Trägheitsradius für den Schwerpunkt, so wird die Bewegungsgleichung

$$M(k^2 + r^2) \frac{d\omega}{dt} = L - M\omega r \frac{dr}{dt},$$

wenn man für  $\cos GC'C$  seinen Werth  $\frac{dr}{d\sigma}$  setzt.

§ 207. **Momentankräfte.** Das Verfahren in § 204 kann offenbar auch auf Stosskräfte angewandt werden. Man erhält so eine sehr einfache Lösung des in § 171 behandelten Problems.

*Ein Körper bewegt sich auf irgend eine Art; plötzlich wird der Punkt O des Körpers gezwungen, sich auf gegebene Weise zu bewegen; man soll die relative Bewegung in Bezug auf O finden.*

Um den Punkt O zur Ruhe zu bringen, muss man am Schwerpunkt G die Bewegungsgrösse  $Mf$  anbringen, wo unter  $f$  die Resultante aus der umgekehrten Geschwindigkeit von O nach dem Wechsel und der Geschwindigkeit von O vor dem Wechsel bedeutet. Sind  $\omega, \omega'$  die Winkelgeschwindigkeiten des Körpers vor und nach dem Wechsel, ist  $r = OG$  und nimmt man die Momente um O, so wird

$$(r^2 + k^2)(\omega' - \omega) = \text{dem Moment von } f \text{ um } O.$$

Nun ist das Moment um O einer Geschwindigkeit bei G dem Moment um G derselben an O angebrachten Geschwindigkeit gleich und entgegengesetzt. Sind daher  $L, L'$  die Momente um G der Geschwindigkeit von O grade vor und grade nach dem Wechsel und ist  $k$  der Trägheitsradius für den Schwerpunkt, so ist

$$\omega' - \omega = \frac{L' - L}{k^2 + r^2}.$$

§ 208. Beisp. 1. *Zwei schwere Punkte, deren Massen  $m$  und  $m'$  sind, werden durch einen unausdehnbaren Faden miteinander verbunden, der über die Schneide eines Keils von der Masse  $M$  geht, welcher sich auf einer glatten horizontalen Ebene frei bewegen kann. Man suche die Kraft, die auf den Keil wirken muss, damit das System sich im Zustand relativen Gleichgewichts befinde.*

Hier wird es das Beste sein, den Keil dadurch zur Ruhe zu bringen, dass man an jedem Massenpunkt die der Beschleunigung des Keils gleiche und entgegengesetzte Beschleunigung  $f$  angreifen lässt. Ist dies geschehen, so befindet sich das ganze System im Gleichgewicht. Ist  $F$  die gesuchte Kraft, so erhält man durch Zerlegung in horizontaler Richtung  $(M + m + m')f = F$ .

$\alpha, \alpha'$  seien die Neigungen der Seitenflächen des Keils gegen die Horizontale. An dem Punkt  $m$  greifen  $mg$  vertical und  $mf$  horizontal an. Die Spannung des Fadens ist daher  $m(g \sin \alpha + f \cos \alpha)$ . Nimmt man statt  $m$  den Punkt  $m'$ , so findet man als Spannung auch  $m'(g \sin \alpha' - f \cos \alpha')$ . Setzt man beide gleich, so ergibt sich

$$f = \frac{m' \sin \alpha' - m \sin \alpha}{m' \cos \alpha' + m \cos \alpha} g,$$

woraus dann  $F$  folgt.

§ 209. Beisp. 2. *Eine cylindrische Aushöhlung, deren Ausschnitt eine ovale Curve ist und deren Erzeugungslinien horizontal sind, wird in eine cubische Masse gemacht, die auf einer glatten horizontalen Ebene frei gleiten kann. Die Oberfläche der Höhlung ist vollkommen rau und eine Kugel ruht derart in ihr, dass die Verticalebene durch die Schwerpunkte der Masse und der Kugel auf den Erzeugenden des Cylinders senkrecht steht. Die Bewegungsgrösse  $B$  wird dem Würfel durch einen Stoss in dieser Verticalebene mitgetheilt. Man suche die relative Bewegung der Kugel in Bezug auf den Würfel und ermittle, welchen Werth die Stosskraft mindestens haben muss, wenn die Kugel die Wand der Höhlung nicht verlassen soll.*

Gleichzeitig mit dem Stoss  $B$  tritt auch eine Stossreibung zwischen dem Würfel und der Kugel auf.  $M, m$  seien die Massen des Würfels und der Kugel,  $a$  der Radius der Kugel,  $k$  ihr Trägheitsradius für einen Durchmesser.  $V_0$  sei die Anfangsgeschwindigkeit des Würfels,  $v_0$  die des Mittelpunktes der Kugel in Bezug auf den Würfel,  $\omega_0$  die Anfangswinkelgeschwindigkeit. Nimmt man die Horizontalcomponenten für das ganze System und die Momente für die Kugel allein um den Berührungspunkt, so erhält man

$$\left. \begin{aligned} m(v_0 + V_0) + MV_0 &= B \\ a(v_0 + V_0) + k^2\omega_0 &= 0 \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (1),$$

und da kein Gleiten stattfindet

$$v_0 - a\omega_0 = 0 \dots \dots \dots (2).$$

Um die nun folgende Bewegung zu finden, wollen wir annehmen,  $(x, y)$  seien die auf rechtwinklige an der cubischen Masse befestigte Axen bezogenen Coordinaten des Mittelpunktes der Kugel;  $x$  sei horizontal,  $y$  vertical. Ist nun die Gleichung der cylindrischen Höhlung gegeben, so ist  $y$  eine bekannte Function von  $x$ . Wenn  $\psi$  den Winkel bedeutet, den die Tangente an die Höhlung im Berührungspunkt der Kugel mit dem Horizont macht, so ist  $\operatorname{tg} \psi = \frac{dy}{dx}$ .

Ist ferner  $V$  die Geschwindigkeit der cubischen Masse, so folgt aus § 132

$$m\left(\frac{dx}{dt} + V\right) + MV = B \dots \dots \dots (3).$$

Wenn man unter  $T_0$  die anfängliche lebendige Kraft und unter  $y_0$  den Anfangswerth von  $y$  versteht, so ist nach der Gleichung der lebendigen Kraft

$$\frac{1}{2} m \left[ \left( \frac{dx}{dt} + V \right)^2 + \left( \frac{dy}{dt} \right)^2 + k^2 \omega^2 \right] + \frac{1}{2} M V^2 = T_0 - m g (y - y_0) \quad (4),$$

worin  $\omega$  die Winkelgeschwindigkeit der Kugel zur Zeit  $t$  bedeutet. Ist  $v$  die relative Geschwindigkeit des Mittelpunktes der Kugel in Bezug auf den Würfel, so ist, da kein Gleiten stattfindet,  $v = a\omega$ . Durch Elimination von  $V$  und  $\omega$  aus diesen Gleichungen findet man

$$\left( \frac{dx}{dt} \right)^2 \cdot \left[ (1 + \operatorname{tg}^2 \psi) \left( 1 + \frac{k^2}{a^2} \right) - \frac{m}{M + m} \right] = Cg - 2gy \dots \dots (5),$$

worin

$$Cg = \frac{B^2}{(M + m) \left[ M + (M + m) \frac{k^2}{a^2} \right]} + 2gy_0 \dots \dots (6).$$

Diese Gleichung gibt die Bewegung der Kugel in Bezug auf den Würfel an.

§ 210. Um den Druck auf den Würfel zu finden, wollen wir den Würfel zur Ruhe bringen.  $R$  sei der Normaldruck der Kugel auf den Würfel,  $F$  die Reibung positiv genommen in derselben Richtung wie der Bogen. Die ganze Effectivkraft am Würfel ist  $X = R \sin \psi + F \cos \psi$ . Nach § 204 muss man jedem Massenpunkt eine Beschleunigung  $\frac{X}{M}$  in der dieser Kraft entgegengesetzten Richtung mittheilen. An

der Kugel greift daher eine Kraft  $\frac{m}{M} X$  in horizontaler Richtung an, wozu dann noch die Reaction  $R$ , die Reibung  $F$  und ihr eignes Gewicht kommt. Nimmt man die Momente um ihren Mittelpunkt, so ist

$$mk^2 \frac{d\omega}{dt} = Fa \dots \dots \dots (7).$$

Die Componenten längs der Tangente an die Bahn geben

$$m \frac{dv}{dt} = -F - \frac{m}{M} X \cos \psi - mg \sin \psi \quad (8).$$

Da kein Gleiten stattfindet

$$v = a\omega \quad (9).$$

Differenzirt man (9) und substituirt aus (7) und (8), so folgt

$$F = -R \frac{\gamma \sin \psi \cos \psi}{1 + \gamma \cos^2 \psi} - mg \frac{k^2}{a^2 + k^2} \frac{\sin \psi}{1 + \gamma \cos^2 \psi} \quad (10),$$

worin  $\gamma = \frac{k^2}{a^2 + k^2} \frac{m}{M}$  ist. Aus den Componenten der am Mittelpunkt der Kugel angreifenden Kräfte in der Richtung der Normalen zur Bahn ergibt sich

$$\frac{mv^2}{\varrho} = R + \frac{m}{M} X \sin \psi - mg \cos \psi \quad (11),$$

unter  $\varrho$  den Krümmungsradius der Bahn verstanden. Setzt man für  $v^2$  seinen Werth aus der Gleichung (5) ein, der man die bequemere Gestalt

$$v^2 (1 - \beta \cos^2 \psi) = \frac{a^2}{a^2 + k^2} (C - 2y) g \quad (12)$$

geben kann, worin  $\beta = \frac{a^2}{a^2 + k^2} \frac{m}{M + m}$  ist, so erhält man zwei Gleichungen zur Ermittlung der Reactionen  $F$  und  $R$ .

Die Elimination von  $F$  gibt

$$C - 2y + \varrho \cos \psi \frac{1 - \beta \cos^2 \psi}{1 + \gamma \cos^2 \psi} \cdot \frac{\beta + \gamma}{\beta} = \frac{R}{mg} \varrho P \quad (13),$$

wobei  $P$  eine ziemlich complicirte Function von  $\psi$  ist, die man nicht immer nöthig hat. Es ist

$$P = \frac{(1 - \beta \cos^2 \psi)^2}{1 + \gamma \cos^2 \psi} \frac{\beta + \gamma}{\beta(1 - \beta)} \quad (14).$$

Man beachte, dass  $P$  nicht verschwinden kann, stets endlich und positiv ist, da  $\beta$  nothwendiger Weise kleiner als die Einheit ist.

Soll die Kugel den ganzen Weg um die Höhlung zurücklegen, so muss der in (12) gegebene Werth von  $v$  für alle  $y$  und  $\cos \psi$  reell bleiben. Der Werth von  $C$  in (6) muss daher grösser als der grösste Werth von  $2y$  sein. Ebenso muss  $R$  stets positiv bleiben, so dass die Werthe von  $\cos \psi$ , wie sie aus Gl. (13) folgen, für den Fall  $R = 0$  sämtlich imaginär oder numerisch grösser als die Einheit sind. Man beachte, dass, wenn  $C > 2y$  und  $\varrho$  stets positiv ist,  $R$  für keinen positiven Werth von  $\cos \psi$  verschwinden kann.

Hat die Gleichung (13) für  $R = 0$  zwei gleiche Wurzeln, die kleiner als die Einheit sind, so verschwindet der Druck auf die Höhlung, wechselt aber sein Vorzeichen nicht. In diesem Fall verlässt die Kugel die Wand der Höhlung an dem diesen Werth von  $\cos \psi$  entsprechenden Punkt nicht. Aus der Bedingung, dass die Wurzeln gleich sein sollen, ergibt sich

$$\frac{d}{d\psi} \left[ \varrho \cos \psi \frac{1 - \beta \cos^2 \psi}{1 + \gamma \cos^2 \psi} \right] = \frac{2\beta}{\beta + \gamma} \varrho \sin \psi \quad (15),$$

worin  $\varrho$  eine durch die Gleichung des Cylinders gegebene Function von  $\psi$  ist. Setzt man der Kürze halber  $\xi = \cos \psi$ , so reducirt sich die Gleichung auf

$$\frac{d\varrho}{d\psi} \xi (1 - \beta \xi^2) (1 + \gamma \xi^2) (\beta + \gamma) = \sin \psi [3\beta + \gamma - (3\beta^2 + \gamma^2) \xi^2 + \beta\gamma(\gamma - \beta) \xi^4] \quad (16).$$

Wenn für keinen andern reellen Werth von  $\cos \psi$  als diesen  $R$  in (13) verschwindet und sein Vorzeichen wechselt, wenn ferner  $C > 2y$  bleibt, so macht die Kugel gerade einen Umgang. Zu diesem Resultat kommt man auch auf anderm Weg. Wenn die Kugel gerade einen Umgang machen soll, so muss  $R$

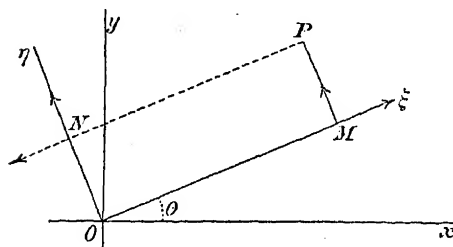
wobei man beachte, dass der Differentialquotient der rechten Seite Null ist mit Ausnahme einzelner Punkte, für welche etwa  $\varrho$  oder  $\frac{d\varrho}{d\psi}$  unendlich gross wird.

Man beachte auch, dass die Constante  $C$ , welche von den Anfangsbedingungen abhängt, verschwindet. Auf diese Art kommt man wieder zu der Gleichung (15).

Bemerkenswerth ist, dass der Punkt, an welchem der Druck verschwindet und ein Minimum wird, nur dann der höchste Punkt der Höhlung ist, wenn der Krümmungsradius  $\varrho$  daselbst ein Maximum oder Minimum ist. Dies folgt unmittelbar aus Gl. (16).

Um den Stoss  $B$  zu finden, der nöthig ist, damit die Kugel grade einen Umgang mache, muss man die Wurzeln der Gleichungen (13) und (16) untersuchen. Zu diesem Zweck zeichne man eine Curve, deren Abscissen  $\xi$  und Ordinaten  $\eta$  sind, unter  $\eta$  die linke Seite von Gl. (13) verstanden, von  $\xi=0$  bis  $\xi=-1$ . Die Curve kann Wellenlinien machen; die Maxima und Minima der Ordinaten ergeben sich aus (16). Soll die Kugel rund herum laufen, so muss der Werth von  $C$  derart sein, dass jede Ordinate zwischen  $\xi=0$  und  $\xi=-1$  positiv bleibt. Wir untersuchen daher die Wurzeln der Gl. (16) und wählen die Wurzel, welche  $\eta$  am kleinsten macht. Den Werth von  $C$  erhält man dann, indem man diesen Werth von  $\eta$  gleich Null setzt. Hat man so  $C$  gefunden, so folgt der Werth von  $B$  aus (6). Das Resultat ist selbstverständlich den oben erwähnten Einschränkungen unterworfen.

§ 211. **Sich bewegende Axen.** Zunächst wollen wir nun den Fall betrachten, in welchem die Bewegung auf zwei zu einander senkrechte



Gerade  $O\xi$ ,  $O\eta$  bezogen werden soll, die sich um den festliegenden Coordinatenanfang  $O$  mit der Winkelgeschwindigkeit  $\omega$  drehen.

$Ox$ ,  $Oy$  seien zu einander rechtwinklige festliegende Axen und der Winkel  $xO\xi = \theta$ .  $\xi = OM$ ,  $\eta = PM$  seien die Coordinaten eines Punktes  $P$ ;

$u$ ,  $v$  die Componenten der Geschwindigkeit und  $X$ ,  $Y$  die der Beschleunigung des Punktes  $P$  in den Richtungen  $O\xi$ ,  $O\eta$ .

Offenbar erhält man die Bewegung von  $P$  aus den Bewegungen der beiden Punkte  $M$ ,  $N$  durch einfache Addition. Die Componenten der Geschwindigkeit von  $M$  längs und senkrecht zu  $OM$  sind  $\frac{d\xi}{dt}$  bez.  $\xi\omega$ , und ebenso sind  $\frac{d\eta}{dt}$  bez.  $\eta\omega$  die Componenten der Geschwindigkeit von  $N$  längs und senkrecht zu  $ON$ . Addirt man sie mit den richtigen Vorzeichen, so erhält man

$$u = \frac{d\xi}{dt} - \eta\omega, \quad v = \frac{d\eta}{dt} + \xi\omega.$$

Da die Beschleunigung das Mass für die Geschwindigkeitszunahme ist, gerade wie die Geschwindigkeit das Mass für die räumliche

Entfernungszunahme, so erhalten wir die entsprechenden Formeln für  $X$ ,  $Y$ , indem wir  $u$ ,  $v$  statt  $x$ ,  $y$  schreiben, also

$$X = \frac{du}{dt} - v\omega, \quad Y = \frac{dv}{dt} + u\omega.$$

Durch Addition der Beschleunigungen von  $M$  und  $N$  findet man auf dieselbe Art:

$$X = \frac{d^2\xi}{dt^2} - \xi\omega^2 - \frac{1}{\eta} \frac{d}{dt} (\eta^2\omega),$$

$$Y = \frac{d^2\eta}{dt^2} - \eta\omega^2 + \frac{1}{\xi} \frac{d}{dt} (\xi^2\omega).$$

Durch Benutzung dieser Formeln statt  $\frac{d^2x}{dt^2}$  und  $\frac{d^2y}{dt^2}$  kann man die Bewegung auf die beweglichen Axen  $O\xi$ ,  $O\eta$  beziehen.

§ 212. Beisp. 1. Die Axen  $O\xi$ ,  $O\eta$  seien schiefwinklig und mögen den Winkel  $\alpha$  miteinander machen; man beweise, dass, wenn die Geschwindigkeit durch die beiden Componenten  $u$ ,  $v$  parallel den Axen dargestellt wird,

$$u = \frac{d\xi}{dt} - \omega\xi \cotg \alpha - \omega\eta \operatorname{cosec} \alpha,$$

$$v = \frac{d\eta}{dt} + \omega\eta \cotg \alpha + \omega\xi \operatorname{cosec} \alpha.$$

In diesem Fall ist  $PM$  parallel zu  $O\eta$ . Die Geschwindigkeiten von  $M$  und  $N$  sind dieselben wie zuvor. Ihre Resultante ist der Aufgabe nach die nämliche wie die von  $u$  und  $v$ . Sucht man die Componenten in irgend zwei Richtungen und setzt sie gleich, so erhält man zwei Gleichungen zur Ermittlung von  $u$  und  $v$ . Zu solchen Richtungen wählt man am besten die Lothe auf  $O\xi$  und  $O\eta$ , weil dann  $u$  in der einen und  $v$  in der andern Gleichung nicht auftritt.  $u$  und  $v$  kann man so jedes für sich finden, wenn man das andre nicht nöthig hat.

Beisp. 2. Die Beschleunigung werde durch ihre Componenten  $X$  und  $Y$  dargestellt; man beweise, dass

$$X = \frac{du}{dt} - \omega u \cotg \alpha - \omega v \operatorname{cosec} \alpha,$$

$$Y = \frac{dv}{dt} + \omega v \cotg \alpha + \omega u \operatorname{cosec} \alpha.$$

Man erhält diese Gleichungen auf dieselbe Art, wenn man die Geschwindigkeiten und Beschleunigungen senkrecht zu  $O\xi$  und  $O\eta$  zerlegt.

Beisp. 3.  $u$ ,  $v$  seien die Componenten der Geschwindigkeit eines Punktes  $P$  auf rechtwinklige mit der Winkelgeschwindigkeit  $\omega$  rotirende Axen bezogen; man beweise, dass der Krümmungsradius der Bahn von  $P$  im Raum durch die Gleichung

$$(u^2 + v^2)^{\frac{3}{2}}/\rho = u \frac{dv}{dt} - v \frac{du}{dt} + (u^2 + v^2) \omega$$

gegeben ist.

Nimmt man die festen Axen so an, dass sie einen Moment mit den sich bewegendenden Axen zusammenfallen, so ist die linke Seite der Gleichung

$$\frac{dx}{dt} \frac{d^2y}{dt^2} - \frac{d^2x}{dt^2} \frac{dy}{dt}.$$



Substituirt man  $\frac{dx}{dt} = u$ ,  $\frac{dy}{dt} = v$  und für  $\frac{d^2x}{dt^2} = X$ ,  $\frac{d^2y}{dt^2} = Y$  ihre oben gegebenen Werthe, so ergibt sich das Resultat sofort.

Der gewöhnliche Ausdruck für  $\varrho$  in Polarcordinaten folgt daraus, wenn man  $u = \frac{dr}{dt}$ ,  $v = r \frac{d\theta}{dt}$ ,  $w = \frac{d\theta}{dt}$  setzt. Ist  $\theta$  die unabhängige Variable, so wird  $\frac{d\theta}{dt} = 1$ .

Beisp. 4. Im Fall von Anfangsbewegungen, die vom Zustand der Ruhe ausgehen, wird der Ausdruck für  $\varrho$  in dem letzten Beispiel unbrauchbar. Man zeige, indem man wie in § 200 verfährt, dass  $\varrho$  nur dann einen von Null verschiedenen Werth haben kann, wenn  $\frac{du}{dt} \frac{d^2v}{dt^2} - \frac{d^2u}{dt^2} \frac{dv}{dt} + 2 \left[ \left( \frac{du}{dt} \right)^2 + \left( \frac{dv}{dt} \right)^2 \right] \omega = 0$  ist und dass in diesem Fall

$$\frac{\left[ \left( \frac{du}{dt} \right)^2 + \left( \frac{dv}{dt} \right)^2 \right]^{\frac{3}{2}}}{\varrho} = \frac{1}{3} \left( \frac{du}{dt} \frac{d^3v}{dt^3} - \frac{dv}{dt} \frac{d^3u}{dt^3} \right) + \left( \frac{du}{dt} \frac{d^2u}{dt^2} + \frac{dv}{dt} \frac{d^2v}{dt^2} \right) \omega + \left[ \left( \frac{du}{dt} \right)^2 + \left( \frac{dv}{dt} \right)^2 \right] \frac{d\omega}{dt},$$

worin  $\frac{du}{dt}$ ,  $\frac{d^2u}{dt^2}$ , etc.,  $\frac{dv}{dt}$ ,  $\frac{d^2v}{dt^2}$ , etc. ihre Anfangswerthe darstellen, indem der Kürze wegen eine Null an die Buchstaben  $u$  etc. nicht angehängt wurde.

§ 213. Beisp. Ein materieller Punkt bewegt sich unter der Wirkung beliebiger Kräfte auf einer glatten Curve, welche gezwungen ist, sich mit der Winkelgeschwindigkeit  $\omega$  um eine feste Axe zu drehen. Man finde die relative Bewegung in Bezug auf die Curve.

Wir wollen annehmen, die Bewegung fände in einem Raum von drei Dimensionen statt. Die  $Z$ -Axe sei die festliegende Axe und die  $\xi$  und  $\eta$ -Axen mögen bez. der Curve festliegend sein. Die Masse sei die Einheit der Masse. Die Bewegungsgleichungen sind dann

$$\left. \begin{aligned} \frac{d^2\xi}{dt^2} - \xi\omega^2 - \frac{1}{\eta} \frac{d}{dt}(\eta^2\omega) &= X + Rl \\ \frac{d^2\eta}{dt^2} - \eta\omega^2 + \frac{1}{\xi} \frac{d}{dt}(\xi^2\omega) &= Y + Rm \\ \frac{d^2z}{dt^2} &= Z + Rn \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (1),$$

worin  $X, Y, Z$  die Componenten der gegebenen beschleunigenden Kräfte in den Richtungen der Axen,  $R$  der Druck auf die Curve und  $(l, m, n)$  die Richtungs-cosinusse der Richtung von  $R$  sind. Da  $R$  senkrecht zur Curve wirkt, so ist

$$l \frac{d\xi}{ds} + m \frac{d\eta}{ds} + n \frac{dz}{ds} = 0.$$

Die sich bewegende Curve werde rechtwinklig auf die Ebene der  $\xi, \eta$  projectirt,  $\sigma$  sei der Bogen der Projection und  $v' = \frac{d\sigma}{dt}$  die Componente der Geschwindigkeit parallel zur Projectionsebene. Den Gleichungen kann man dann die Form geben:

$$\frac{d^2\xi}{dt^2} = X + \omega^2\xi + \frac{d\omega}{dt}\eta + 2\omega v' \frac{d\eta}{d\sigma} + Rl,$$

$$\frac{d^2\eta}{dt^2} = Y + \omega^2\eta - \frac{d\omega}{dt}\xi - 2\omega v' \frac{d\xi}{d\sigma} + Rm,$$

$$\frac{d^2z}{dt^2} = Z + Rn.$$

Die beiden Glieder  $2\omega v' \frac{d\eta}{d\sigma}$  und  $-2\omega v' \frac{d\xi}{d\sigma}$  sind die Componenten einer Kraft  $2\omega v'$ , deren Richtungscosinusse

$$l' = \frac{d\eta}{d\sigma}, \quad m' = -\frac{d\xi}{d\sigma}, \quad n' = 0$$

sind. Sie genügen der Gleichung  $l' \frac{d\xi}{d\sigma} + m' \frac{d\eta}{d\sigma} + n' \frac{dz}{d\sigma} = 0$ .

Die Kraft ist daher senkrecht zur Tangente an die Curve und senkrecht zur Rotationsaxe gerichtet.  $R'$  möge die Resultante der Reaction  $R$  und der Kraft  $2\omega v'$  sein.  $R'$  wirkt alsdann auch rechtwinklig zur Tangente; ( $l'$ ,  $m'$ ,  $n'$ ) mögen ihre Richtungscosinusse sein.

Die Bewegungsgleichungen erhalten mithin die Gestalt

$$\left. \begin{aligned} \frac{d^2\xi}{dt^2} &= X + \omega^2\xi + \frac{d\omega}{dt}\eta + R'l' \\ \frac{d^2\eta}{dt^2} &= Y + \omega^2\eta - \frac{d\omega}{dt}\xi + R'm'' \\ \frac{d^2z}{dt^2} &= Z + R'n'' \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (2).$$

Dies sind die Bewegungsgleichungen eines sich auf einer festen Curve bewegendem Massenpunktes, an dem ausser den gegebenen Kräften noch zwei andre Kräfte angreifen, nämlich (1) eine Kraft  $\omega^2 r$ , die grade von der Axe weg gerichtet ist, unter  $r$  den Abstand des Punktes von der Axe verstanden, und (2) eine Kraft  $\frac{d\omega}{dt} r$ , deren Richtung senkrecht zu der den Punkt und die Axe enthaltenden Ebene und der Richtung der Rotation der Curve entgegengesetzt ist.

Bei jedem speciellen Problem kann man daher die Curve so ansehen, als läge sie fest. Die Curve möge sich z. B. um die Axe mit gleichförmiger Winkelgeschwindigkeit drehen. Nimmt man dann die Componenten in der Richtung der Tangente, so ist

$$v \frac{dv}{ds} = X \frac{dx}{ds} + Y \frac{dy}{ds} + Z \frac{dz}{ds} + \omega^2 r \frac{dr}{ds},$$

worin  $r$  den Abstand des Massenpunktes von der Axe bedeutet.  $V$  sei der A fangswerth von  $v$ ,  $r_0$  der von  $r$ . Dann ist

$$v^2 - V^2 = 2 \int (Xdx + Ydy + Zdz) + \omega^2 (r^2 - r_0^2).$$

Ist  $v_0$  die Geschwindigkeit, die der Massenpunkt unter der Wirkung der selben Kräfte hätte, wenn die Curve festläge, so erhält man

$$v_0^2 - V^2 = 2 \int (Xdx + Ydy + Zdz)$$

und daraus

$$v^2 - v_0^2 = \omega^2 (r^2 - r_0^2).$$

Der Druck auf die sich bewegende Curve ist dem Druck auf die festliegende Curve nicht gleich. Da  $l' = d\eta/d\sigma$ ,  $m' = -d\xi/d\sigma$  ist, so wirkt die Kraft  $2\omega v'$  parallel zu dem Loth auf die projecirte Curve in einer Richtung, welche der Folge der Rotation  $\omega$  entgegengesetzt ist. Dreht man diese Kraft daher um,

ist der Druck  $R$  auf die bewegliche Curve die Resultante aus dem Druck  $R'$  auf die feste Curve und eines Drucks  $2\omega v$ , der senkrecht sowohl zur Curve als zur Axe wirkt, wobei der letztere in der Bewegungsrichtung der Curve positiv zu nehmen ist.

Nimmt man z. B. an, die Curve sei eben, bewege sich gleichmässig um eine zu ihrer Ebene senkrechte Axe und gegebene Kräfte seien nicht vorhanden, so ist, wenn man die Componenten in der Richtung der Normalen nimmt,

$$\frac{v^2}{\rho} = -\omega^2 r \sin \varphi + R',$$

worin  $\varphi$  den Winkel bedeutet, den  $r$  mit der Tangente macht. Daraus folgt, unter  $p$  das von der Axe auf die Tangente gefällte Loth verstanden,

$$R = \frac{v^2}{\rho} + \omega^2 p + 2\omega v.$$

Dieses Beispiel hätte man auch durch Cylinderkoordinaten in der Art leicht lösen können, dass man die feste Axe zur  $z$ -Axe genommen und die Projection auf die  $xy$ -Ebene auf Polarkoordinaten bezogen hätte. Diese Methode, das Problem zu behandeln, wird dem Leser zur Uebung überlassen.

Beisp. Ist  $\omega$  variabel, so erhält man

$$R = \frac{v^2}{\rho} + \omega^2 p + 2\omega v + \frac{d\omega}{dt} \sqrt{r^2 - p^2}.$$

### Beispiele

(den an der Universität und den Colleges gegebenen „Examination Papers“ entnommen).

1. Ein kreisförmiger Reif, dessen Gewicht  $n\omega$  ist, kann sich frei auf einer glatten horizontalen Ebene bewegen. Er trägt auf seinem Umfang einen kleinen Ring vom Gewicht  $\omega$  und der Reibungscoefficient zwischen beiden ist  $\mu$ . Anfangs befindet sich der Reif in Ruhe und hat der Ring eine Winkelgeschwindigkeit  $\omega$  um den Mittelpunkt des Reifen. Man zeige, dass der Ring nach der Zeit  $\frac{1 + n}{\mu \omega}$  auf dem Reifen zur Ruhe kommt.

2. Die Ebene eines schweren kreisförmigen Drahtes steht vertical und sein tiefster Punkt befindet sich in der Höhe  $h$  über einer horizontalen Ebene. Ein kleiner Ring wird von dem höchsten Punkt aus längs des Drahtes mit einer Winkelgeschwindigkeit um sein Centrum gleich  $\pi n \sqrt{\frac{2g}{h}}$  geworfen und zu gleicher Zeit der Draht losgelassen. Man zeige, dass der materielle Punkt grade  $n$  Umdrehungen gemacht hat, wenn der Draht die horizontale Ebene erreicht.

3. Ein Draht von der Gestalt eines Kreises kann sich in einer horizontalen Ebene um einen festen Punkt  $O$  seines Umfangs drehen und trägt eine kleine Kugel  $P$ , die anfänglich mit der gegebenen Geschwindigkeit  $V$  von dem entgegengesetzten Ende  $A$  des durch  $O$  gehenden Durchmessers aus geschleudert wurde. Die Masse des Drahtes ist doppelt so gross wie die des Kügelchens; man zeige, dass

$$(16a^4 + 4a^2r^2 - r^4) \left( \frac{d\varphi}{dt} \right)^2 = V^2 r^2,$$

worin

$$r = OP, \quad OA = 2a, \quad \varphi = \angle POA. \quad \S 147.$$

4. Zwei gleiche gleichförmige Stäbe von der Länge  $2a$ , die an ihrem einen Ende lose mit einander verbunden sind, werden symmetrisch auf eine feste glatte Kugel vom Radius  $\frac{1}{3}a\sqrt{2}$  gelegt, in die Höhe gehoben und derart in eine hori-

zontale Lage gebracht, dass das Gelenk die Kugel berührt. Man lässt sie unter der Wirkung der Schwere fallen; man zeige, wenn sie zum ersten Mal zur Ruhe kommen, dass sie den Winkel  $\arccos \frac{1}{3}$  mit dem Horizont machen; dass die Berührungspunkte mit der Kugel alsdann die Schwingungscentren der Stäbe bezüglich des Gelenkes sind; dass der Druck auf die Kugel an jedem Berührungspunkt ein Viertel des Gewichts eines jeden Stabes beträgt und dass kein Zwangszustand am Gelenk vorhanden ist. § 143.

5. Ein schwerer gleichförmiger Reif von der Gestalt eines Kreises, dem Radius  $a$  und der Masse  $2\pi am$ , der an einem Punkt vollständig gebrochen ist und dessen Ebene vertical steht, rollt mit gleichförmiger Winkelgeschwindigkeit  $\omega$  auf einer horizontalen Ebene. Man suche den Maximal- und Minimalwerth des Biegemoments an irgend einem Punkt  $Q$  des Reifens und beweise, dass, wenn  $\omega$  so gross ist, dass das Biegemoment niemals verschwindet, der grösste dieser Werthe  $2ma^2 \sin^2 \theta (a\omega^2 + g)$  ist, unter  $2\theta$  den Winkel verstanden, den  $Q$  und der Bruchpunkt am Centrum des Reifens bestimmen.

6. Die Enden zweier graden gleichen und gleichförmigen Stäbe sind durch zwei Stricke von gleicher Länge  $a$  so verbunden, dass das Ganze ein Parallelogramm bildet. Ein Stab wird an seinem Mittelpunkt durch eine feste Axe gestützt, um welche er sich frei bewegen kann und diese Axe steht senkrecht auf der Ebene der Bewegung, die vertical ist. Man zeige, dass der Mittelpunkt des unteren Stabes auf dieselbe Art, wie ein einfaches Pendel von der Länge  $a$  schwingt und dass die Winkelbewegung der Stäbe von dieser Schwingung nicht abhängt.

7. Ein dünner Strick ist an zwei Punkte  $A, B$  in derselben horizontalen Ebene befestigt und trägt an seinem Mittelpunkt das Gewicht  $W$ . Ein Stab von der Länge  $AB$  und dem Gewicht  $W$  hat an jedem Ende einen Ring, durch welchen der Strick hindurchgeht, und wird aus der Lage  $AB$  fallen gelassen. Man zeige, dass der Strick wenigstens die Länge  $\frac{5}{3}AB$  haben muss, wenn das Gewicht den Stab je erreichen soll. § 143.

Wenn das System sich im Gleichgewicht befindet und das Gewicht ein wenig, vertical verschoben wird, so beträgt die Dauer seiner kleinen Schwingungen

$$3\pi \left( \frac{AB}{3g\sqrt{3}} \right)^{\frac{1}{2}}.$$

8. Ein feiner Zwirn ist in einer glatten kreisförmigen Röhre eingeschlossen welche frei um einen verticalen Durchmesser rotirt; man beweise, dass die Neigung ( $\theta$ ) des Durchmessers durch den Schwerpunkt des Fadens gegen die Verticale in der Lage relativen Gleichgewichts durch die Gleichung  $\cos \theta = \frac{g}{a\omega^2 \cos \beta}$  gegeben ist, worin  $\omega$  die Winkelgeschwindigkeit der Röhre,  $a$  ihr Radius und  $2a\beta$  die Länge des Fadens bedeutet. Man erkläre den Fall, in welchem der Werth von  $a\omega^2 \cos \beta$  zwischen  $g$  und  $-g$  liegt.

9. Ein glatter Draht ohne Trägheit ist wie eine Schraubenlinie gebogen und kann sich um eine verticale Axe drehen, die mit einer Erzeugenden des Cylinders, auf dem die Schraubenlinie aufgetragen ist, zusammenfällt. Ein kleiner schwerer Ring gleitet die Schraubenlinie hinab, indem er von einem Punkt ausgeht, in dem diese verticale Axe die Schraubenlinie trifft; man beweise, dass die Winkelgeschwindigkeit der Schraubenlinie ein Maximum wird, wenn sie sich um den durch die Gleichung  $\cos^2 \theta + \tan^2 \alpha + \theta \sin 2\theta = 0$  gegebenen Winkel  $\theta$  gedreht hat, unter  $\alpha$  die Neigung der Schraubenlinie gegen den Horizont verstanden. [Die Masse der Schraubenlinie ist als Null anzusehen.]

10. Eine kugelförmige Höhlung vom Radius  $a$  wird in einen gläsernen Würfel von der Masse  $M$  gemacht und ein Punkt von der Masse  $m$  hineingelegt. Der Würfel wird dann auf einer glatten horizontalen Ebene mit der Geschwindigkeit  $V$  so in Bewegung gesetzt, dass der materielle Punkt grade um die Kugel herum läuft und dabei in Berührung mit ihr bleibt. Man beweise, dass

$$V^2 = 5ag + 4ag \frac{m}{M}.$$

11. Ein vollkommen rauher Ball wird in eine hohle cylindrische Gartenwalze auf ihren tiefsten Punkt gelegt und die Walze dann einen horizontalen Weg entlang mit der gleichförmigen Geschwindigkeit  $V$  gezogen. Man zeige, dass der Ball ganz um das Innere der Walze herumrollt, wenn  $V^2$  grösser als  $\frac{27}{7}g(b-a)$  ist, unter  $a$  den Radius des Balls und unter  $b$  den der Walze verstanden.

12.  $AB$ ,  $BC$  sind zwei gleiche gleichförmige Stäbe, die bei  $B$  lose durch ein Gelenk verbunden sind und sich mit derselben Geschwindigkeit in einer zu ihrer Länge senkrechten Richtung bewegen; das Ende  $A$  wird plötzlich festgehalten; man zeige, dass die Anfangswinkelgeschwindigkeit von  $AB$  dreimal so gross als die von  $BC$  ist. Man zeige auch, dass bei der nachfolgenden Bewegung der Stäbe der grösste Winkel, den sie miteinander machen,  $\arccos \frac{2}{3}$  ist, und dass, wenn sie das nächste Mal eine grade Linie bilden, die Winkelgeschwindigkeit von  $BC$  neunmal so gross als die von  $AB$  ist. §§ 169, 147.

13. Drei gleiche schwere gleichförmige Balken, die durch Gelenke miteinander verbunden sind, werden so auf einen glatten Tisch gelegt, dass sie eine grade Linie bilden, und dem mittleren Balken wird in seinem Mittelpunkt ein bestimmter horizontaler Stoss senkrecht zu seiner Länge gegeben; man zeige, dass der momentane Stoss auf jeden der andern Balken ein Sechstel des gegebenen Stosses ist.

14. Drei Balken von gleichem Material sind so verbunden, dass sie einen einzigen Balken bilden, und werden auf einen glatten horizontalen Tisch gelegt. Die beiden äusseren Balken sind gleich lang und einer von ihnen erhält auf sein freies Ende einen Schlag, der senkrecht zu seiner Länge gerichtet ist. Man bestimme die Länge des mittleren Balkens, wenn der andre äussere Balken die grösstmögliche Winkelgeschwindigkeit erhalten soll.

Resultat. Ist  $m$  die Masse eines jeden Endbalkens,  $\beta m$  die des inneren,  $P$  die Bewegungsgrösse des Schlags,  $\omega$  die dem dritten Balken mitgetheilte Winkelgeschwindigkeit, so ist  $m\alpha\omega\left(\frac{1}{\beta} + \frac{8}{3} + \frac{4\beta}{3}\right) = P$ , woraus sich ergibt, dass  $\beta = \frac{1}{2}\sqrt{3}$ , wenn  $\omega$  ein Maximum ist.

15. Zwei raue Stäbe  $A$ ,  $B$  werden parallel zu einander auf dieselbe horizontale Ebene gelegt. Ein dritter rauher Stab  $C$  wird rechtwinklig so über sie gelegt, dass sein Schwerpunkt in die Mitte zwischen sie fällt.  $C$  wird um den Winkel  $\alpha$  in die Höhe gehoben und fallen gelassen; man bestimme die Bedingungen, unter welchen er Schwingungen macht und zeige, dass, wenn seine Länge dem doppelten Abstand zwischen  $A$  und  $B$  gleichkommt, der Winkel  $\theta$ , um den er sich bei der  $n^{\text{ten}}$  Schwingung erhebt, durch die Gleichung

$$\sin \theta = \left(\frac{1}{7}\right)^{2n} \cdot \sin \alpha$$

gegeben ist.

16. Die Ecken  $A$ ,  $B$  einer schweren rechteckigen Lamelle  $ABCD$  können sich auf zwei glatten festen Drähten  $OA$ ,  $OB$  bewegen, die rechte Winkel mit-

einander machen, in einer verticalen Ebene liegen und die gleiche Neigung gegen die Verticale haben. Die Lamelle befindet sich im Gleichgewicht, wobei  $AB$  horizontal ist; man finde die Geschwindigkeit ihres Schwerpunkts und die Winkelgeschwindigkeit, die durch einen in der Richtung der unteren Kante  $CD$  erfolgenden Stoss hervorgerufen werden. Gegeben ist  $AB = 2a$ ,  $BC = 4a$ ; man beweise, dass  $AB$  grade so hoch steigt, dass es mit dem einen Draht zusammenfällt, wenn der Stoss derart ist, dass er einer der Lamelle gleichen Masse eine Geschwindigkeit mittheilen würde, deren Quadrat  $\frac{8}{9}ga(2 - \sqrt{2})$  ist. Man finde auch die Stosskräfte bei  $A$  und  $B$ .

17. Ein Ball, der sich um eine verticale Axe dreht, bewegt sich auf einem glatten Tisch und trifft direct gegen eine vollkommen rauhe verticale Bande man zeige, dass die lebendige Kraft des Balles sich in dem Verhältniss

$$10 + 14 \operatorname{tg}^2 \theta : \frac{10}{e^2} + 49 \operatorname{tg}^2 \theta$$

vermindert, wo  $e$  die Elasticität des Balles und  $\theta$  der Abprallwinkel ist.

18. Ein Rhombus besteht aus vier starren gleichförmigen Stäben, von denen jeder die Länge  $2a$  hat und die sich um Gelenke an ihren Enden frei bewegen können. Wenn der Rhombus auf einen glatten horizontalen Tisch gelegt wird und einer der Stäbe einen Stoss rechtwinklig zu seiner Richtung erhält, so beginnt der Rhombus sich wie ein starrer Körper zu bewegen, wenn der Stoss einen Punkt trifft, der um  $a(1 - \cos \alpha)$  von dem Scheitelpunkt eines spitzen Winkels entfernt ist, wobei  $\alpha$  der spitze Winkel ist

19. Ein Rechteck wird aus vier gleichförmigen Stäben von der Länge  $2a$  bez.  $2b$  hergestellt, die an ihren Enden durch Gelenke verbunden sind. Das Rechteck rotirt auf einer glatten horizontalen Ebene um sein Centrum mit der Winkelgeschwindigkeit  $n$ ; plötzlich wird ein Punkt in einer der Seiten von der Länge  $2a$  festgehalten. Man zeige, dass die Winkelgeschwindigkeit der Seiten von der Länge  $2b$  sofort  $\frac{3a+b}{6a+4b}n$  wird. Man suche auch die Aenderung in der Winkelgeschwindigkeit der andern Seiten und die Stossaction an dem Punkt, der festgelegt wird.

20. Drei gleiche gleichförmige unelastische Stäbe, die durch Gelenke lose miteinander verbunden sind, werden in einer Geraden auf einen glatten horizontalen Tisch gelegt und die beiden äusseren mit gleichen Winkelgeschwindigkeiten um die Enden des mittleren (1) in derselben Richtung, (2) in entgegengesetzten Richtungen in Rotation gesetzt. Man beweise, dass in dem ersten Fall, wenn die äusseren Stäbe den grössten Winkel mit dem nach beiden Seiten verlängert gedachten mittleren machen, die gemeinsame Winkelgeschwindigkeit aller drei  $\frac{4}{7}\omega$  ist, und dass im zweiten Fall nach dem Zusammenstoss der beiden äusseren Stäbe das von ihnen gebildete Dreieck sich mit der gleichförmigen Geschwindigkeit  $\frac{2}{3}a\omega$  bewegt, wenn  $2a$  die Länge eines jeden Stabes ist.

21. Ein gleichseitiges, aus drei gleichen schweren gleichförmigen, an ihren Enden durch Gelenke verbundenen Stäben von der Länge  $a$  gebildetes Dreieck wird in einer verticalen Ebene so gehalten, dass eine Seite horizontal liegt, und die gegenüberliegende Ecke nach unten gerichtet ist. Nachdem es irgend eine Höhe durchfallen hat, wird der Mittelpunkt des oberen Stabs plötzlich angehalten; man zeige, dass die Stosswirkungen an den oberen und dem unteren Gelenk in dem Verhältniss  $\sqrt{13}:1$  stehen. Würde das untere Gelenk eben brechen, wenn das System die Höhe  $\frac{8a}{\sqrt{3}}$  durchfallen hat, so betrüge die Schwingungsamplitude der

$\frac{32a}{\sqrt{3}}$  herabgefallen ist.

22. Ein vollkommen rauher und starrer Reif rollt eine schiefe Ebene hinab und stösst auf ein Hinderniss in der Gestalt eines Nagels. Man zeige, dass, wenn der Radius des Reifens  $r$ , die Höhe des Nagels über der Ebene  $\frac{1}{2}r$  und die Geschwindigkeit grade vor dem Stoss  $V$  ist, der Reif über den Nagel springt, falls  $V^2 > \frac{16}{9}gr \left[ 1 - \sin \left( \alpha + \frac{1}{6}\pi \right) \right]$  ist, unter  $\alpha$  die Neigung der Ebene gegen den Horizont verstanden. Man zeige, dass der Reif nicht in Berührung mit dem Nagel bleibt, wenn  $V^2 \geq \frac{16}{9}gr \cdot \sin \left( \alpha + \frac{1}{6}\pi \right)$  und geschieht es doch, dass der Reif den Nagel verlässt, wenn der Durchmesser durch den Berührungspunkt mit dem Horizont einen Winkel macht, dessen Sinus  $\frac{9}{32} \frac{V^2}{gr} + \frac{1}{2} \sin \left( \alpha + \frac{\pi}{6} \right)$  ist.

23. Eine flache kreisförmige Scheibe vom Radius  $a$  wird auf einem rauhen horizontalen Tisch fortgestossen, welcher derart ist, dass die Reibung an einem Element  $cV^3m\alpha$  beträgt, wenn man unter  $\alpha$  das Element, unter  $V$  die Geschwindigkeit des Elements und unter  $m$  die Masse der Flächeneinheit versteht; man suche die Bahn des Mittelpunkts der Scheibe.

Wenn die Anfangsgeschwindigkeit des Schwerpunktes und die Winkelgeschwindigkeit der Scheibe  $u_0, \omega_0$  sind, so lässt sich beweisen, dass die Geschwindigkeit  $u$  und die Winkelgeschwindigkeit  $\omega$  zu irgend einer folgenden Zeit der Beziehung genügen  $\left( \frac{3u^2 - a^2\omega^2}{3u_0^2 - a^2\omega_0^2} \right)^2 = \frac{u^2\omega}{a_0^2\omega_0}$ .

24. Eine schwere kreisförmige Lamelle von dem Radius  $a$  und der Masse  $M$  rollt auf der Innenseite eines rauhen Kreisbogens vom doppelten Radius, der in einer verticalen Ebene festliegt. Man finde die Bewegung. Wenn die Lamelle auf den tiefsten Punkt des Bogens so gesetzt wird, dass sie sich in Ruhe befindet, so ist der Stoss, welchen sie in horizontaler Richtung erhalten muss, damit sie so hoch als möglich steige, ohne vollständig herumzulaufen und ohne abzufallen,  $M\sqrt{3ag}$ .

25. Eine Schnur ohne Gewicht wird um einen rauhen horizontalen Cylinder gewunden, dessen Masse  $M$  und Radius  $a$  ist und der sich um seine Axe drehen kann. An das freie Ende der Schnur wird eine Kette von der Masse  $m$  und der Länge  $l$  befestigt. Alsdann rollt man die Kette dicht zusammen und lässt sie los; man beweise, dass der Winkel  $\theta$ , um welchen sich der Cylinder nach der Zeit  $t$  gedreht hat, ehe die Kette vollständig ausgestreckt ist, durch  $M a \theta = \frac{m}{7} \left( \frac{gt^2}{2} - a\theta \right)^2$  gegeben ist.

26. Zwei gleiche Stäbe  $AC, BC$  sind bei  $C$  frei verbunden und bei  $A$  und  $B$ , zweien Punkten, die in derselben horizontalen Linie liegen, an Haken gehängt, wobei jeder Stab den Winkel  $\alpha$  mit dem Horizont macht. Der Haken  $B$  gibt plötzlich nach; man beweise, dass die Richtung des Druckes bei  $C$  sofort sich um einen Winkel dreht, dessen Tangente  $\frac{1 + 6 \sin^2 \alpha}{1 + 6 \cos^2 \alpha} \cdot \frac{2 - 3 \cos^2 \alpha}{3 \sin \alpha \cos \alpha}$  ist.

27. Zwei Massenpunkte  $A, B$  werden durch einen dünnen Faden verbunden;  $A$  ruht auf einem rauhen horizontalen Tisch, während  $B$  vertical im Abstand  $l$  von der Kante des Tisches herabhängt.  $A$  ist nun gerade im Begriff, sich zu bewegen und  $B$  wird horizontal mit der Geschwindigkeit  $u$  fortgeschleudert; man

zeige, dass  $A$  sich mit der Beschleunigung  $\frac{\mu}{\mu+1} \cdot \frac{u^2}{l}$  zu bewegen beginnt und dass der Anfangskrümmungsradius der Bahn des Punktes  $B$ ,  $(\mu+1)l$  ist, wo  $\mu$  den Reibungscoefficienten bedeutet.

28. Zwei Massenpunkte ( $m, m'$ ) werden durch einen Faden verbunden, der durch einen kleinen festliegenden Ring geht, und so gehalten, dass der Faden horizontal ist; ihre Abstände von dem Ring sind  $\alpha$  und  $\alpha'$ .  $q, q'$  seien die Anfangskrümmungsradien ihrer Bahnen, wenn sie losgelassen werden; man beweise, dass  $\frac{m}{q} = \frac{m'}{q'}$  und  $\frac{1}{q} + \frac{1}{q'} = \frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\alpha'}$  ist.

29. Eine Kugel, deren Schwerpunkt nicht in ihrem Centrum liegt, wird auf einen rauhen Tisch gelegt; der Reibungscoefficient ist  $\mu$ ; man bestimme, ob sie zu gleiten oder zu rollen beginnt.

30. Ein kreisförmiger Ring wird in verticaler Lage auf einer glatten horizontalen Ebene befestigt und ein kleiner Ring auf den Kreis gesetzt, der an dem höchsten Punkt mittelst eines Fadens befestigt ist, zu dem der Centriwinkel  $\alpha$  gehört. Der Faden wird durchgeschnitten und der Kreis freigelassen; man beweise, dass die Druckkräfte auf den Ring vor und nach dem Durchschneiden des Fadens in dem Verhältniss  $M + m \sin^2 \alpha : M \cos \alpha$  stehen, worin  $m$  und  $M$  die Massen des Ringes und des Kreises sind.

31. Das eine Ende  $C$  eines Stabes lässt man mit gleichförmiger Winkelgeschwindigkeit  $n$  auf dem Umfang eines Kreises vom Radius  $a$  rotiren, während der Stab selbst sich in der entgegengesetzten Richtung mit derselben Winkelgeschwindigkeit um dieses Ende dreht. Der Stab fällt Anfangs mit einem Durchmesser zusammen und ein glatter Ring, der frei längs des Stabes gleiten kann, wird in das Centrum des Kreises gebracht.  $r$  ist der Abstand des Ringes von  $C$  zur Zeit  $t$ ; man beweise, dass  $r = \frac{2a}{5} (e^{nt} + e^{-nt}) + \frac{a}{5} \cos 2nt$  ist.

32. Zwei gleiche gleichförmige Stäbe von der Länge  $2a$  sind durch ein Gelenk an dem einen Ende aneinander gehängt, während die andern Enden ein unausdehnbarer Faden von der Länge  $2l$  verbindet. Das System ruht auf zwei glatten Zapfen, die in derselben horizontalen Linie liegen und den Abstand  $2c$  voneinander haben. Der Faden wird durchgeschnitten; man beweise, dass die Anfangswinkelbeschleunigung eines jeden Stabes

$$g \frac{8a^2c - l^3}{8a^2l^2 + \frac{32a^4c^3}{l^2} - 8a^2cl}$$

ist.

33. Eine glatte horizontale Scheibe rotirt mit der Winkelgeschwindigkeit  $\sqrt{\mu}$  um eine verticale Axe; auf den Durchschnittspunkt wird ein materieller Punkt gelegt, der nach einem gewissen Punkt der Scheibe von einer Kraft gezogen wird, deren Beschleunigung  $\mu >$  der Abstand ist; man beweise, dass seine Bahn auf der Scheibe eine Cycloide beschreibt.

34. In einem hohlen Cylinder vom Radius  $\alpha$ , der auf einem rauhen Tisch ruht, sitzt ein Insect auf der tiefsten Erzeugenden; wenn das Insect sich aufmacht und mit gleichförmiger relativer Geschwindigkeit  $V$  zum Cylinder in einer verticalen Ebene, welche die Axe des Cylinders rechtwinklig schneidet, fortwandert, so ist der Winkel  $\theta$ , den die Ebene, welche die Axe und das Insect enthält, mit der Verticalen macht, durch die Gleichung gegeben:



$$a^2 \left( \frac{d\theta}{dt} \right)^2 \left( M + 2m \sin^2 \frac{1}{2} \theta \right) = MV^2 - 2mag \sin^2 \frac{1}{2} \theta,$$

vorausgesetzt, dass die Cylinderwand sehr dünn ist.

Wenn der innere Radius  $b$  ist, so lässt sich beweisen, dass

$$\left( \frac{d\theta}{dt} \right)^2 [M(k^2 + a^2) + m(a^2 - 2ab \cos \theta + b^2)] = C - 2mgb(1 - \cos \theta)$$

ist, worin

$$Cb^2 [M(k^2 + a^2) + m(a - b)^2] = V^2 [M(k^2 + a^2) + ma(a - b)]^2$$

und  $M, m$  die Massen des Cylinders bez. des Insectes sind.

35. An einem kreisförmigen Reifen vom Radius  $b$  und ohne Masse ist ein schwerer Massenpunkt in einem Punkt befestigt, der den Abstand  $c$  vom Centrum hat; die innere Fläche des Reifens wird gezwungen, auf der äusseren Fläche eines festen Kreises vom Radius  $a$ , wobei  $b > a$  ist, unter der Wirkung einer abstossenden Kraft zu rollen, deren Sitz das Centrum des festen Kreises ist und die dem  $\mu$ -fachen Abstand gleichkommt. Man zeige, dass die Periode kleiner Schwingungen

des Reifens  $2\pi \frac{b+c}{a} \left( \frac{b-a}{c\mu} \right)^{\frac{1}{2}}$  ist. Man zeige, dass alle Schwingungen, kleine wie grosse, wenn  $c = b$  ist, dieselbe Periode haben; ferner, dass man im Allgemeinen den Reifen so in Bewegung setzen kann, dass er mit der gleichförmigen

Winkelgeschwindigkeit  $\left( \mu \frac{b-a}{b} \right)^{\frac{1}{2}}$  zu rollen fortführt.

## Kapitel V.

# Die Bewegung starrer Körper im Raum von drei Dimensionen.

### Translation und Rotation.

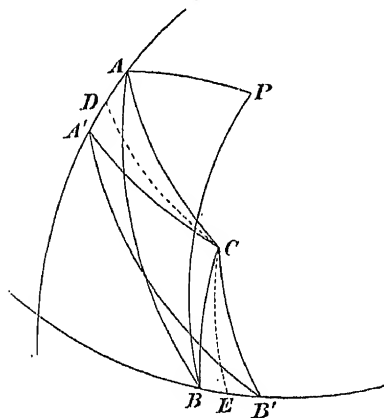
§ 214. Wenn die materiellen Punkte eines Körpers starr miteinander verbunden sind, dann müssen gewisse allgemeine Beziehungen zwischen den Bewegungen dieser Punkte existiren, die Beschaffenheit der von den Kräften erzeugten Bewegung mag sein, welche sie will. Diese Beziehungen müssen derart sein, dass aus der Bewegung dreier nicht in derselben Graden liegenden Punkte die eines jeden andern Punktes gefunden werden kann. An erster Stelle wird es daher unsre Aufgabe sein, den allgemeinen Charakter der Bewegung starrer Körper, abgesondert von den Kräften, welche sie hervorrufen, zu betrachten und die Bestimmung der Bewegung eines jeden materiellen Punktes auf so wenige unabhängige Grössen zu reduciren, als möglich ist, und an zweiter Stelle werden wir untersuchen, wie diese unabhängigen Grössen, wenn die Kräfte gegeben sind, ermittelt werden können.

§ 215. *Ein Punkt eines in Bewegung befindlichen starren Körpers liegt fest; man soll die allgemeinen Beziehungen zwischen den Bewegungen der übrigen Punkte des Körpers ableiten.*

*O* sei der festliegende Punkt; er werde zum Centrum einer beweglichen Kugel genommen, die in dem Körper befestigt sein möge. Der Radiusvector nach irgend einem Punkt *Q* des Körpers schneide die Kugel in *P*; die Bewegung eines jeden Punktes *Q* des Körpers wird dann durch die von *P* dargestellt.

Wenn die Verschiebungen  $AA'$ ,  $BB'$  zweier Punkte *A*, *B* auf der Kugel in einer gewissen Zeit gegeben sind, so kann man die Verschiebung eines jeden andern Punktes *P* auf der Kugel offenbar finden, indem man auf  $A'B'$  als Basis das Dreieck  $A'P'B'$  congruent  $APB$  construirt.  $PP'$  stellt alsdann die Verschiebung von *P* dar. Man kann als selbstverständlich ansehen oder auch, wie in den Elementen der Geometrie, beweisen, dass auf derselben Basis und auf der nämlichen Seite derselben keine zwei Dreiecke auf derselben Kugel existiren können, welche sowohl die Seiten gleich haben, die in dem einen Ende, als die, welche in dem andern Ende der Basis zusammenlaufen.

$D$  und  $E$  seien die Mittelpunkte der Bogen  $AA'$ ,  $BB'$  und  $DC$ ,  $EC$  Bogen grösster Kreise, welche auf  $AA'$  bez.  $BB'$  senkrecht stehen.



Dann ist offenbar  $CA = CA'$  und  $CB = CB'$  und daher, weil die Grundlinien  $AB, A'B'$  gleich sind, die beiden Dreiecke  $ACB, A'CB'$  congruent. Die Verschiebung von  $C$  ist daher Null. Weil ferner die Verschiebung von  $O$  Null ist, so muss offenbar die Verschiebung eines jeden Punktes der Geraden  $OC$  Null sein.

Ein Körper kann daher von irgend einer Lage, die wir  $AB$  nennen können, in eine andre  $A'B'$  dadurch gebracht werden, dass man ihn um  $OC$  als Axe rotiren und dabei einen Winkel  $PCP'$  derart beschreiben lässt, dass jeder Punkt  $P$  zum Zusammenfallen mit seiner neuen Lage  $P'$  gebracht wird. Jeder Punkt des Körpers wird dann aus seiner ersten in seine Endlage gebracht.

Diesen Satz verdankt man Euler, *Mémoires de l'Académie de Berlin* 1750 und *Commentaires de St. Pétersbourg* 1775.

§ 216. Wird der Radius der Kugel unendlich gross, so werden aus den verschiedenen Kreisen der Figur Gerade. Daraus folgt, dass ein Körper, der sich in einer Ebene bewegt, aus einer Lage, die man  $AB$  nennen kann, in eine andere  $A'B'$  durch Rotation um einen gewissen Punkt  $C$  gebracht werden kann.

§ 217. Beisp. 1. Ein Körper wird auf rechtwinklige Axen  $x, y, z$  bezogen und die Axen werden unter Beibehaltung des Coordinatenanfangs nach dem nebenstehenden Schema mit den Axen  $x', y', z'$  vertauscht. Man zeige, dass dies dasselbe ist, als ob man den Körper um eine Axe drehte, deren Gleichungen irgend zwei der folgenden drei

	$x'$	$y'$	$z'$
$x$	$a_1$	$a_2$	$a_3$
$y$	$b_1$	$b_2$	$b_3$
$z$	$c_1$	$c_2$	$c_3$

sind

$$(a_1 - 1)x + a_2y + a_3z = 0,$$

$$b_1x + (b_2 - 1)y + b_3z = 0,$$

$$c_1x + c_2y + (c_3 - 1)z = 0,$$

und dabei einen Winkel  $\theta$  beschreiben liesse, der durch

$$3 - 4 \sin^2 \frac{1}{2} \theta = a_1 + b_2 + c_3$$

gegeben ist. Wenn die positive Richtung der  $x', y'$  willkürlich ist, zu zeigen, dass man der Bedingung der gleichzeitigen Gültigkeit der drei Gleichungen durch geeignete Wahl der positiven Richtung der  $z'$ -Axe genügen kann. Siehe auch eine Aufgabe in *Smith's Prize Examination*, 1868.

Man nehme auf der  $z$ - und  $z'$ -Axe je einen Punkt im Abstand  $h$  vom Coordinatenanfang an. Ihre Coordinaten sind  $(0, 0, h)$ ,  $(a_3h, b_3h, c_3h)$ ; ihr Abstand ist daher  $h\sqrt{2(1 - c_3)}$ ; er ist aber auch  $2h \sin \gamma \sin \frac{1}{2} \theta$ , daher  $2 \sin^2 \frac{1}{2} \theta \sin^2 \gamma = 1 - c_3$ ,

worin  $\gamma$  den Winkel  $zOz'$  bedeutet. Ebenso erhält man  $2 \sin^2 \frac{1}{2} \theta \sin^2 \alpha = 1 - a_1$  und  $2 \sin^2 \frac{1}{2} \theta \sin^2 \beta = 1 - b_2$ , woraus die Gleichung für  $\theta$  sich sofort ergibt.

Beisp. 2. Man zeige, dass man den Gleichungen für die Axe auch die Form geben kann

$$\frac{x}{c_1 + a_3} = \frac{y}{c_2 + b_3} = \frac{z}{c_3 - a_1 - b_2 + 1}.$$

§ 218. Wenn sich ein Körper in Bewegung befindet, so sind nicht nur seine erste und letzte Lage, sondern auch die zwischenliegenden Lagen in Betracht zu ziehen. Wir wollen also annehmen,  $AB, A'B'$  wären zwei Lagen am Anfang und Ende eines unbegrenzt kleinen Zeitintervalls  $dt$ . Wie man sieht, gibt es für einen Körper, der sich um einen festen Punkt  $O$  bewegt, in jedem Moment der Bewegung eine Gerade  $OC$ , deren sämtliche Punkte während einer unbegrenzt kurzen Zeit  $dt$  keine Verschiebung erleiden. Diese Gerade heisst die *Momentanaxe*.

Ist  $d\theta$  der Winkel, den der Körper um die Momentanaxe beschreiben muss, um einen Punkt  $P$  aus seiner Lage zur Zeit  $t$  in die zur Zeit  $t + dt$  zu bringen, so heisst das schliessliche Verhältniss von  $d\theta$  zu  $dt$  die Winkelgeschwindigkeit des Körpers um die Momentanaxe. Die Winkelgeschwindigkeit kann auch als der Winkel defnirt werden, welchen der Körper in der Zeiteinheit beschreiben würde, wenn er fortführe mit derselben Geschwindigkeit, die er in dem gegebenen Moment hatte, sich um die nämliche Axe während der Zeiteinheit gleichförmig zu drehen.

§ 219. Wir wollen nun die Einschränkung, dass der Körper sich um einen festliegenden Punkt bewegen soll, fallen lassen. Man kann den folgenden Satz aufstellen:

*Jede Verrückung eines starren Körpers kann man als die Combination der beiden folgenden Bewegungen ansehen: (1) einer Translationsbewegung, wodurch jeder materielle Punkt sich parallel zur Bewegungsrichtung irgend eines angenommenen mit dem Körper starr verbundenen Punktes  $P$  dieselbe Strecke entlang bewegt, (2) einer Rotationsbewegung des ganzen Körpers um eine durch den angenommenen Punkt  $P$  gehende Axe.*

Dieses Theorem und das über die Centralaxe rühren von Chasles her. *Bulletin des Sciences Mathématiques par Ferussac*, vol. XIV. 1830. Siehe auch Poincot, *Théorie Nouvelle de la Rotation des Corps*. 1834.

Es leuchtet ein, dass die Aenderung der Lage dadurch bewirkt werden kann, dass man  $P$  durch eine Translationsbewegung von seiner alten in seine neue Lage  $P'$  bringt, alsdann  $P'$  als festen Punkt beibehält und zwei beliebige Punkte des Körpers, die mit  $P$  nicht in derselben Geraden liegen, in ihre Endlagen bewegt. Diese letzte Bewegung ist, wie wir bewiesen haben, mit einer Rotation um eine durch  $P'$  gehende Axe gleichwerthig.

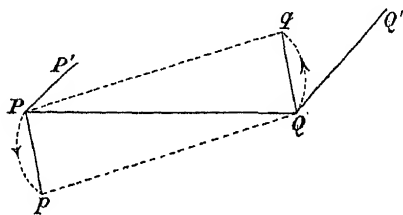
Da diese Bewegungen durchaus unabhängig voneinander sind, so kann man ihre Reihenfolge offenbar umkehren, d. h. man kann den Körper zuerst rotiren lassen und ihm dann die Translation geben; man kann auch annehmen, sie fänden gleichzeitig statt.

Wie man sieht, kann man jeden Punkt  $P$  des Körpers als Reductionspunkt für die doppelte Operation wählen. Die gegebene Verrückung kann daher auf unendlich viele Arten ausgeführt werden.

§ 220. *Vertauschung der Reductionspunkte. Die Beziehungen zwischen den Rotationsachsen und -Winkeln zu finden, wenn verschiedene Punkte  $P, Q$  zu Reductionspunkten gewählt werden.*

Die Verrückung des Körpers möge durch eine Rotation (Drehung)  $\theta$  um die Axe  $PR$  und eine Translation (Verschiebung)  $PP'$  dargestellt werden. Dieselbe Verrückung möge auch die Rotation  $\theta'$  um die Axe  $QS$  und die Translation  $QQ'$  ergeben. Es ist klar, dass jeder Punkt zwei Verschiebungen hat, (1) eine Translation gleich und parallel mit  $PP'$  und (2) eine Rotation durch einen Bogen in einer auf der Rotationsaxe  $PR$  senkrechten Ebene. Die zweite Verschiebung ist nur dann Null, wenn der Punkt auf der Axe  $PR$  liegt. *Die einzigen Punkte, deren Verschiebungen dieselben sind wie die des Reductionspunktes, liegen daher auf der diesem Punkt entsprechenden Rotationsaxe.* Durch den zweiten Reductionspunkt  $Q$  ziehe man eine Parallele zu  $PR$ . Alsdann sind für alle in der Parallelen liegenden Punkte die in Folge der Translation  $PP'$  und der Rotation  $\theta$  um  $PR$  stattfindenden Verschiebungen dieselben, wie die entsprechenden für den Punkt  $Q$ . Diese Parallele muss daher die dem Reductionspunkt  $Q$  entsprechende Rotationsaxe sein. Es folgt daraus, dass die Rotationsachsen für alle Reductionspunkte parallel sind.

§ 221. Der Abstand der Rotationsachsen für  $P$  und  $Q$ , die also parallel sind, sei  $a$ . Schneidet die Ebene des Papiers diese Axen rechtwinklig in  $P$  und  $Q$ , so ist  $PQ = a$ .  $PP', QQ'$  mögen die linearen Verschiebungen von  $P$  bez.  $Q$  darstellen, die nicht nothwendiger Weise in der Ebene des Papiers zu liegen brauchen.



In Folge der Rotation  $\theta$  um  $PR$  beschreibt  $Q$  den zum Winkel  $\theta$  gehörigen Bogen des Kreises vom

Radius  $a$ ; die Sehne  $Qq$  dieses Bogens ist  $2a \sin \frac{1}{2} \theta$  und ist die durch die Rotation hervorgerufene Verschiebung. Die ganze Verschiebung  $QQ'$  von  $Q$  ist die Resultante von  $Qq$  und der Verschiebung  $PP'$  von  $P$ . Auf dieselbe Weise beschreibt  $P$  in Folge der Rotation  $\theta'$  um  $QS$

einen Bogen, dessen Sehne  $Pp$  gleich  $2a \sin \frac{1}{2} \theta'$  ist. Die ganze Verrückung  $PP'$  von  $P$  ist die Resultante von  $Pp$  und der Verschiebung  $QQ'$  von  $Q$ . Wenn aber die Verschiebung von  $Q$  der von  $P$  zusammen mit  $Qq$  und die von  $P$  der von  $Q$  zusammen mit  $Pp$  gleichkommt, so muss  $Pp$  gleich  $Qq$  sein und die entgegengesetzte Richtung haben. Dazu ist erforderlich, dass die beiden Rotationen  $\theta, \theta'$  um  $PR$  und  $QS$  gleich sind und dieselbe Richtung haben. Es folgt daraus, dass die allen Reductionspunkten entsprechenden Rotationswinkel gleich sind.

§ 222. Da die Translation  $QQ'$  die Resultante von  $PP'$  und  $Qq$  ist, so kann man mit Hülfe dieses Satzes nun sowohl die Translation als die Rotation, die irgend einem gegebenen Reductionspunkt  $Q$  entsprechen, finden, wenn die für  $P$  bekannt sind.

Da die in Folge der Rotation um  $PR$  stattfindende Verschiebung  $Qq$  senkrecht auf  $PR$  steht, so ist die Projection von  $QQ'$  auf die Rotationsaxe dieselbe wie die von  $PP'$ . Daher sind die Projectionen der Verschiebungen aller Punkte des Körpers auf die Rotationsaxe gleich.

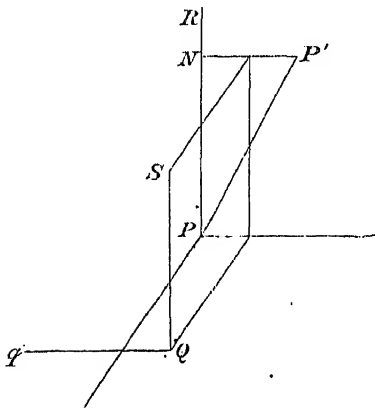
§ 223. Wichtig ist der Fall, in welchem die Verrückung eine einfache Rotation  $\theta$  um eine Axe  $PR$  ohne Translation ist. Wird irgend ein Punkt  $Q$  im Abstand  $a$  von  $PR$  als Reductionspunkt gewählt, so wird dieselbe Verrückung durch eine Translation von  $Q$  längs der Sehne  $Qq = 2a \sin \frac{1}{2} \theta$  in einer Richtung, die den Winkel  $\frac{1}{2} (\pi - \theta)$  mit der Ebene  $QPR$  macht, und eine Rotation dargestellt, die gleich  $\theta$  sein und um eine Axe stattfinden muss, welche  $PR$  parallel ist. Daher kann eine Rotation um irgend eine Axe durch eine gleiche Rotation um eine parallele Axe zusammen mit einer Translationsbewegung ersetzt werden.

§ 224. Wenn die Rotation unbegrenzt klein ist, lässt sich der Satz so aussprechen: Eine Rotationsbewegung  $\omega dt$  um eine Axe  $PR$  ist einer gleichen Rotationsbewegung um irgend eine parallele Axe  $QS$  im Abstand  $a$  von  $PR$  äquivalent zusammen mit einer Translationsbewegung  $a\omega dt$  senkrecht zu der die Axen enthaltenden Ebene und in der Richtung, in der  $QS$  sich bewegt.

§ 225. Die Centralaxe. Es ist oft wichtig, den Reductionspunkt so zu wählen, dass die Translationsrichtung mit der Rotationsaxe zusammenfällt. Wir wollen sehen, wie dies geschehen kann.

Die gegebene Verrückung des Körpers möge durch eine Rotation  $\theta$  um  $PR$  und eine Translation  $PP'$  dargestellt sein. Man ziehe  $P'N$  senkrecht zu  $PR$ . Wenn möglich, möge eine Rotation um eine Axe  $QS$  und eine Translation  $QQ'$  längs  $QS$  dieselbe Verrückung darstellen.

Nach §§ 220 und 221 muss  $QS$  parallel  $PR$  und die Rotation um  $QS$  gleich  $\theta$  sein. Die Translation bewegt  $P$  längs  $PR$  um eine Strecke



gleich  $QQ'$  und die Rotation um  $QS$  bewegt  $P$  längs eines Bogens, dessen Ebene senkrecht auf  $PR$  steht.  $QQ'$  muss daher gleich  $PN$  und  $NP'$  muss die Sehne des Bogens sein. Daraus folgt, dass  $QS$  in der Ebene liegen muss, die  $NP'$  halbiert und senkrecht zu  $NP'$  ist und in einem solchen Abstand  $a$  von  $PR$ , dass  $NP' = 2a \sin \frac{1}{2} \theta$  oder, was bequemer ist, in einem solchen Abstand  $y$  von der Ebene  $NP'P'$ , dass  $NP' = 2y \operatorname{tg} \frac{1}{2} \theta$  ist.

Die Rotation  $\theta$  um  $QS$  hat  $\bar{N}$  nach  $P'$  zu bringen und findet in derselben

Richtung statt, wie die Rotation  $\theta$  um  $PR$ . Der Abstand  $y$  muss daher vom Mittelpunkt von  $NP'$  aus in der Richtung genommen werden, in welcher dieser Mittelpunkt durch seine Rotation um  $PR$  bewegt wird.

Nachdem so die allein mögliche Lage von  $QS$  ermittelt ist, bleibt noch zu beweisen, dass die Verschiebung von  $Q$  in der That längs  $QS$  stattfindet. In Folge der Rotation  $\theta$  um  $PR$  beschreibt  $Q$  einen Bogen, dessen Sehne  $Qq$  parallel  $P'N$  und gleich  $2a \sin \frac{1}{2} \theta$  ist. Die Sehne  $Qq$  ist daher gleich  $NP'$  und die Translation  $NP'$  bringt  $q$  zurück in seine Lage  $Q$ . Daher wird  $Q$  nur durch die Translation  $PN$  bewegt, d. h.  $Q$  bewegt sich längs  $QS$ .

§ 226. Daraus folgt, dass jede Verrückung eines Körpers durch eine Rotation um eine gewisse Gerade und eine Translation parallel dieser Geraden dargestellt werden kann. Diese Art der Bewegung heisst Schraubenbewegung und die Gerade Centralaxe oder auch Schraubenaxe, das Verhältniss der Translation zu der Rotationsamplitude aber der Pfeil oder der Windungsparameter der Schraube.

§ 227. *Dieselbe Verrückung eines Körpers kann nicht durch zwei verschiedene Schraubenbewegungen ersetzt werden.* Wir wollen annehmen es sei möglich und  $AB, CD$  seien die beiden Centralaxen.  $AB$  und  $CD$  sind dann nach § 220 parallel. Die Verrückung eines Punktes  $Q$  auf  $CD$  findet man durch Drehung des Körpers um  $AB$  und durch eine Translation parallel zu  $AB$ ;  $Q$  hat daher eine Verschiebung senkrecht zu der Ebene  $ABQ$  und kann sich daher nicht ausschliesslich längs  $CD$  bewegen.

§ 228. Wenn die Rotationen unbegrenzt klein sind, so vereinfacht sich die Ermittlung der Centralaxe. Die Verrückung möge durch eine Rotation  $\omega dt$  um eine Axe  $PR$  und eine Translation  $V dt$  in der Richtung  $PP'$  gegeben sein. Man trage von  $P$  aus senkrecht zur Ebene  $P'PR$  und nach der Seite der Ebene hin, nach welcher sich  $P'$  bewegt, die Strecke  $y = \frac{V \sin P'PR}{\omega}$  auf. Eine Parallele zu  $PR$  durch den Endpunkt von  $y$  ist die Centralaxe.

Beisp. 1. Die Verschiebungen  $AA'$ ,  $BB'$ ,  $CC'$  dreier Punkte eines Körpers sind nach Richtung und Grösse, aber nicht nothwendiger Weise der Lage nach gegeben; man finde die Richtung der Rotationsaxe, die irgend einem Reductionspunkt  $P$  entspricht.

Durch einen beliebig angenommenen Punkt  $O$  ziehe  $O\alpha$ ,  $O\beta$ ,  $O\gamma$  parallel und gleich  $AA'$ ,  $BB'$ ,  $CC'$ . Ist  $O\varrho$  die Richtung der Rotationsaxe, so sind die Projectionen von  $O\alpha$ ,  $O\beta$ ,  $O\gamma$  auf  $O\varrho$  sämmtlich gleich.  $O\varrho$  ist daher das Loth von  $O$  auf die Ebene  $\alpha\beta\gamma$ . Auch daraus sieht man wieder, dass die Richtung der Rotationsaxe für alle Reductionspunkte die gleiche ist.

Beisp. 2. In dem vorigen Beispiel werde die Bewegung auf die Centralaxe bezogen; man zeige, dass die Translation längs derselben gleich  $O\varrho$  ist.

Beisp. 3. Gegeben sind die Verschiebungen  $AA'$ ,  $BB'$  zweier Punkte  $A$ ,  $B$  des Körpers und die Richtung der Centralaxe; man finde die Lage der Centralaxe. Man lege durch  $AA'$ ,  $BB'$  Ebenen parallel zur Centralaxe; halbire  $AA'$ ,  $BB'$  durch Ebenen bez. senkrecht zu diesen Ebenen und parallel zur Richtung der Centralaxe. Die beiden letzten Ebenen schneiden sich in der Centralaxe.

## Zusammensetzung von Rotationen und Schraubenbewegungen.

§ 229. Man hat oft nöthig Rotationen um Axen  $OA$ ,  $OB$ , die sich im Punkt  $O$  treffen, zusammenzusetzen. Da dieser Fall in der Dynamik der Systeme starrer Körper aber nur dann vorkommt, wenn die Rotationen unbegrenzt klein sind, so wollen wir zuerst diesen Fall eingehender besprechen und später am Ende des Kapitels im Allgemeinen angeben, wie man zu verfahren hat, wenn die Rotationen von endlicher Grösse sind.

§ 230. Welchen Sinn hat es, wenn man sagt, ein Körper habe Winkelgeschwindigkeiten um mehr als eine Axe zur selben Zeit?

Von einem sich bewegenden Körper sagt man, er habe eine Winkelgeschwindigkeit  $\omega$  um eine Gerade, wenn der Körper sich um diese Gerade drehend einen Winkel  $\omega dt$  beschreibt und dabei jeder Punkt des Körpers von seiner Lage zur Zeit  $t$  in seine Lage zur Zeit  $t + dt$  gebracht wird.

Man nehme an, der Körper drehe sich während dreier aufeinander folgender Intervalle, von denen jedes  $dt$  ist, nacheinander um drei verschiedene Gerade  $OA$ ,  $OB$ ,  $OC$ , die sich im Punkt  $O$  schneiden und beschreibe dabei die Winkel  $\omega_1 dt$ ,  $\omega_2 dt$ ,  $\omega_3 dt$ . Wir wollen zuerst beweisen, dass die Endlage dieselbe bleibt, in welcher Reihenfolge die Rotationen auch stattfinden.  $P$  sei ein beliebiger Punkt im Körper und seine Abstände von  $OA$ ,  $OB$ ,  $OC$  seien bez.  $r_1$ ,  $r_2$ ,  $r_3$ .

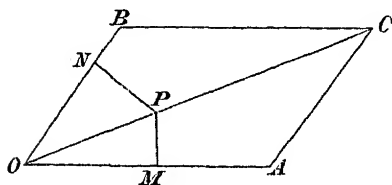


Durch die erste Drehung um  $OA$  erhält  $P$  die Verschiebung  $\omega_1 r_1 dt$ . In Folge dieser Bewegung möge  $r_2$  auf  $r_2 + dr_2$  anwachsen; die Verschiebung durch die Rotation um  $OB$  beträgt dann ihrer Grösse nach  $\omega_2(r_2 + dr_2)dt$ . Wie aus der Differenzialrechnung bekannt ist, kann man aber in der Grenze die Grössen zweiter Ordnung vernachlässigen; damit wird die Verschiebung  $\omega_3 r_2 dt$ . Ebenso ist die Verschiebung in Folge der letzten Rotation  $\omega_3 r_3 dt$ . Die drei Resultate sind aber dieselben, in welcher Reihenfolge man auch die Rotationen stattfinden lässt. Auf ähnliche Weise lässt sich zeigen, dass auch die *Richtungen* dieser Verschiebungen von der Reihenfolge nicht abhängen. Die Endverschiebung ist die Diagonale des Parallelepipedes, das sich über diesen drei Linien als Seiten beschreiben lässt und hängt daher von der Folge der Rotationen nicht ab. Weil also die drei Rotationen durchaus unabhängig von einander sind, so kann man sagen, sie fänden gleichzeitig statt.

Wenn man daher von einem Körper behauptet, er habe Winkelgeschwindigkeiten um drei verschiedene Axen, so meint man damit nur, dass die Bewegung sich auf folgende Art bestimmen lasse: Man theilt die ganze Zeit in eine Anzahl kleiner Intervalle, von denen jedes  $dt$  ist, während eines jeden der Intervalle dreht man den Körper nacheinander um die drei Axen und lässt ihn dabei die Winkel  $\omega_1 dt$ ,  $\omega_2 dt$ ,  $\omega_3 dt$  beschreiben. Wenn dann  $dt$  sich ohne Grenze vermindert, so wird die Bewegung während der ganzen Zeit damit genau wiedergegeben.

§ 231. Offenbar lässt sich eine Rotation um eine Axe  $OA$  ihrer Grösse nach durch eine auf der Axe abgetragene Länge darstellen. Auch ihre Richtung stellt diese Länge dar, wenn man so verfährt, wie in der Statik, d. h. wenn einer Person, die längs der Axe so steht, dass  $OA$  von  $O$  zu ihren Füßen aus nach ihrem Kopf hin gemessen wird, die Rotation in einer Normalrichtung zu erfolgen scheint. Diese Richtung von  $OA$  heisst die positive Richtung der Axe.

§ 232. Das Parallelogramm der Winkelgeschwindigkeiten. Wenn zwei Winkelgeschwindigkeiten um zwei Axen  $OA$ ,  $OB$  der Grösse und Richtung nach durch die zwei Längen  $OA$ ,  $OB$  dargestellt werden, so ist die Diagonale  $OC$  des mit  $OA$ ,  $OB$  als Seiten construirten Parallelogramms die resultirende Rotationsaxe und ihre Länge stellt die Grösse der resultirenden Winkelgeschwindigkeit dar.



$P$  sei irgend ein Punkt in  $OC$  und  $PM$ ,  $PN$  Lothe von  $P$  auf  $OA$ ,  $OB$ . Da  $OA$  die Winkelgeschwindigkeit um  $OA$  darstellt und  $PM$  der senkrechte Abstand des Punktes  $P$  von  $OA$  ist, so stellt das Product  $OA \cdot PM$  die Geschwindigkeit von  $P$  in Folge der Winkel-

geschwindigkeit um  $OA$  dar. Ebenso stellt  $OB \cdot PN$  die Geschwindigkeit von  $P$  in Folge der Winkelgeschwindigkeit um  $OB$  dar. Da sich  $P$  auf der linken Seite von  $OA$  und auf der rechten von  $OB$  befindet, wenn man längs dieser Richtungen hinblickt, so haben diese Geschwindigkeiten offenbar entgegengesetzte Richtungen.

Die Geschwindigkeit des Punktes  $P$  wird daher dargestellt durch

$$OA \cdot PM - OB \cdot PN = OP(OA \cdot \sin COA - OB \cdot \sin COB) = 0.$$

Der Punkt  $P$  ist mithin in Ruhe und  $OC$  die resultirende Rotationsaxe.

Bedeutet  $\omega$  die Winkelgeschwindigkeit um  $OC$ , so ist die Geschwindigkeit irgend eines Punktes  $A$  in  $OA$  senkrecht zur Ebene  $AOB$  und wird durch das Product aus  $\omega$  und dem senkrechten Abstand des Punktes  $A$  von  $OC$ , also durch  $\omega \cdot OA \sin COA$ , dargestellt. Da die Bewegung aber auch durch die beiden gegebenen Winkelgeschwindigkeiten um  $OA$ ,  $OB$  bestimmt wird, so stellt auch das Product aus  $OB$  und dem senkrechten Abstand des Punktes  $A$  von  $OB$ , also  $OB \cdot OA \sin BOA$ , die Geschwindigkeit von  $A$  dar. Daraus folgt:

$$\omega = OB \frac{\sin BOA}{\sin COA} = OC.$$

Die Winkelgeschwindigkeit um  $OC$  wird daher ihrer Grösse nach durch  $OC$  dargestellt.

Aus diesem Satz kann man als Zusatz „das Parallelogramm der Winkelbeschleunigungen“ ableiten. Denn wenn  $OA$ ,  $OB$  die in irgend einem Augenblick hinzukommenden dem Körper gegebenen Winkelgeschwindigkeiten darstellen, so bestimmt  $OC$  die resultirende hinzukommende Winkelgeschwindigkeit der Richtung und der Grösse nach.

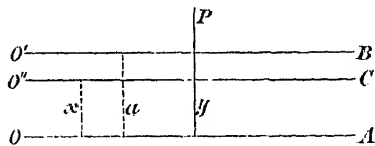
§ 233. Dieser Satz zeigt, dass Winkelgeschwindigkeiten und Winkelbeschleunigungen nach denselben Regeln und auf dieselbe Art, als ob sie Kräfte wären, zusammengesetzt und zerlegt werden können. So lässt sich die Winkelgeschwindigkeit  $\omega$  um eine gegebene Axe in zwei Componenten  $\omega \cos \alpha$  und  $\omega \sin \alpha$  um Axen zerlegen, die auf einander senkrecht stehen und mit der gegebenen Axe die Winkel  $\alpha$  und  $\frac{1}{2}\pi - \alpha$  bilden.

Hat ein Körper die Winkelgeschwindigkeiten  $\omega_1, \omega_2, \omega_3$  um drei zu einander senkrechte Axen  $Ox, Oy, Oz$ , so sind sie einer einzelnen Winkelgeschwindigkeit  $\omega$  äquivalent, wenn  $\omega = \sqrt{\omega_1^2 + \omega_2^2 + \omega_3^2}$  ist, um eine Axe, welche mit den gegebenen Axen Winkel macht, deren Cosinusse bez.  $\frac{\omega_1}{\omega}, \frac{\omega_2}{\omega}, \frac{\omega_3}{\omega}$  sind. Dies lässt sich wie in dem entsprechenden Satz der Statik beweisen, indem man die drei Winkelgeschwindigkeiten zu je zweien zusammensetzt.

Es wird nicht nöthig sein, die verschiedenen in der Statik für die Kräfte bewiesenen Sätze hier für Winkelgeschwindigkeiten zu wiederholen. Wir können das „Dreieck der Winkelgeschwindigkeiten“ und

geschwindigkeiten ohne weiteren Beweis benutzen.

§ 234. **Das Winkelgeschwindigkeitspaar.** *Ein Körper hat die Winkelgeschwindigkeiten  $\omega$ ,  $\omega'$  um zwei parallele Axen  $OA$ ,  $O'B$ , die den Abstand  $a$  voneinander haben; man finde die resultirende Bewegung.*



Da parallele Gerade als die Grenzlage zweier Geraden, die sich in sehr grosser Entfernung schneiden, angesehen werden können, so folgt aus dem Parallelogramm der Winkel-

geschwindigkeiten, dass die beiden gegebenen Winkelgeschwindigkeiten einer einzelnen um irgend eine parallele Axe  $O''C$ , die in der  $OA$ ,  $O'B$  enthaltenden Ebene liegt, äquivalent sind.

$x$  sei der Abstand dieser Axe von  $OA$  und es werde angenommen, dass es auf derselben Seite von  $OA$  liege, wie  $O'B$ .  $\Omega$  sei die Winkelgeschwindigkeit um  $x$ .

Man nehme irgend einen Punkt  $P$  im Abstand  $y$  von  $OA$ , der in der Ebene der drei Axen liegt. Die Geschwindigkeit von  $P$ , die er der Rotation um  $OA$  verdankt, ist  $\omega y$ , die Geschwindigkeit in Folge der Rotation um  $O'B$  ist  $\omega'(y - a)$ . Die beiden zusammen müssen aber der Geschwindigkeit in Folge der resultirenden Winkelgeschwindigkeit um  $O''C$ , d. h.  $\Omega(y - x)$  äquivalent sein; daher ist

$$\omega y + \omega'(y - a) = \Omega(y - x).$$

Diese Gleichung gilt für alle Werthe von  $y$ ; man erhält also

$$\Omega = \omega + \omega', \quad x = \frac{a\omega'}{\Omega}.$$

Wir wären zu demselben Resultat gekommen, wenn wir die Resultante zweier Kräfte  $\omega$ ,  $\omega'$  gesucht hätten, die in den Richtungen  $OA$ ,  $O'B$  wirken.

Ist  $\omega = -\omega'$ , so verschwindet die resultirende Winkelgeschwindigkeit,  $x$  ist dagegen unendlich gross. Die Geschwindigkeit eines Punktes  $P$  ist in diesem Fall  $\omega y + \omega'(y - a) = a\omega$ , also unabhängig von der Lage von  $P$ .

Daraus folgt, dass zwei Winkelgeschwindigkeiten, von denen jede gleich  $\omega$  ist, die aber den Körper in entgegengesetzten Richtungen zu drehen suchen und die um zwei parallele, um  $a$  voneinander abstehende Axen stattfinden, einer durch  $a\omega$  dargestellten Translationsgeschwindigkeit gleichkommen. Dies entspricht dem Satz der Statik, dass „ein Paar“ durch sein Moment gemessen wird.

Als Zusatz lässt sich daraus ableiten, dass die Rotationsbewegung  $\omega$  um eine Axe  $OA$  der gleichen Rotationsbewegung um eine parallele Axe  $O'B$  äquivalent ist zusammen mit einer Translation  $a\omega$ , die senkrecht zu der  $OA$ ,  $O'B$  enthaltenden Ebene in der Richtung stattfindet, in welcher sich  $O'B$  bewegt. Siehe auch § 223.

§ 235. Die Analogie mit der Statik. Alle Sätze der Statik, die sich auf die Zusammensetzung und Zerlegung der Kräfte und Paare beziehen, beruhen auf den Theoremen:

1. Dem Parallelogramm der Kräfte und dem Parallelogramm der Paare.

2. Die Kraft  $F$  ist einer gleichen und parallelen Kraft zusammen mit einem Paar  $Fp$  äquivalent, wenn  $p$  der Abstand der Kräfte ist.

Dem entsprechend hat man in der Dynamik die folgenden Theoreme über die augenblickliche Bewegung der starren Körper:

1. Das Parallelogramm der Winkelgeschwindigkeiten und das Parallelogramm der Translationsgeschwindigkeiten.

2. Die Winkelgeschwindigkeit  $\omega$  ist einer gleichen Winkelgeschwindigkeit um eine parallele Axe zusammen mit einer Translationsgeschwindigkeit  $\omega p$  äquivalent, wenn  $p$  der Abstand der parallelen Axen ist.

Daraus folgt, dass jedem Satz der Statik, der sich auf die Kräfte bezieht, ein Satz der Dynamik entspricht, der sich auf die Bewegung der starren Körper bezieht und dass sich beide auf dieselbe Art beweisen lassen.

Um die Analogie zu vervollständigen, wollen wir hinzufügen, 1) dass eine Winkelgeschwindigkeit wie eine Kraft der Statik zu ihrer vollständigen Bestimmung fünf Constante nöthig hat und 2) dass eine Translationsgeschwindigkeit wie ein Paar der Statik nur drei braucht. Vier Constante sind erforderlich, um die Wirkungslinie der Kraft oder die Rotationsaxe und eine um die Grösse einer jeden zu bestimmen. Ferner ist in beiden Fällen eine Uebereinkunft über die positive Richtung der Linie nöthig. Zwei Constante und eine Uebereinkunft braucht man zur Bestimmung der positiven Richtung der Axe des Paares oder der Translationsgeschwindigkeit und eine für die Grösse des Paares bez. der Geschwindigkeit.

Die Entdeckung dieser Analogie verdankt man Poinso.

§ 236. Um zu zeigen, wie nützlich diese Analogie ist und wie leicht man die bekannten Sätze der Statik in die entsprechenden der Dynamik umformen kann, wollen wir die bekannteren Sätze, die sowohl in der Statik als der Dynamik fortwährend gebraucht werden, nebeneinander stellen.

In der Statik wird bewiesen, dass ein gegebenes System von Kräften und Paaren sich auf drei Kräfte  $X$ ,  $Y$ ,  $Z$ , welche längs rechtwinkliger Axen wirken, die man sich nach Gefallen auswählen kann und die sich in einem beliebigen Reductionspunkt  $O$  treffen, zusammen mit drei Paaren reduciren lassen, die man  $L$ ,  $M$ ,  $N$  nennen kann und die um diese Axen wirken. Eine einfachere Darstellung ergibt sich dann, denn es wird bewiesen, dass sich diese Kräfte und Paare auf eine einzelne Kraft, die man  $R$  nennen kann,

und ein Paar  $G$  reduciren lassen, welches um die Wirkungslinie von  $R$  wirkt. Diese Wirkungslinie von  $R$  heisst die Centralaxe. Es gibt nur eine einem gegebenen Kräftesystem entsprechende Axe. Eine solche Darstellung eines gegebenen Kräftesystems hat man *Dyname* genannt. Zieht man eine Gerade  $AB$  parallel zur Centralaxe und im Abstand  $c$  von ihr, so kann man  $R$ , statt längs der Centralaxe, an  $A$  längs  $AB$  angreifen lassen, wenn man nur ein neues Paar einführt, dessen Moment  $Rc$  ist. Combinirt man es mit dem Paar  $G$ , so erhält man für den neuen Reductionspunkt  $A$  ein neues Paar  $G' = \sqrt{G^2 + R^2 c^2}$ , während die Kraft dieselbe bleibt wie vorher. Das Paar  $G'$  ist ein Minimum, wenn  $c = 0$  ist, d. h. wenn  $AB$  mit der Centralaxe zusammenfällt. Nimmt man die Momente um  $AB$ , so sieht man, dass das Moment der Kräfte um jede zur Centralaxe parallele Gerade dasselbe und dem Minimalpaar gleich ist.

Auf dieselbe Art, auf welche diese Resultate erhalten wurden, kommt man zu den folgenden Sätzen. Die augenblickliche Bewegung lässt sich auf die Translationsgeschwindigkeit eines beliebig wählbaren Reductionspunktes und eine Winkelgeschwindigkeit um eine Axe durch diesen Punkt zurückführen. Diese werden dann auf eine Winkelgeschwindigkeit, die man  $\Omega$  nennen kann, um eine Axe, Centralaxe genannt, und eine Translationsgeschwindigkeit längs dieser Axe, die man  $V$  nennen kann, reducirt. Dieser Darstellung der Bewegung hat man den Namen *Schraubenbewegung* gegeben. Zieht man eine Gerade  $AB$  parallel zur Centralaxe, so kann man  $\Omega$  statt um die Centralaxe um  $AB$  wirken lassen, wenn man nur eine neue Translationsgeschwindigkeit einführt, welche durch  $\Omega c$  dargestellt wird. Combinirt man sie mit  $V$ , so erhält man für den neuen Reductionspunkt  $A$ , welcher jeder Punkt auf  $AB$  sein kann, eine neue Translationsgeschwindigkeit  $V' = \sqrt{V^2 + c^2 \Omega^2}$ , während die Winkelgeschwindigkeit dieselbe bleibt, wie vorher. Die Translationsgeschwindigkeit  $V'$  wird zum Minimum für  $c = 0$ , d. h., wenn  $AB$  mit der Centralaxe zusammenfällt. Man sieht, dass die Componente der Translationsgeschwindigkeit irgend eines Punktes  $A$  in der Richtung von  $AB$ , d. h. parallel der Centralaxe immer dieselbe bleibt und der Minimaltranslationsgeschwindigkeit gleich ist.

Die meisten von diesen Sätzen gelten auch für *endliche Rotationen*, wie schon in den §§ 219 bis 228 nachgewiesen wurde.

§ 237. Eine andre Darstellung, die von Nutzen ist, erhält man aus dem folgenden Satz. Ein Kräftesystem kann durch eine Kraft  $F$ , die längs einer beliebig wählbaren Geraden wirkt und eine andre Kraft  $F'$  ersetzt werden, die längs einer andern Geraden wirkt und die erste Kraft im Allgemeinen nicht schneidet. Sie heissen *conjugirte Kräfte*. Der kürzeste Abstand zwischen ihnen schneidet, wie die Statik zeigt,

die Centralaxe rechtwinklig. Die Richtungen und Grössen der Kräfte  $F$ ,  $F'$  sind derart, dass  $R$  ihre Resultante sein würde, wenn man sie parallel zu sich selbst so verpflanzen würde, dass sie die Centralaxe schneiden. Wenn  $\theta$  den Winkel zwischen den Richtungen der Kräfte  $F$ ,  $F'$  und  $a$  ihren kürzesten Abstand bezeichnet, so ist, wie bekannt,  $FF'a \sin \theta = GR$ . Wenn die willkürlich wählbare Wirkungslinie von  $F$  derart ist, dass das Moment der Kräfte um sie Null ist, so wirken sowohl  $F$  als  $F'$  längs dieser Linie in entgegengesetzten Richtungen und beide sind unendlich gross.

Mit Hülfe der Analogie erhält man die entsprechenden Sätze für die Bewegung der Körper. Jede Bewegung lässt sich durch zwei Winkelgeschwindigkeiten darstellen, die eine  $\omega$  um eine Axe, die wir nach Belieben wählen können, die andre  $\omega'$  um eine Axe, die im Allgemeinen die erste Axe nicht schneidet. Sie heissen *conjugirte Axen*. Ihr kürzester Abstand schneidet die Centralaxe rechtwinklig. Diese Winkelgeschwindigkeiten sind derart, dass  $\Omega$  ihre Resultante sein würde, wenn ihre Axen parallel zu ihren wirklichen Lagen so verlegt würden, dass sie die Centralaxe schneiden. Ist  $\theta$  der Winkel zwischen den Axen von  $\omega$ ,  $\omega'$  und  $a$  ihr kürzester Abstand, so ist  $\omega \omega' a \sin \theta = V\Omega$ . Ist die willkürlich wählbare Axe von  $\omega$  derart, dass die Componente der Geschwindigkeit eines jeden Punktes der Axe in ihrer Richtung Null ist (§ 137), so haben die Winkelgeschwindigkeiten  $\omega$ ,  $\omega'$  eine gemeinschaftliche Axe, entgegengesetzte Vorzeichen und sind unendlich gross.

§ 238. Die Geschwindigkeit der Punkte. Die Bewegung eines Körpers während der Zeit  $dt$  kann, wie in § 219 erklärt wurde, durch die Translationsgeschwindigkeit eines Reductionspunktes  $O$  und eine Winkelgeschwindigkeit um eine durch  $O$  gehende Axe dargestellt werden. Wir wollen drei rechtwinklige Axen  $Ox$ ,  $Oy$ ,  $Oz$  wählen, die dem speciellen Zweck, den wir im Auge haben, am besten dienen. Diese Axen schneiden sich in  $O$  und bewegen sich mit  $O$ , wobei sie ihre Richtung im Raum unverändert beibehalten.  $u$ ,  $v$ ,  $w$  seien die Componenten der Translationsgeschwindigkeit von  $O$  längs dieser Axen und  $\omega_x$ ,  $\omega_y$ ,  $\omega_z$  die Componenten der Winkelgeschwindigkeit. Die Winkelgeschwindigkeiten sollen positiv angenommen werden, wenn sie denselben Weg um die Axen nehmen, wie die positiven Paare in der Statik. So gehen die positiven Richtungen von  $\omega_x$ ,  $\omega_y$ ,  $\omega_z$  bez. von  $y$  nach  $z$ , von  $z$  nach  $x$ , von  $x$  nach  $y$ .

Die ganze Bewegung des Körpers während der Zeit  $dt$  ist bekannt, wenn diese sechs Grössen  $u$ ,  $v$ ,  $w$ ,  $\omega_x$ ,  $\omega_y$ ,  $\omega_z$  gegeben sind. Man kann diese sechs Grössen *die Componenten der Bewegung* nennen. Wir wollen nun zusehen, wie man die Bewegung eines Punktes  $P$  findet, dessen Coordinaten  $x$ ,  $y$ ,  $z$  sind.

Suchen wir die Geschwindigkeit von  $P$  parallel zur  $z$ -Axe.  $PN$  sei

die  $z$ -Coordinate und  $PM$  ein Loth auf  $Ox$ . Die Rotation um  $Ox$  theilt  $P$  offenbar die Geschwindigkeit  $\omega_x PM$ . Ihre Componente längs

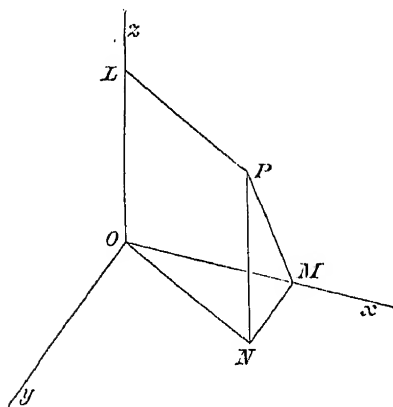
$NP$  ist  $\omega_x PM \sin NPM = \omega_x y$ . Ebenso ist die Componente in Folge der Rotation um  $Oy$  gleich  $-\omega_y x$  und die in Folge der Rotation um  $Oz$  Null. Addirt man die Translationsgeschwindigkeit  $w$  des Coordinatenanfangs, so erhält man für die ganze Geschwindigkeit von  $P$  parallel zu  $Oz$

$$w' = w + \omega_x y - \omega_y x$$

und ähnlich die Geschwindigkeiten parallel den andern Axen

$$u' = u + \omega_y z - \omega_z y,$$

$$v' = v + \omega_z x - \omega_x z.$$



§ 239. Es ist manchmal nöthig, die Darstellung einer gegebenen Bewegung von einem Reductionspunkt auf einen andern zu übertragen. Die obigen Formeln setzen uns dazu in den Stand. Nehmen wir z. B. an, unser neuer Reductionspunkt liege im Punkt  $O'$  und die Axen für  $O'$  seien denen für  $O$  parallel.  $(\xi, \eta, \zeta)$  seien die Coordinaten von  $O'$  und  $u', v', w', \omega'_x, \omega'_y, \omega'_z$  die Translations- und Winkelcomponenten der Bewegung für den Reductionspunkt  $O'$ . Wir haben nun zwei Darstellungen derselben Bewegung, sie müssen für die Translationsgeschwindigkeiten des Punktes  $P$  dasselbe Resultat geben. Daher gilt

$$u + \omega_y z - \omega_z y = u' + \omega'_y (z - \xi) - \omega'_z (y - \eta),$$

$$v + \omega_z x - \omega_x z = v' + \omega'_z (x - \xi) - \omega'_x (z - \xi),$$

$$w + \omega_x y - \omega_y x = w' + \omega'_x (y - \eta) - \omega'_y (x - \xi)$$

für alle Werthe von  $x, y, z$ .

Diese Gleichungen liefern  $\omega'_x = \omega_x, \omega'_y = \omega_y, \omega'_z = \omega_z$ , so dass also für jeden Reductionspunkt, den man wählen möge, die Winkelgeschwindigkeit nach Richtung und Grösse dieselbe bleibt. Siehe § 221. Man sieht auch, dass die Ausdrücke für  $u', v', w'$  denen in § 238 analog sind, wie zu erwarten war.

Man vergleiche damit die entsprechenden Formeln der Statik. Sind alle Kräfte eines Systems drei Kräften  $X, Y, Z$ , die an einem Reductionspunkt längs dreier rechtwinkliger Axen wirken, zusammen mit drei Paaren um diese Axen äquivalent, so sind, wie wir wissen, die entsprechenden Kräfte und Paare für einen andern Reductionspunkt  $\xi, \eta, \zeta$ :

$$X' = X, \quad L' = L + Y\xi - Z\eta,$$

$$Y' = Y, \quad M' = M + Z\xi - X\zeta,$$

$$Z' = Z, \quad N' = N + X\eta - Y\xi.$$

§ 240. Die äquivalente Schraubenbewegung zu finden. Wenn die Bewegung durch die Translationsgeschwindigkeiten  $(u, v, w)$  eines Reductionspunktes  $O$  und die Winkelgeschwindigkeiten  $(\omega_x, \omega_y, \omega_z)$  gegeben ist, die Centralaxe, die Translationsgeschwindigkeit längs derselben und die Winkelgeschwindigkeit um sie, d. h. die äquivalente Schraubenbewegung zu finden.

Wählt man irgend einen Punkt  $P$  auf der Centralaxe zum Reductionspunkt, so sind die Componenten der Winkelgeschwindigkeit dieselben wie für den Reductionspunkt  $O$ . Ist  $\Omega$  die Resultante der Winkelgeschwindigkeiten  $\omega_x, \omega_y, \omega_z$  (§ 233), so sind

1) Die Richtungs cosinus der Centralaxe

$$\cos \alpha = \frac{\omega_x}{\Omega}, \quad \cos \beta = \frac{\omega_y}{\Omega}, \quad \cos \gamma = \frac{\omega_z}{\Omega}.$$

2) Die Winkelgeschwindigkeit um die Centralaxe  $= \Omega$ .

3) Die Componente der Geschwindigkeit eines jeden Punktes in einer zur Centralaxe parallelen Richtung ist dieselbe und derjenigen längs der Centralaxe gleich. Siehe § 222 oder § 236. Ist daher  $V$  die Translationsgeschwindigkeit längs der Centralaxe, so hat man

$$V = u \cos \alpha + v \cos \beta + w \cos \gamma,$$

also

$$V\Omega = u\omega_x + v\omega_y + w\omega_z.$$

4)  $(x, y, z)$  seien die Coordinaten von  $P$ , d. h. eines Punktes der Centralaxe. Die Translationsgeschwindigkeit von  $P$  findet dann längs der Centralaxe statt; daher ist

$$\frac{u + \omega_y z - \omega_z y}{\omega_x} = \frac{v + \omega_z x - \omega_x z}{\omega_y} = \frac{w + \omega_x y - \omega_y x}{\omega_z}.$$

Dies sind mithin die Gleichungen der Centralaxe.

Multipliziert man den Zähler und Nenner eines jeden dieser Brüche bez. mit  $\omega_x, \omega_y, \omega_z$  und addirt sie, so ergibt sich jeder Bruch

$$= \frac{u\omega_x + v\omega_y + w\omega_z}{\omega_x^2 + \omega_y^2 + \omega_z^2} = \frac{V}{\Omega}.$$

Dieses Verhältniss heisst *der Pfeil der Schraube*.

§ 241. Die Invarianten. Aus (3) folgt, dass für jeden Reductionspunkt, den man wählen mag und für jede Richtung der Axen die Grösse  $I = u\omega_x + v\omega_y + w\omega_z$  invariabel und gleich  $V\Omega$  ist. Diese Grösse kann man daher *die Invariante der Componenten* nennen. Die resultirende Winkelgeschwindigkeit ist ebenfalls invariabel und mag *die Invariante der Rotation* heissen.

Ist die Bewegung derart, dass die erste der Invarianten Null wird, so muss entweder  $V=0$  oder  $\Omega=0$  sein. *Es ist dies daher die Bedingung, unter welcher die Bewegung entweder eine einfache Translation oder eine einfache Rotation ist.* Soll die Bewegung einer einfachen Rotation äquivalent sein, so dürfen ausserdem  $\omega_x, \omega_y, \omega_z$  nicht sämmtlich Null sein.



Die entsprechende Invariante in der Statik ist  $LX + MY + NZ = GR$ . Verschwindet sie, so sind die Kräfte entweder einer einzelnen resultirenden Kraft oder einem einzelnen Paar äquivalent.

Beisp. 1. Man suche die Invarianten  $I$  und  $\Omega$  von (1) zwei Winkelgeschwindigkeiten  $\omega, \omega'$ , (2) zwei Translationsgeschwindigkeiten  $v, v'$ , (3) einer Winkelgeschwindigkeit  $\omega$  und einer Translationsgeschwindigkeit  $v$ . Die Resultate sind

$$\begin{aligned} (1) \quad I &= \omega \omega' r \sin \theta, & (2) \quad I &= 0, & (3) \quad I &= \omega v \cos \theta, \\ \Omega^2 &= \omega^2 + \omega'^2 + 2\omega\omega' \cos \theta, & \Omega &= 0, & \Omega &= \omega, \end{aligned}$$

wobei  $\theta$  der Winkel zwischen den Axen der Geschwindigkeiten und  $r$  der kürzeste Abstand ist. Um den Beweis zu führen, wähle man passende Axen und drücke die Werthe der sechs Componenten  $u, v, w, \omega_x, \omega_y, \omega_z$  für den Coordinatenanfang als Reductionspunkt nach den §§ 238, 239 aus. Der Werth von  $I$  folgt aus seiner Definition. Man nehme hier  $r$  zur  $x$ -Axe und die Axe von  $\omega$  zu derjenigen der  $z$ . Das Resultat (2) ergibt sich durch Zusammensetzung der Geschwindigkeiten.

Beisp. 2. Die Invariante  $I$  einer beliebigen Anzahl von Winkelgeschwindigkeiten  $\omega_1, \omega_2$ , etc. und von Translationsgeschwindigkeiten  $v_1, v_2$ , etc. ist die Summe der einzelnen Invarianten der zu je zwei zusammengenommenen Geschwindigkeiten oder in algebraischer Form

$$I = \Sigma \omega v \cos \varphi + \Sigma \omega \omega' r \sin \theta,$$

worin  $\varphi$  den Winkel zwischen der Richtung von  $v$  und der Axe von  $\omega$ ,  $\theta$  den Winkel zwischen den Axen von  $\omega, \omega'$  und  $r$  den kürzesten Abstand bedeutet.

Bei dem Beweis beachte man, dass jede der sechs Bewegungscomponenten eine lineare Function von  $\omega_1, \omega_2$ , etc.;  $v_1, v_2$ , etc. ist. Die Invariante  $I$  ist daher eine quadratische Function von der Form

$$I = A_{11} \omega_1^2 + A_{12} \omega_1 \omega_2 + \text{etc.} + B_{11} \omega_1 v_1 + B_{12} \omega_1 v_2 + \text{etc.} + C_{11} v_1^2 + C_{12} v_1 v_2 + \text{etc.},$$

worin die Coefficienten von der Grösse von  $\omega_1, \omega_2$ , etc.,  $v_1, v_2$ , etc. nicht abhängig sind. Setzt man alle Geschwindigkeiten jedesmal mit Ausnahme einer einzigen gleich Null, so ergibt sich  $A_{11} = 0, A_{22} = 0$ , etc.,  $C_{11} = 0$ , etc. Setzt man dann alle Geschwindigkeiten jedesmal mit Ausnahme von zweien gleich Null und vergleicht die Resultate mit den in Beisp. 1 gegebenen, so findet man, dass die übrigen Coefficienten die oben angegebenen Werthe haben.

Beisp. 3. Die Invariante  $I$  zweier Schraubenbewegungen  $(\omega, v), (\omega', v')$  ist

$$I = \omega v + \omega' v' + (\omega v' + \omega' v) \cos \theta + \omega \omega' r \sin \theta.$$

Um es zu beweisen, addire man die sechs Invarianten der vier Grössen  $\omega, v, \omega', v'$ , je zwei zusammengenommen.

§ 242. Es kann die Aufgabe gestellt werden, die Rotationsaxe zu finden, wenn die Bewegung einer einfachen Rotation äquivalent ist. Sie ist aber offenbar die Centralaxe unter anderem Namen und schon oben gefunden worden.

§ 243. Eine Schraubenbewegung kann so auf zwei verschiedene Arten gegeben sein. Es können die sechs Componenten der Bewegung, die wir  $(u, v, w, \omega_x, \omega_y, \omega_z)$  genannt haben und die auch von dem zur Reduction gewählten Punkt abhängen, oder die Gleichungen der

Centralaxe, die Geschwindigkeit  $V$  längs ihr und die Winkelgeschwindigkeit  $\Omega$  um sie gegeben sein.

In dem letzteren Fall ist ein Uebereinkommen nöthig, um Verwechselungen in Bezug auf die Richtung der Geschwindigkeiten  $V$  und  $\Omega$  zu vermeiden. Die eine Richtung der Axe heisst die positive, die entgegengesetzte die negative Richtung.  $V$  ist dann positiv, wenn es eine Geschwindigkeit in der positiven Richtung mittheilt und ebenso  $\Omega$  positiv, wenn einer Person, die mit ihrem Rücken so auf der Axe liegt, dass die positive Richtung von ihren Füßen nach dem Kopf geht, die Rotation in der Richtung der Zeiger einer Uhr erscheint. Dies ist selbstverständlich nur die gewöhnliche Definition eines positiven Paares, wie sie in der Statik gegeben wird. Siehe § 231.

Die Methode, die positive Richtung der Axe zu bestimmen, ist leicht verständlich, wenn auch etwas umständlich zu erklären. Um den Coordinatenanfang als Centrum beschreibe man mit dem Radius gleich der Einheit eine Kugel und lasse sie von den *positiven* Richtungen der Axen in  $x, y, z$  getroffen werden. Eine zur Centralaxe Parallele, die durch den Coordinatenanfang geht, schneide die Kugel in  $L$  und  $L'$ . Die Richtungscosinusse der Axe seien gegeben, sagen wir,  $l, m, n$ . Dann sind  $(l, m, n)$  die Cosinusse gewisser auf der Kugel gezogener Bogen, die bei  $x, y, z$  beginnen und z. B. bei  $L$  endigen, während  $(-l, -m, -n)$  die Cosinusse der Supplementbogen sind, die an denselben Punkten  $x, y, z$  beginnen und bei  $L'$  endigen.  $OL$  ist dann die positive und  $OL'$  die negative Richtung der Axe.

§ 244. *Die Lage der Centralaxe, die Translationsgeschwindigkeit längs derselben und die Winkelgeschwindigkeit um sie sind gegeben; man soll die Componenten der Bewegung finden, wenn der Coordinatenanfang zum Reductionspunkt genommen wird.*

Dies ist offenbar die umgekehrte Aufgabe, wie die eben besprochene. Die Gleichung der Centralaxe sei

$$\frac{x-f}{l} = \frac{y-g}{m} = \frac{z-h}{n},$$

worin  $(lmn)$  die Richtungscosinusse der Axe sind.  $V$  sei die Translations-,  $\Omega$  die Winkelgeschwindigkeit.

Würde  $(fgh)$  zum Reductionspunkt genommen, so wären die Componenten der Translationsgeschwindigkeit  $lV, mV, nV$  und die Componenten der Winkelgeschwindigkeit  $l\Omega, m\Omega, n\Omega$ . Daher sind nach § 238, wenn man  $-f, -g, -h$  statt  $x, y, z$  setzt, die Componenten der Bewegung für den Coordinatenanfang als Reductionspunkt

$$u = lV - \Omega(mh - ng), \quad \omega_x = l\Omega,$$

$$v = mV - \Omega(nf - lh), \quad \omega_y = m\Omega,$$

$$w = nV - \Omega(lg - mf), \quad \omega_z = n\Omega.$$

§ 245. **Zusammensetzung und Zerlegung von Schraubenbewegungen.**  
*Gegeben sind zwei Schraubenbewegungen; man soll sie in eine einzelne Schraubenbewegung zusammensetzen und umgekehrt, wenn eine Schraubenbewegung gegeben ist, sie in zwei zerlegen.*

In dem ersten Fall wähle man einen passenden Reductionspunkt und geeignete Axen. Nach § 244 findet man die sechs Bewegungscomponenten jeder Schraubenbewegung für diesen Reductionspunkt. Addirt man sie zu je zweien, so ergeben sich die sechs Componenten der resultirenden Schraubenbewegung und schliesslich aus § 240 die Centralaxe, die Translations- und Winkelgeschwindigkeit der Schraubenbewegung.

Umgekehrt lässt sich eine gegebene Schraubenbewegung auf unendlich viele Arten in zwei Schraubenbewegungen zerlegen. Da eine Schraubenbewegung durch sechs Componenten für irgend einen Reductionspunkt dargestellt wird, so haben wir bei den beiden Schrauben zwölf Grössen zur Verfügung, von denen sechs erforderlich sind, um die beiden Schraubenbewegungen der gegebenen äquivalent zu machen. Es steht daher in unserm Belieben, wie wir die sechs übrigen Grössen wählen wollen.

So kann man als eine Schraubenaxe eine beliebige gegebene Linie wählen mit irgend einer Translationsgeschwindigkeit längs derselben und einer willkürlichen Winkelgeschwindigkeit um sie. Die andre Schraubenbewegung findet man dann durch Umdrehung dieser angenommenen und die Verbindung der so geänderten mit der gegebenen Bewegung. Dieser zusammengesetzten Bewegung ist die zweite Schraubenbewegung alsdann äquivalent.

Oder man kann die Bewegung durch zwei Schraubenbewegungen darstellen, deren Pfeile Null sind, wobei dann noch die Axe der einen willkürlich wählbar bleibt. Dies sind die conjugirten Axen, von denen in § 237 die Rede war.

*Die folgende Art, zwei Schraubenbewegungen zusammenzusetzen, empfiehlt sich, wenn der kürzeste Abstand zwischen ihren Axen der Lage und Grösse nach bekannt ist.*

$(\omega, v)$ ,  $(\omega', v')$  mögen die Winkel- und Translationsgeschwindigkeiten der beiden gegebenen,  $(\Omega, V)$  der resultirenden Schraubenbewegung sein. Durch Gleichsetzung der Invarianten (§ 241) ergibt sich

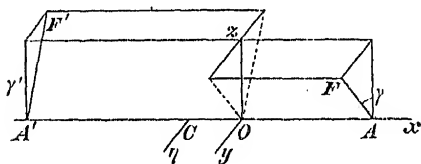
$$\Omega V = \omega v + \omega' v' + (\omega v' + \omega' v) \cos \theta + \omega \omega' r \sin \theta$$

$$\Omega^2 = \omega^2 + \omega'^2 + 2 \omega \omega' \cos \theta,$$

worin  $\theta$  die Neigung der Axen und  $r$  ihr kürzester Abstand ist. Aus diesen Gleichungen folgt  $\Omega$  und  $V$ .

Wir wollen zunächst zeigen, dass die Axe der resultirenden Schraubenbewegung den kürzesten Abstand  $AA'$  der Axen der gegebenen Schrauben rechtwinklig schneidet. Da die Centralaxe der auf irgend einen Reductionspunkt übertragenen Resultanten von  $\omega$ ,  $\omega'$  parallel ist, so muss diese Axe auf  $AA'$  senkrecht stehen. Da ferner  $AA'$  die Axen der beiden gegebenen Schrauben rechtwinklig

schneidet, so ist die Componente der Geschwindigkeit eines jeden Punktes von  $AA'$  längs  $AA'$  Null und weil  $AA'$  senkrecht auf der Centralaxe der resultirenden Schraube steht, so muss es auch diese Axe schneiden.



Schliesslich wollen wir zeigen, dass der Abstand  $\xi$  der Centralaxe der beiden Schraubenbewegungen von dem Mittelpunkt  $C$  des kürzesten Abstandes durch

$$\Omega^2 \xi = \frac{1}{2} r (\omega^2 - \omega'^2) + (\omega v - \omega' v) \sin \theta$$

gegeben ist, wobei die positive Richtung von  $\xi$  nach der Axe von  $\omega$  hingeht.

$C\eta$  sei ein Loth auf die  $AA'$  und die gesuchte Centralaxe  $Oz$  enthaltende Ebene. Setzt man die Componente der Geschwindigkeit von  $C$  längs  $C\eta$  in Folge der beiden Schraubenbewegungen derjenigen, welche die Folge der resultirenden Schraubenbewegung ist, gleich, so erhält man

$$-\Omega \xi = v \sin \gamma - v' \sin \gamma' - \frac{1}{2} r \omega \cos \gamma + \frac{1}{2} r \omega' \cos \gamma',$$

worin  $\gamma, \gamma'$  die Winkel sind, welche die Axen  $AF, A'F'$  der gegebenen Schrauben mit der Centralaxe  $Oz$  machen. Durch Zerlegung ergibt sich

$$\Omega \sin \gamma = \omega \sin \theta, \quad \Omega \cos \gamma = \omega + \omega' \cos \theta,$$

$$\Omega \sin \gamma' = \omega \sin \theta, \quad \Omega \cos \gamma' = \omega' + \omega \cos \theta$$

und endlich durch Substitution der Werthe von  $\gamma, \gamma'$  das obige Resultat.

§ 246. Beispiele. Beisp. 1. Der Ort der Punkte eines sich um einen festen Punkt bewegenden Körpers, welche in irgend einem Moment dieselbe resultirende Geschwindigkeit haben, ist ein Kreiscylinder.

Beisp. 2. Von einem festen Punkt  $O$  werden Radienvectoren gezogen, die der Richtung und Grösse nach die Geschwindigkeiten aller Punkte eines in Bewegung befindlichen starren Körpers darstellen; man beweise, dass die Endpunkte dieser Radienvectoren in irgend einem Augenblick in einer Ebene liegen.

[Coll. Exam.]

Diese Ebene steht offenbar senkrecht auf der Centralaxe und ihr Abstand von  $O$  misst die Geschwindigkeit längs dieser Axe. § 228, Beisp. 1.

Beisp. 3. Der Ort der Tangenten an die Bahnen der verschiedenen Punkte derselben Geraden bei der Momentanbewegung eines Körpers ist ein hyperbolisches Paraboloid.

$AB$  sei die gegebene Gerade,  $CD$  die zu ihr conjugirte. Die Punkte von  $AB$  drehen sich um  $CD$  und daher gehen die Tangenten sämmtlich durch zwei Gerade, nämlich durch  $AB$  und seine folgende Lage  $A'B'$  und sind auch sämmtlich einer Ebene parallel, die senkrecht auf  $CD$  steht.

Beisp. 4. Ein Körper unterliege einem Zwang, der zwei Bewegungen  $A$  und  $B$  zulässt, von denen jede durch eine Schraubenbewegung dargestellt werden kann und  $m, m'$  seien die Pfeile der Schrauben. Der Körper muss dann eine Schraubenbewegung zulassen, die aus unbegrenzt kleinen Rotationen  $\omega dt, \omega' dt$  um die Axen dieser Schrauben zusammengesetzt ist, die selbstverständlich von den Translationen  $m \omega dt, m' \omega' dt$  begleitet sind. Man beweise, (1) dass der Ort der Axen aller dieser Schrauben die Fläche  $z(x^2 + y^2) = 2axy$  ist. (2) Wenn dem Körper eine Schraubenbewegung längs einer Erzeugenden dieser Fläche mitgetheilt wird, so ist ihr Pfeil  $C + a \cos 2\theta$ , worin  $c$  eine Constante ist, die für alle Erzeugenden dieselbe bleibt und  $\theta$  den Winkel zwischen der Erzeugenden und der  $x$ -Axe bedeutet. (3) Die Grösse und Lage der Fläche werde so gewählt, dass die beiden gegebenen Schrauben  $A$  und  $B$  mit ihrem

Schrauben der Fläche und verrückt einen Körper derart, dass man ihn längs jeder einen kleinen Winkel beschreiben lässt, der dem Sinus des Winkels zwischen den beiden andern proportional ist, so nimmt der Körper nach der letzten Verrückung wieder dieselbe Lage ein, die er vor der ersten hatte.

Diese Fläche hat Sir R. Ball, dem man die obigen vier Sätze verdankt, *Cylindroid* genannt.

Beisp. 5. Eine Momentanbewegung ist durch die Translationsgeschwindigkeiten  $(u, v, w)$  längs der Coordinatenaxen und die Winkelgeschwindigkeiten  $(\omega_x, \omega_y, \omega_z)$  um sie gegeben. Man soll sie durch zwei conjugirte Winkelgeschwindigkeiten darstellen, von denen eine um die willkürliche Gerade  $\frac{x-f}{l} = \frac{y-g}{m} = \frac{z-h}{n}$  stattfindet.

Ist  $\Omega$  die Winkelgeschwindigkeit um die gegebene Axe, so hat man

$$\frac{u\omega_x + v\omega_y + w\omega_z}{\Omega} = lu + mv + nw - \begin{vmatrix} f, & g, & h \\ \omega_x, & \omega_y, & \omega_z \\ l, & m, & n \end{vmatrix},$$

worin  $(l, m, n)$  die augenblicklichen Richtungscosinusse sind.

Die Gleichungen für die conjugirte Axe sind

$$\begin{vmatrix} x, & y, & z \\ \omega_x, & \omega_y, & \omega_z \\ l, & m, & n \end{vmatrix} = lu + mv + nw, \quad \begin{vmatrix} x, & y, & z \\ \omega_x, & \omega_y, & \omega_z \\ f, & g, & h \end{vmatrix} = (f-x)u + (g-y)v + (h-z)w.$$

Diese allgemeinen Gleichungen vereinfachen sich, wenn die speciellen Umstände des Problems es erlauben, die Coordinatenaxen so zu wählen, dass einige Constanten Null werden. So ist z. B., wenn man die Centralaxe der Momentanbewegung zur  $z$ -Axe und den kürzesten Abstand zwischen ihr und der gegebenen Geraden zur  $x$ -Axe nimmt,  $u=0$ ,  $v=0$ ,  $\omega_x=0$ ,  $\omega_y=0$ ;  $g=0$ ,  $h=0$  und  $l=0$ .

Die erste Gleichung erhält man auf die in § 245 angegebene Art. Man drehe  $\Omega$  um und verbinde es mit der gegebenen Bewegung; die Invariante dieser zusammengesetzten Bewegung verschwindet alsdann. Hat man die Winkelgeschwindigkeit  $\Omega$  auf diese Weise gefunden, so ist die conjugirte Axe die Centralaxe der zusammengesetzten Bewegung und wird wie in § 245 ermittelt. Soll aber die conjugirte Axe unabhängig von  $\Omega$  gefunden werden, so kann man die zweite und dritte Gleichung benutzen.

Die zweite Gleichung ergibt sich daraus, dass die Bewegungsrichtung eines Punktes der conjugirten senkrecht zur gegebenen Axe ist.

Die dritte lässt sich daraus ableiten, dass die Bewegungsrichtung auch senkrecht auf der Geraden steht, die den Punkt mit  $(f, g, h)$  verbindet.

Diese Resultate gelten scheinbar nicht, wenn die gegebene Bewegung und die gegebene Axe derart sind, dass das aus der ersten Gleichung gefundene  $\Omega$  unendlich gross wird.

Es ist dies jedoch nur ein Grenzfall. Man sieht leicht, dass sowohl der zweiten als der dritten Gleichung genügt wird, wenn man  $x=f+lt$ ,  $y=g+mt$ ,  $z=h+nt$  substituirt, d. h. die conjugirte Axe fällt mit der gegebenen zusammen. Wenn  $\Omega'$  die Winkelgeschwindigkeit um die conjugirte Axe bezeichnet, so sind  $\Omega$  und  $\Omega'$  zusammen der resultirenden Winkelgeschwindigkeit der gegebenen Bewegung äquivalent; daraus folgt, dass  $\Omega'$  ebenfalls unendlich gross ist. In diesem

Grenzfall wird also die Bewegung durch zwei unendlich grosse entgegengesetzte Winkelgeschwindigkeiten um zwei zusammenfallende Axen dargestellt.

Ein anderer Grenzfall ist der, in dem die gegebene Axe der Centralaxe der gegebenen Bewegung parallel und die Invariante der Bewegung nicht Null ist. Alsdann sind  $l$ ,  $m$ ,  $n$  proportional  $\omega_x$ ,  $\omega_y$ ,  $\omega_z$  und die zweite Gleichung stellt eine Ebene im Unendlichen vor. Die conjugirte Axe liegt daher im Unendlichen und die Winkelgeschwindigkeit um sie ist Null.

Noch ein dritter Grenzfall existirt, wenn nämlich die Invariante der gegebenen Bewegung Null ist. Ist die gegebene Bewegung eine einfache Rotation um eine Axe, sagen wir  $Oz$ , und ist die gegebene Axe nicht parallel  $Oz$  und schneidet es auch nicht, so ist  $\Omega = 0$  und die conjugirte Axe fällt mit  $Oz$  zusammen. Ist die gegebene Axe parallel  $Oz$  oder schneidet es, so kann  $\Omega$  jeden Werth haben und die conjugirte Axe ist die resultirende Axe der gegebenen Rotation und des umgedrehten  $\Omega$ .

Ist die gegebene Bewegung eine einfache Translation parallel einer Axe  $Oz$  und steht die gegebene Axe nicht senkrecht auf  $Oz$ , so ist  $\Omega = 0$  und liegt die conjugirte Axe im Unendlichen. Steht dagegen die gegebene Axe senkrecht auf  $Oz$ , so kann  $\Omega$  jeden Werth haben und die conjugirte Axe findet man wie zuvor; siehe § 234.

Bei der analytischen Behandlung dieser Grenzfälle wird es gut sein, die Axen so zu wählen, dass die oben angegebenen Vereinfachungen eintreten können.

Beisp. 6. Steht die eine conjugirte Axe einer Momentanbewegung senkrecht auf der Centralaxe, so schneidet die andere sie und umgekehrt. Läuft die eine conjugirte Axe der Centralaxe parallel, so liegt die andere in unendlich grosser Entfernung und umgekehrt.

Beisp. 7. Ein Körper wird von irgend einer Lage im Raum in irgend eine andere bewegt und jeder Punkt des Körpers in der ersten Lage mit demselben Punkt in der zweiten Lage verbunden. Alle so gefundenen Geraden, welche durch einen gegebenen Punkt gehen, bilden einen Kegel zweiten Grades. Ferner bilden die Mittelpunkte aller dieser Linien einen Körper, der im Stande ist, eine unendlich kleine Bewegung zu machen und zwar jeder Punkt längs der Linie, auf welcher er liegt. Cayley's *Report to the British Assoc.*, 1862.

§ 247. Charakteristik und Focus. Wenn die Momentanbewegung eines Körpers durch zwei conjugirte Rotationen um zwei zu einander *rechtwinklige* Axen dargestellt wird, so kann man durch jede Axe eine Ebene legen, die auf der andern senkrecht steht. Die in der Ebene liegende Axe nennt man die *Charakteristik* dieser Ebene und die zu der Ebene senkrechte Axe schneidet sie in ihrem *Focus*. Die beiden Namen rühren von Chasles her, *Comptes Rendus*, 1843. Auch von den folgenden Beispielen sind einige von ihm, jedoch ohne Beweise.

Beisp. 1. Man zeige, dass jede Ebene eine Charakteristik und einen Focus hat.

Die Centralaxe schneide die Ebene in  $O$ . Man nehme die Componenten der Translations- und Winkelgeschwindigkeit in den beiden Richtungen  $Ox$ ,  $Oz$ , von denen die erste in der Ebene liegt und die zweite senkrecht auf ihr steht. Die Translationen längs  $Ox$ ,  $Oz$  kann man entfernen, wenn man die Rotationsaxen parallel zu sich selbst nach § 234 verschiebt. Auf diese Art wird die Bewegung durch eine Rotation um eine in der Ebene liegende Axe und eine zweite um eine Axe, die senkrecht zu ihr ist, dargestellt. Es folgt daraus auch, dass die Charakteristik einer Ebene der Projection der Centralaxe auf sie parallel ist.

Beisp. 2. Wenn eine Ebene in dem Körper festliegt und sich mit dem Körper bewegt, so schneidet sie ihre folgende Lage in ihrer Charakteristik. Die Componente der Geschwindigkeit eines Punktes  $P$  der Ebene senkrecht zur Ebene ist seinem Abstand von der Charakteristik proportional und die in der Ebene

liegende Componente ist dem Abstand vom Focus proportional und steht senkrecht auf diesem Abstand.

Beisp. 3. Wenn zwei conjugirte Axen eine Ebene in  $F$  und  $G$  schneiden, so geht  $FG$  durch den Focus. Wenn ferner zwei conjugirte Axen auf eine Ebene projectirt werden, so treffen sie sich in der Charakteristik der Ebene.

Beisp. 4. Wenn sich zwei Axen  $CM$ ,  $CN$  im Punkt  $C$  schneiden, so liegen ihre conjugirten Axen in einer Ebene, deren Focus  $C$  ist und treffen sich in dem Focus der Ebene  $CMN$ .

Es folgt dies daraus, dass die Bewegungsrichtung eines jeden Punktes einer Geraden, die eine Axe schneidet, nur dann senkrecht zur Geraden ist, wenn sie auch die conjugirte Axe trifft.

Beisp. 5. Sind zwei beliebige Axen und ihre conjugirten Axen gegeben, so liegen die vier Geraden auf demselben Hyperboloid.

Beisp. 6. Die Momentanbewegung eines Körpers ist durch die Translations- und Winkelgeschwindigkeiten  $(u, v, w)$ ,  $(\omega_1, \omega_2, \omega_3)$  gegeben; man beweise, dass die Charakteristik der Ebene

$$Ax + By + Cz + D = 0$$

die Durchschnittslinie derselben mit der Ebene

$$A(u + \omega_2 z - \omega_3 y) + B(v + \omega_3 x - \omega_1 z) + C(w + \omega_1 y - \omega_2 x) = 0$$

ist und dass sich ihr Focus aus

$$\frac{u + \omega_2 z - \omega_3 y}{A} = \frac{v + \omega_3 x - \omega_1 z}{B} = \frac{w + \omega_1 y - \omega_2 x}{C}$$

ergibt.

Denn die Charakteristik ist der Ort der Punkte, deren Bewegungsrichtungen senkrecht zur Normalen auf die Ebene sind und der Focus ist der Punkt, dessen Bewegungsrichtung senkrecht auf der Ebene steht.

Was wird aus diesen Gleichungen, wenn die Centralaxe die  $z$ -Axe ist?

Beisp. 7. Der Ort der Charakteristiken der Ebenen, die durch eine gegebene Gerade gehen, ist ein einschaliges Hyperboloid; dabei ist der kürzeste Abstand zwischen der gegebenen Geraden und der Centralaxe die Richtung eines Hauptdurchmessers und die beiden andern Hauptdurchmesser halbiren den Winkel zwischen der gegebenen Geraden und der Centralaxe und seinen Nebenwinkel. Man beweise auch, dass der Ort aller Foci der Ebenen die zur gegebenen Geraden conjugirte Axe ist.

Beisp. 8. Irgend eine Fläche  $A$  liege in einem Körper fest und bewege sich mit ihm; die Normalebenen auf die Bahnen aller ihrer Punkte bilden die Enveloppe einer zweiten Fläche  $B$ . Man beweise, dass, wenn die Fläche  $B$  in dem Körper festgelegt wird und sich mit ihm bewegt, die Normalebenen auf die Bahnen ihrer Punkte die Enveloppe der Fläche  $A$  bilden, so dass also die Flächen  $A$  und  $B$  conjugirte Eigenschaften besitzen, indem jede Fläche der Ort der Foci der Berührungsebenen an die andre ist. Man beweise, dass wenn die eine Fläche eine Fläche zweiten Grades ist, es dann auch die andre ist.

## Sich bewegende Axen und die Euler'schen Gleichungen.

§ 248. In § 230 ist gezeigt worden, dass sich die in der Zeit  $dt$  erfolgende Verrückung eines Körpers, der sich um einen festen Punkt  $O$  bewegt, durch Drehung des Körpers um drei Gerade  $OA$ ,  $OB$ ,  $OC$  construiren lässt, wobei der Körper gewisse Winkel  $\omega_1 dt$ ,  $\omega_2 dt$ ,  $\omega_3 dt$  beschreibt. Ebenso

lässt sich die Verrückung während des nächsten Zeitintervalls  $dt$  dadurch darstellen, dass man den Körper um drei andre Gerade  $OA'$ ,  $OB'$ ,  $OC'$  rotiren und dabei gewisse andre Winkel  $\omega_1' dt$ ,  $\omega_2' dt$ ,  $\omega_3' dt$  beschreiben lässt. Wenn die beiden Axensysteme unendlich nahe beieinander liegen und die Bewegung des Körpers stetig ist, so unterscheiden sich die Winkelgeschwindigkeiten  $\omega_1'$ , etc. von  $\omega'$  etc. nur durch unendlich kleine Grössen. Die Bezugsaxen heissen in diesem Fall sich bewegende Axen. Man beachte, dass  $\omega_3 dt$  den Rotationswinkel um  $Oz$  nicht in Bezug auf die sich bewegende Ebene, die  $OA$  und  $OC$  enthält, misst, sondern in Bezug auf eine im Raum festliegende Ebene, die durch die momentane Lage von  $OC$  geht.

§ 249.  $O_x$ ,  $O_y$ ,  $O_z$  seien die rechtwinkligen im Raum festliegenden Axen und  $\omega_x$ ,  $\omega_y$ ,  $\omega_z$  die Componenten der Winkelgeschwindigkeit eines Körpers zur Zeit  $t$ .  $OA$ ,  $OB$ ,  $OC$  seien drei rechtwinklige Axen, die sich um den festen Punkt  $O$  bewegen und  $\omega_1$ ,  $\omega_2$ ,  $\omega_3$  die Componenten der Winkelgeschwindigkeit desselben Körpers zur selben Zeit. Fallen die beiden Axensysteme der Lage nach zur Zeit  $t$  zusammen, so ist  $\omega_1 = \omega_x$ ,  $\omega_2 = \omega_y$ ,  $\omega_3 = \omega_z$ ; zur Zeit  $t + dt$  haben sich aber die beiden Systeme getrennt und man kann nicht länger behaupten, dass  $\omega_3 + d\omega_3 = \omega_z + d\omega_z$  ist.

Wir wollen nun zeigen, dass bis auf kleine Grössen höherer Ordnung  $d\omega_3 = d\omega_z$  ist, wenn die sich bewegenden Axen im Körper festliegen.  $OR$ ,  $OR'$  seien die resultirenden Rotationsaxen des Körpers zu den Zeiten  $t$  und  $t + dt$ , d. h. eine Rotation  $\Omega dt$  um  $OR$  bringe den Körper in die Lage, in welcher  $OC$  mit  $Oz$  zur Zeit  $t$  zusammenfällt und eine weitere Rotation  $\Omega' dt$  um  $OR'$  bringe den Körper in die benachbarte Lage zur Zeit  $t + dt$ , während in demselben Zeitintervall  $dt$  sich  $OC$  in die Lage  $OC'$  bewegt. Nach der Definition des Differentialquotienten ist dann

$$\frac{d\omega_3}{dt} = \text{Lim.} \frac{\Omega' \cos R'C' - \Omega \cos RC}{dt},$$

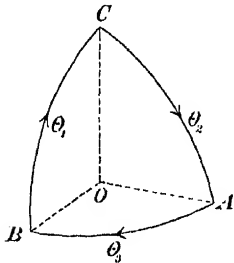
$$\frac{d\omega_z}{dt} = \text{Lim.} \frac{\Omega' \cos R'z - \Omega \cos Rz}{dt}.$$

Die Winkel  $RC$  und  $Rz$  sind nach der Voraussetzung gleich. Da  $OC$  in dem Körper festliegt, so macht es während der Drehung des Körpers um  $OR'$  einen constanten Winkel mit  $OR'$ ; daher sind auch die Winkel  $R'C'$  und  $R'z$  gleich. Mithin sind die Differentialquotienten ebenfalls gleich.

§ 250. Der vorstehende Satz ist der specielle Fall eines Fundamentaltheorems der Theorie sich bewegender Axen. Das letztere allgemeine Theorem gilt nicht nur für Winkelgeschwindigkeiten, sondern für jeden Vector oder jede Richtungsgrösse, die dem Parallelogrammgesetz unterworfen ist.



Nach § 215 dreht sich das bewegliche Axensystem um eine Momentanaxe mit einer Winkelgeschwindigkeit, die  $\theta$  heissen mag.  $\theta_1, \theta_2, \theta_3$  seien die Componenten von  $\theta$  um die Axen  $OA, OB, OC$ . In der Figur stellt dann  $\theta_1$  die Geschwindigkeit dar, mit welcher sich ein jeder Punkt des Kreisbogens  $BC$  längs dieses Bogens bewegt,  $\theta_2$  diejenige, mit welcher sich ein Punkt von  $CA$  längs  $CA$  bewegt u. s. f.



$V_1, V_2, V_3$  und  $V_x, V_y, V_z$  seien die Componenten eines Vectors in Bezug auf die beweglichen Axen  $OA, OB, OC$  bez. auf die festen Axen  $Ox, Oy, Oz$ .  $\alpha, \beta, \gamma$  seien die Richtungswinkel von  $Oz$  gegen  $OA, OB, OC$ ; es ist dann  $V_z = V_1 \cos \alpha + V_2 \cos \beta + V_3 \cos \gamma$  und

$$\frac{dV_z}{dt} = \frac{dV_1}{dt} \cos \alpha + \frac{dV_2}{dt} \cos \beta + \frac{dV_3}{dt} \cos \gamma - V_1 \sin \alpha \frac{d\alpha}{dt} - V_2 \sin \beta \frac{d\beta}{dt} - V_3 \sin \gamma \frac{d\gamma}{dt}.$$

Fällt die Axe  $Oz$  zur Zeit  $t$  mit  $OC$  zusammen, so ist  $\alpha = \frac{1}{2}\pi$ ,  $\beta = \frac{1}{2}\pi$ ,  $\gamma = 0$  und daher

$$\frac{dV_z}{dt} = \frac{dV_3}{dt} - V_1 \frac{d\alpha}{dt} - V_2 \frac{d\beta}{dt}.$$

$\frac{d\alpha}{dt}$  ist aber die Winkelgeschwindigkeit, mit welcher sich die Axe  $OA$  von der momentan mit  $OC$  zusammenfallenden festliegenden Geraden  $Oz$  entfernt; es ist daher  $\frac{d\alpha}{dt} = \theta_2$  und ebenso  $\frac{d\beta}{dt} = -\theta_1$ . Man erhält mithin

$$\frac{dV_z}{dt} = \frac{dV_3}{dt} - V_1 \theta_2 + V_2 \theta_1,$$

und ähnlich

$$\frac{dV_x}{dt} = \frac{dV_1}{dt} - V_2 \theta_3 + V_3 \theta_2, \quad \frac{dV_y}{dt} = \frac{dV_2}{dt} - V_3 \theta_1 + V_1 \theta_3.$$

Ist der Vector  $V$  die resultierende Winkelgeschwindigkeit  $\Omega$  eines Körpers um die Momentanaxe (§ 233), so ist  $V_1 = \omega_1, V_2 = \omega_2, V_3 = \omega_3$  und  $V_x = \omega_x, V_y = \omega_y, V_z = \omega_z$ . Es wird somit

$$\frac{d\omega_z}{dt} = \frac{d\omega_3}{dt} - \omega_1 \theta_2 + \omega_2 \theta_1.$$

Liegen die beweglichen Axen im Körper fest, so haben sie dieselbe Momentanaxe wie der Körper; es ist also  $\theta = \Omega$  und daher auch  $\theta_1 = \omega_1, \theta_2 = \omega_2$ . Daraus folgt dann sofort  $\frac{d\omega_z}{dt} = \frac{d\omega_3}{dt}$ .

§ 251. Wir wollen noch ein zweites Beispiel geben.  $x, y, z$  seien die Coordinaten irgend eines Punktes  $G$ , z. B. des Schwerpunktes

eines sich bewegenden Körpers und mögen sich auf die beweglichen Axen  $OA, OB, OC$  beziehen.  $u, v, w$  seien die Componenten der Geschwindigkeit von  $G$  parallel zu diesen Axen und  $X, Y, Z$  die Componenten der Beschleunigung. Da sowohl die resultirende Geschwindigkeit als die resultirende Beschleunigung Vektoren sind, so ist

$$\begin{aligned} u &= \frac{dx}{dt} - y\theta_3 + z\theta_2, & X &= \frac{du}{dt} - v\theta_3 + w\theta_2, \\ v &= \frac{dy}{dt} - z\theta_1 + x\theta_3, & Y &= \frac{dv}{dt} - w\theta_1 + u\theta_3, \\ w &= \frac{dz}{dt} - x\theta_2 + y\theta_1, & Z &= \frac{dw}{dt} - u\theta_2 + v\theta_1. \end{aligned}$$

Diese Resultate werden später von Nutzen sein.

Der hier gegebene Beweis des Fundamentaltheorems für bewegliche Axen beruht auf der Methode, die Prof. Slessor in dem *Quarterly Journal*, 1858 angewendet hat, um zu beweisen, dass  $\frac{d\omega_z}{dt} = \frac{d\omega_x}{dt}$  ist. Einen zweiten sehr einfachen Beweis findet man in dem Kapitel über bewegliche Axen im Anfang des 2. Theiles dieses Buches.

§ 252. Euler's dynamische Gleichungen. *Man soll die allgemeinen Bewegungsgleichungen eines Körpers bestimmen, welcher sich um einen festen Punkt  $O$  bewegt.*

$x, y, z$  seien die Coordinaten eines materiellen Punktes  $m$  auf im Raum festliegende Axen  $Ox, Oy, Oz$  bezogen. Nimmt man die Momente um die  $z$ -Axe, so erhält man nach D'Alembert's Princip

$$\Sigma m \left( x \frac{d^2 y}{dt^2} - y \frac{d^2 x}{dt^2} \right) = N.$$

Sind  $\omega_x, \omega_y, \omega_z$  die Winkelgeschwindigkeiten des Körpers um die Axen, so ist

$$\frac{dx}{dt} = \omega_y z - \omega_z y, \quad \frac{dy}{dt} = \omega_z x - \omega_x z, \quad \frac{dz}{dt} = \omega_x y - \omega_y x.$$

Daher

$$\frac{d^2 x}{dt^2} = z \frac{d\omega_y}{dt} - y \frac{d\omega_z}{dt} + \omega_y(\omega_x y - \omega_y x) - \omega_z(\omega_z x - \omega_x z),$$

$$\frac{d^2 y}{dt^2} = x \frac{d\omega_z}{dt} - z \frac{d\omega_x}{dt} + \omega_z(\omega_y z - \omega_z y) - \omega_x(\omega_x y - \omega_y x).$$

Diese Werthe sind nun in die Momentengleichung einzusetzen.

Es seien  $\omega_1, \omega_2, \omega_3$  die Winkelgeschwindigkeiten des Körpers um drei rechtwinklige im Körper festliegende Axen  $OA, OB, OC$  und diese Axen mögen zur Zeit  $t$  mit den im Raum festliegenden zusammenfallen. Alsdann ist  $\omega_x = \omega_1$ , etc. und nach § 249,  $\frac{d\omega_x}{dt} = \frac{d\omega_1}{dt}$ , etc.

Bei der Benutzung von Axen, die im Körper festliegen, hat man den Vortheil, dass die Trägheits- und Deviationsmomente Constante

sind. Wählt man dann ferner zu diesen Coordinatenachsen die Hauptachsen für den festen Punkt, so kommt noch die Vereinfachung hinzu, dass alle Deviationsmomente Null werden. Substituiert man nun die Werthe von  $\frac{d^2x}{dt^2}$ ,  $\frac{d^2y}{dt^2}$  in die Momentengleichung, so kann man also alle Glieder in der Gleichung für  $\frac{d^2x}{dt^2}$ , die nicht  $y$  und in der für  $\frac{d^2y}{dt^2}$ , die nicht  $x$  enthalten, weglassen. Man erhält auf diese Weise

$$\Sigma m(x^2 + y^2) \frac{d\omega_3}{dt} + \Sigma m(x^2 - y^2) \omega_1 \omega_2 = N.$$

Sind  $A, B, C$  die Hauptträgheitsmomente für den festen Punkt  $O$ , so wird

$$C \frac{d\omega_3}{dt} - (A - B) \omega_1 \omega_2 = N$$

und ähnlich

$$A \frac{d\omega_1}{dt} - (B - C) \omega_2 \omega_3 = L,$$

$$B \frac{d\omega_2}{dt} - (C - A) \omega_3 \omega_1 = M.$$

Diese Gleichungen heissen die *Euler'schen dynamischen Gleichungen*.

§ 253. Wir wissen, dass nach dem D'Alembert'schen Princip das Moment der Effectivkräfte um eine Gerade dem der gegebenen Kräfte gleich ist. Aus den Euler'schen Gleichungen ergibt sich daher, dass die Momente der Effectivkräfte um die Hauptachsen für den festen Punkt durch die linken Seiten dieser Gleichungen ausgedrückt werden. Liegt kein Punkt des Körpers im Raum fest, so ist die Bewegung des Körpers um seinen Schwerpunkt dieselbe, als läge dieser Punkt fest. Wenn dann  $A, B, C$  die Hauptmomente für den Schwerpunkt bedeuten, so liefern die linken Seiten der Euler'schen Gleichungen die Momente der Effectivkräfte um die Hauptachsen des Schwerpunktes. Das Moment um eine andre durch den festen Punkt gehende Gerade lässt sich dann einfach dadurch ermitteln, dass man diese Momente nach den Gesetzen der Statik zerlegt.

Beisp. 1. Ist  $2T = A\omega_1^2 + B\omega_2^2 + C\omega_3^2$ ,  $G$  das Moment der gegebenen Kräfte um die Momentanaxe und  $\Omega$  die resultirende Winkelgeschwindigkeit, zu beweisen, dass  $\frac{dT}{dt} = G\Omega$  ist.

Beisp. 2. An einem Körper, z. B. der Erde, der sich um einen festen Punkt dreht, greifen Kräfte an, wie die Anziehung der Sonne und des Mondes, die eine Rotation um eine zur Momentanaxe senkrechte Axe hervorzubringen suchen. Man zeige, dass die Winkelgeschwindigkeit nur dann gleichförmig sein kann, wenn zwei der Hauptträgheitsmomente für den festen Punkt gleich sind. Die Axe, um welche die Kräfte eine Drehung hervorzubringen suchen, ist diejenige, um welche der Körper, wenn er sich in Ruhe befände, zu rotiren anfangen würde.

§ 254. *Man bestimme den Druck auf den festen Punkt.*

$x, y, z$  seien die Coordinaten des Schwerpunktes; sie mögen auf rechtwinklige im Raum festliegende Axen bezogen werden, die sich in dem festen Punkt schneiden und  $P, Q, R$  seien die Componenten der Druckkräfte im festen Punkt auf den Körper in der Richtung der Axen. Versteht man unter  $\mu$  die Masse des Körpers, so erhält man

$$\mu \frac{d^2 x}{dt^2} = P + \Sigma m X$$

und zwei ähnliche Gleichungen.

Drückt man  $\frac{d^2 x}{dt^2}$  durch  $\omega_x, \omega_y, \omega_z$  aus und substituirt, so erhält man weiter

$$\mu \left[ z \frac{d\omega_y}{dt} - y \frac{d\omega_z}{dt} + \omega_y(\omega_x y - \omega_y x) - \omega_z(\omega_z x - \omega_x z) \right] = P + \Sigma m X$$

mit den entsprechenden beiden andern Gleichungen.

Lassen wir nun die im Raum festliegenden Axen in dem betrachteten Moment mit den Hauptaxen für den festen Punkt zusammenfallen, so können wir für  $\frac{d\omega_y}{dt}$  und  $\frac{d\omega_z}{dt}$  die Werthe aus den Euler'schen Gleichungen substituiren. Es wird dann

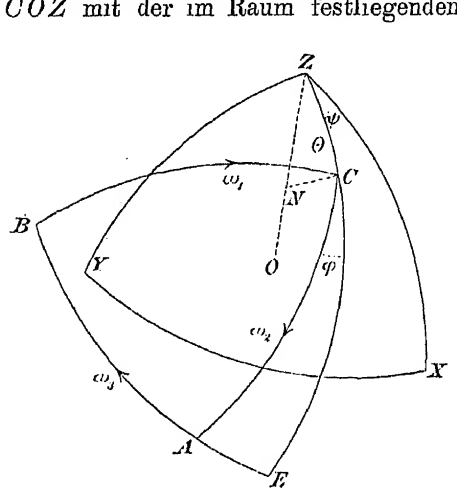
$$\begin{aligned} \mu \left[ \omega_1(B + C - A) \left( \frac{y\omega_z}{C} + \frac{z\omega_y}{B} \right) - (\omega_2^2 + \omega_3^2)x \right] \\ = P + \Sigma m X - \mu \left( \frac{M}{B} z - \frac{N}{C} y \right) \end{aligned}$$

mit ähnlichen Ausdrücken für  $Q$  und  $R$ .

§ 255. Beisp.  $G$  sei der Schwerpunkt des Körpers; man zeige, dass die Ausdrücke auf den linken Seiten der Gleichungen, welche die Druckkräfte auf den festen Punkt angeben, die Componenten zweier Kräfte sind; die eine,  $\Omega^2 \cdot GH$ , ist parallel zu  $GH$ , einem Loth auf der Momentanaxe  $OI$ , unter  $\Omega$  die resultirende Winkelgeschwindigkeit verstanden; die andre,  $\Omega'^2 \cdot GK$ , ist senkrecht zur Ebene  $OGK$ , wenn  $GK$  normal auf der Geraden  $OJ$  steht, deren Richtungscosinusse  $\frac{B-C}{A} \omega_2 \omega_3$ ,  $\frac{C-A}{B} \omega_3 \omega_1$ ,  $\frac{A-B}{C} \omega_1 \omega_2$  proportional sind und  $\Omega'^4$  die Summe der Quadrate dieser Grössen bedeutet.

§ 256. *Euler's geometrische Gleichungen. Man bestimme die geometrischen Gleichungen, welche die Bewegung des Körpers im Raum mit den Winkelgeschwindigkeiten des Körpers um drei bewegliche Axen  $OA, OB, OC$  verbinden.*

Man nehme den festen Punkt  $O$  zum Centrum einer Kugel, deren Radius die Einheit ist;  $X, Y, Z$  und  $A, B, C$  seien die Punkte, in welchen die Kugel von den festen bez. den beweglichen Axen geschnitten wird.  $ZO$  und  $BA$  oder ihre Verlängerungen mögen sich in  $E$  treffen. Es sei der Winkel  $XZC = \psi$ ,  $ZC = \theta$ ,  $ECA = \varphi$ ; man soll die geometrischen Beziehungen zwischen  $\theta, \varphi, \psi$  und  $\omega_1, \omega_2, \omega_3$  bestimmen.



$COZ$  mit der im Raum festliegenden Ebene  $XOZ$  bildet, so ist die Geschwindigkeit von  $C$  senkrecht zur Ebene  $ZOC$  gleich  $CN \frac{d\psi}{dt}$ , was dasselbe ist wie  $\sin \theta \frac{d\psi}{dt}$ , weil der Radius  $OC$  der Kugel der Einheit gleichkommt. Die Geschwindigkeit von  $C$  längs  $ZC$  ist ferner  $\frac{d\theta}{dt}$ . Die Bewegung von  $C$  wird daher durch  $\frac{d\theta}{dt}$  und  $\sin \theta \frac{d\psi}{dt}$  längs  $ZC$  bez. senkrecht dazu dargestellt. Die Bewegung von  $C$  wird aber auch durch die Winkelgeschwindigkeiten  $\omega_1$  und  $\omega_2$  längs  $BC$  bez.

$CA$  ausgedrückt. Diese beiden Darstellungen derselben Bewegung müssen daher äquivalent sein. Die Componenten längs  $ZC$  und senkrecht dazu ergeben daher

$$\left. \begin{aligned} \frac{d\theta}{dt} &= \omega_1 \sin \varphi + \omega_2 \cos \varphi \\ \sin \theta \frac{d\psi}{dt} &= -\omega_1 \cos \varphi + \omega_2 \sin \varphi \end{aligned} \right\}$$

und ähnlich die Componenten längs  $CB$  und  $CA$ .

$$\left. \begin{aligned} \omega_1 &= \frac{d\theta}{dt} \sin \varphi - \frac{d\psi}{dt} \sin \theta \cos \varphi \\ \omega_2 &= \frac{d\theta}{dt} \cos \varphi + \frac{d\psi}{dt} \sin \theta \sin \varphi \end{aligned} \right\}.$$

Diese beiden Gruppen von Gleichungen sind identisch; die eine lässt sich aus der andern durch algebraische Umformung ableiten.

Auf dieselbe Art, indem man ein Loth von  $E$  auf  $OZ$  fällt, lässt sich zeigen, dass die Geschwindigkeit von  $E$  senkrecht zu  $ZE$  gleich  $\frac{d\psi}{dt} \sin ZE$  ist, was dasselbe ist wie  $\frac{d\psi}{dt} \cos \theta$ . Die Geschwindigkeit von  $A$  in Bezug auf  $E$  längs  $EA$  ist ebenso  $\frac{d\varphi}{dt} \sin CA$  und dieses ist dasselbe wie  $\frac{d\varphi}{dt}$ . Die ganze Geschwindigkeit von  $A$  im Raum längs  $AB$  wird daher durch  $\frac{d\psi}{dt} \cos \theta + \frac{d\varphi}{dt}$  dargestellt. Diese Bewegung wird aber auch durch  $\omega_3$  ausgedrückt. Wie zuvor müssen die beiden Darstellungen derselben Bewegung äquivalent sein. Man erhält daher

$$\omega_3 = \frac{d\psi}{dt} \cos \theta + \frac{d\varphi}{dt}.$$

Hätten wir in ähnlicher Weise die Bewegung eines andern Punktes des Körpers, z. B.  $B$ , sowohl durch  $\omega_1, \omega_2, \omega_3$ , als durch  $\theta, \varphi, \psi$  ausgedrückt, so hätten wir andre Gleichungen erhalten; da wir aber nicht mehr als drei voneinander unabhängige Relationen erhalten können, so wären wir nur zu Gleichungen gekommen, die algebraische Umformungen der früheren sind.

§ 257. Manchmal ist es nöthig, die Winkelgeschwindigkeiten des Körpers um die festen Axen  $OX, OY, OZ$  durch  $\theta, \varphi, \psi$  auszudrücken. Das kann auf folgende Art geschehen.  $\omega_x, \omega_y, \omega_z$  seien die Winkelgeschwindigkeiten um die festen Axen,  $\Omega$  die resultirende Winkelgeschwindigkeit. Geben wir dem Raum und auch dem Körper ausser seiner thatsächlichen Bewegung noch eine Winkelgeschwindigkeit  $-\Omega$  um die resultirende Rotationsaxe, so werden die Axen  $OA, OB, OC$  zu festliegenden Axen und die Axen  $OX, OY, OZ$  bewegen sich mit den Winkelgeschwindigkeiten  $-\omega_x, -\omega_y, -\omega_z$ . Wenn wir daher in den obigen Formeln  $\varphi$  mit  $-\psi, \theta$  mit  $-\theta, \psi$  mit  $-\varphi$  vertauschen, so wird  $\omega_1, \omega_2, \omega_3$  zu  $-\omega_x, -\omega_y, -\omega_z$  und wir erhalten

$$\begin{aligned}\omega_x &= -\frac{d\theta}{dt} \sin \psi + \frac{d\varphi}{dt} \sin \theta \cos \psi, \\ \omega_y &= \frac{d\theta}{dt} \cos \psi + \frac{d\varphi}{dt} \sin \theta \sin \psi, \\ \omega_z &= \frac{d\varphi}{dt} \cos \theta + \frac{d\psi}{dt}.\end{aligned}$$

§ 258. Beisp. 1.  $p, q, r$  seien die Richtungscosinusse von  $OZ$  in Bezug auf die Axen  $OA, OB, OC$ ; man zeige, dass man zweien der Euler'schen geometrischen Gleichungen die symmetrische Form

$$\frac{dp}{dt} - q\omega_3 + r\omega_2 = 0, \quad \frac{dq}{dt} - r\omega_1 + p\omega_3 = 0, \quad \frac{dr}{dt} - p\omega_2 + q\omega_1 = 0$$

geben kann. Die letzte Gleichung kann man durch Differentiation der letzten der drei Beziehungen

$$p = -\sin \theta \cos \varphi, \quad q = \sin \theta \sin \varphi, \quad r = \cos \theta$$

und Substitution des Werthes von  $\frac{d\theta}{dt}$  aus § 256 erhalten. Die andern lassen sich nach den Regeln der Symmetrie ableiten.

Beisp. 2. Man beweise, dass die Richtungscosinusse einer der beiden Gruppen der Euler'schen Axen in Bezug auf die andre durch die Formeln

$$\begin{aligned}\left. \begin{aligned}\cos XA &= -\sin \psi \sin \varphi + \cos \psi \cos \varphi \cos \theta \\ \cos YA &= \cos \psi \sin \varphi + \sin \psi \cos \varphi \cos \theta \\ \cos ZA &= -\sin \theta \cos \varphi\end{aligned}\right\} \\ \left. \begin{aligned}\cos XB &= -\sin \psi \cos \varphi - \cos \psi \sin \varphi \cos \theta \\ \cos YB &= \cos \psi \cos \varphi - \sin \psi \sin \varphi \cos \theta \\ \cos ZB &= \sin \theta \sin \varphi\end{aligned}\right\} \\ \left. \begin{aligned}\cos XC &= \sin \theta \cos \psi \\ \cos YC &= \sin \theta \sin \psi \\ \cos ZC &= \cos \theta\end{aligned}\right\}\end{aligned}$$

gegeben sind.

PROPERTY OF  
CARNEGIE INSTITUTE OF TECHNOLOGY  
LIBRARY

## Kapitel V. Die Bewegung starrer Körper im Raum von drei Dimensionen.

Um die drei ersten zu beweisen, verlängere man  $XY$  bis es  $AB$  in  $M$  schneidet; es ist dann der Winkel  $XMA = \theta$ ,  $MY = \psi$ ,  $MX = 90^\circ + \psi$ ,  $MA = 90^\circ - \varphi$ . Das zweite System lässt sich aus dem ersten ableiten, indem man  $\varphi + \frac{1}{2}\pi$  statt  $\varphi$  setzt.

Diese Resultate sind hier zum Nachschlagen zusammengestellt, da sie bei den Problemen der höheren Dynamik von Nutzen sind.

§ 259. Offenbar kann man, statt die Bewegung des Körpers auf die Hauptaxen für den festen Punkt zu beziehen, wie es Euler gethan hat, beliebige in dem Körper festliegende Axen benutzen. Sie machen aber im Allgemeinen das Verfahren so complicirt, dass sie fast nutzlos sind. Wenn jedoch ein Körper kleine Schwingungen um einen festen Punkt macht, so dass drei rechtwinklige in dem Körper festliegende Axen sich niemals weit von drei im Raum festen Axen entfernen, so ist es oft von Vortheil, die Bewegung auf sie zu beziehen, auch wenn sie keine Hauptaxen sind. In diesem Fall sind  $\omega_1, \omega_2, \omega_3$  kleine Grössen und ihre Producte und Quadrate können vernachlässigt werden. Die allgemeine Gleichung des § 252 reducirt sich alsdann auf

$$C \frac{d\omega_3}{dt} - D \frac{d\omega_2}{dt} - E \frac{d\omega_1}{dt} = N,$$

worin die Coefficienten die gewöhnliche, ihnen in Kap. I gegebene Bedeutung haben. Wir erhalten so drei Gleichungen ersten Grades, die man auf die folgende Art schreiben kann

$$\begin{aligned} A \frac{d\omega_1}{dt} - F \frac{d\omega_2}{dt} - E \frac{d\omega_3}{dt} &= L, \\ -F \frac{d\omega_1}{dt} + B \frac{d\omega_2}{dt} - D \frac{d\omega_3}{dt} &= M, \\ -E \frac{d\omega_1}{dt} - D \frac{d\omega_2}{dt} + C \frac{d\omega_3}{dt} &= N. \end{aligned}$$

§ 260. **Centrifugale Kräfte.** Aus den Euler'schen Gleichungen geht hervor, dass die ganzen Aenderungen der  $\omega_1, \omega_2, \omega_3$  nicht lediglich der directen Wirkung der Kräfte, sondern zum Theil auch den centrifugalen Kräften der materiellen Punkte zu verdanken sind, die sich von der Axe, um welche sie rotiren, zu entfernen suchen. Denn man nehme z. B. die Gleichung

$$\frac{d\omega_3}{dt} = \frac{N}{C} + \frac{A-B}{C} \omega_1 \omega_2.$$

Von dem Zuwachs  $d\omega_3$  in der Zeit  $dt$  rührt der Theil  $\frac{N}{C} dt$  von der directen Wirkung der Kräfte her, deren Moment  $N$  ist, und der Theil  $\frac{A-B}{C} \omega_1 \omega_2 dt$  von den Centrifugalkräften. Es lässt sich dies auf folgende Art beweisen.

Das Moment der centrifugalen Kräfte eines Körpers, der um eine Axe  $OI$  mit der Winkelgeschwindigkeit  $\omega$  rotirt, um die Axe  $Oz$  ist  $(A-B)\omega_1\omega_2$ .

$P$  sei die Lage eines materiellen Punktes  $m$  und  $x, y, z$  seine Coordinaten. Dann ist  $x = OR, y = RQ, z = QP$ .  $PS$  sei ein Loth auf  $OI$ ,  $OS = u$  und  $PS = r$ . Die Centrifugalkraft des materiellen Punktes  $m$  ist dann  $\omega^2 rm$ , die von  $OI$  wegstrebt.

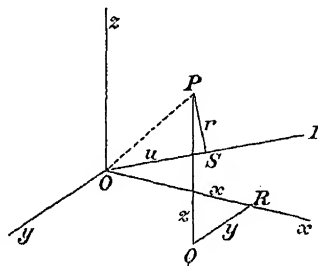
Die Kraft  $\omega^2 rm$  ist offenbar den vier Kräften  $\omega^2 xm, \omega^2 ym, \omega^2 zm$  und  $-\omega^2 um$  äquivalent, die an  $P$  parallel zu  $x, y, z$  bez.  $u$  angreifen. Das Moment von  $\omega^2 xm$  um  $Oz$  ist  $-\omega^2 xym$ , während  $\omega^2 ym$  dasselbe Moment mit dem entgegengesetzten Vorzeichen hat und das Moment von  $\omega^2 zm$  um  $Oz$  Null ist. Sie bringen daher keine Wirkung hervor.

Die Kraft  $-\omega^2 um$  parallel  $OI$  ist den drei Kräften  $-\omega\omega_1 um$ ,  $-\omega\omega_2 um$ ,  $-\omega\omega_3 um$  äquivalent, die an  $P$  parallel zu den Axen angreifen und ihr Moment um  $Oz$  ist offenbar  $\omega um(\omega_1 y - \omega_2 x)$ . Da nun die Richtungscosinusse von  $OI$   $\frac{\omega_1}{\omega}$ ,  $\frac{\omega_2}{\omega}$ ,  $\frac{\omega_3}{\omega}$  sind, so erhält man durch Projection der gebrochenen Linie  $x, y, z$  auf  $OI$

$$u = \frac{\omega_1}{\omega} x + \frac{\omega_2}{\omega} y + \frac{\omega_3}{\omega} z$$

und durch Substitution dieses Werthes von  $u$  das Moment der Centrifugalkräfte um  $Oz$

$$\begin{aligned} &= (\omega_1 y - \omega_2 x) (\omega_1 x + \omega_2 y + \omega_3 z) m, \\ &= (\omega_1^2 xy + \omega_1 \omega_2 y^2 + \omega_1 \omega_3 yz - \omega_1 \omega_2 x^2 - \omega_2^2 xy \\ &\quad - \omega_2 \omega_3 xz) m, \end{aligned}$$



Schreibt man  $\Sigma$  vor jedes Glied und nimmt an, die Axen der  $x, y, z$  seien Hauptaxen, so wird das Moment der Centrifugalkräfte um die Hauptaxe  $Oz$

$$= \omega_1 \omega_2 \Sigma m (y^2 - x^2) = \omega_1 \omega_2 (A - B).$$

Die Momente der Centrifugalkräfte um die Hauptaxen des Körpers mögen mit  $L, M', N'$  bezeichnet werden, so dass

$$L' = (B - C) \omega_2 \omega_3, \quad M' = (C - A) \omega_3 \omega_1, \quad N' = (A - B) \omega_1 \omega_2$$

ist und  $G$  sei ihr resultirendes Paar. Das Paar  $G$  heisst dann in der Regel das Centrifugalpaar.

Daraus, dass  $L' \omega_1 + M' \omega_2 + N' \omega_3 = 0$  ist, folgt, dass die Axe des Centrifugalpaares auf der Momentanaxe senkrecht steht.

Man beschreibe das Trägheitsellipsoid für den festen Punkt  $O$  und die Momentanaxe möge seine Oberfläche in  $I$  schneiden.  $OH$  sei ein Loth von  $O$  auf die Berührungsebene in  $I$ . Die Richtungscosinusse von  $OH$  sind  $A\omega_1, B\omega_2, C\omega_3$  proportional. Daraus, dass  $A\omega_1 L' + B\omega_2 M' + C\omega_3 N' = 0$  ist, folgt, dass die Axe des Centrifugalpaares rechtwinklig auf dem Loth  $OH$  steht. Die Ebene  $IOH$  ist daher die Ebene des Centrifugalpaares.

Ist  $\mu k^2$  das Trägheitsmoment des Körpers für die Momentanaxe, so erhält man  $k^2 = \frac{\varepsilon^4}{OI^2}$  und  $T = \mu k^2 \omega^2$  als doppelte lebendige Kraft des Körpers. Es lässt sich dann leicht zeigen, dass die Grösse des Centrifugalpaares  $G = T \tan \varphi$  ist, wenn  $\varphi$  den Winkel  $IOH$  bedeutet.

Das Paar erzeugt eine Winkelgeschwindigkeit von bekannter Grösse um den Diameter seiner Ebene. Setzt man sie mit der thatsächlichen Winkelgeschwindigkeit zusammen, so erhält man die Aenderung in der Lage der Momentanaxe.

## Ausdrücke für die Winkelbewegungsgrösse.

§ 261. Wir wollen nun geeignete Formeln für die Winkelbewegungsgrösse eines Körpers um irgend eine Axe zu ermitteln suchen. Auf ihre Wichtigkeit ist schon in § 74 hingewiesen worden. In der That können die allgemeinen Bewegungsgleichungen eines starren Körpers, wie sie § 77 gibt, nicht eher vollständig ausgedrückt werden, als man nicht diese Formeln gefunden hat. Es gibt zwei allgemeine Methoden.

Erstens kann man die Bewegung auf drei im Raum festliegende Axen  $Ox, Oy, Oz$  beziehen. Zu diesem Zweck muss man die Winkel-



durch die Coordinaten des Körpers auszudrücken suchen (§ 72). Wir benutzen dazu den allgemeinen in § 77 bewiesenen Satz

$$\frac{d}{dt} \left( \begin{array}{c} \text{Winkelbewegungsgrösse} \\ \text{um eine feste Gerade} \end{array} \right) = \left( \begin{array}{c} \text{Moment der} \\ \text{gegebenen Kräfte} \end{array} \right).$$

*Zweitens* kann man die Bewegung auf ein geeignetes System rechtwinkliger beweglicher Axen beziehen.  $h_1, h_2, h_3$  seien die Winkelbewegungsgrössen um drei rechtwinklige Axen  $OA, OB, OC$ ,  $L, M, N$  die Momente der gegebenen Kräfte um diese Axen. Da die Winkelbewegungsgrössen sich nach dem Parallelogrammgesetz zusammensetzen und zerlegen lassen, so hat man nach § 250

$$\frac{dh_1}{dt} - h_2 \theta_3 + h_3 \theta_2 = L,$$

$$\frac{dh_2}{dt} - h_3 \theta_1 + h_1 \theta_3 = M,$$

$$\frac{dh_3}{dt} - h_1 \theta_2 + h_2 \theta_1 = N.$$

§ 262. Die Winkelbewegungsgrösse um die  $z$ -Axe. Die Momentanbewegung eines Körpers um einen festen Punkt ist durch die Winkelgeschwindigkeiten  $\omega_x, \omega_y, \omega_z$  um drei Axen, die sich in diesem Punkt treffen, gegeben; man soll die Winkelbewegungsgrösse um die  $z$ -Axe finden.

$x, y, z$  seien die Coordinaten eines materiellen Punktes  $m$  des Körpers und  $u', v', w'$  die Componenten der Geschwindigkeit des Punktes parallel zu den Axen. Nach § 76 ist dann das Moment der Winkelbewegungsgrösse um die  $z$ -Axe

$$h_z = \Sigma m(xv' - yu').$$

Substituiert man  $u' = \omega_y z - \omega_z y$ ,  $v' = \omega_z x - \omega_x z$  nach § 238, so erhält man

$$h_z = \Sigma m(x^2 + y^2) \omega_z - (\Sigma m x z) \omega_x - (\Sigma m y z) \omega_y$$

und auf ähnliche Weise die Winkelbewegungsgrössen um die  $x$ - und  $y$ -Axe

$$h_x = \Sigma m(y^2 + z^2) \omega_x - (\Sigma m x y) \omega_y - (\Sigma m x z) \omega_z,$$

$$h_y = \Sigma m(z^2 + x^2) \omega_y - (\Sigma m y z) \omega_z - (\Sigma m y x) \omega_x.$$

Die Coefficienten von  $\omega_x, \omega_y, \omega_z$  sind hierin die Trägheits- und Deviationsmomente für die sich in dem festen Punkt schneidenden Axen.

§ 263. Gibt es in dem Körper keinen festen Punkt, so muss man die sämtlichen sechs Componenten der Bewegung benutzen. Die Form des Resultates hängt von dem Punkt ab, den man zum Reductionspunkt macht, und wird sehr einfach, wenn man den Schwerpunkt dazu

nimmt. Aus den in den §§ 73, 74 angeführten Gründen ist er im Allgemeinen der geeignetste Punkt.

$Oz$  sei die Axe, für welche die Winkelbewegungsgrösse gesucht wird,  $Ox$ ,  $Oy$  die beiden andern Axen, die mit  $Oz$  ein System rechtwinkliger Axen bilden.  $\bar{x}$ ,  $\bar{y}$ ,  $\bar{z}$  seien die Coordinaten des Schwerpunktes. Die Momentanbewegung des Körpers sei, wie in § 238, durch die Translationsgeschwindigkeiten  $u$ ,  $v$ ,  $w$  des Schwerpunktes parallel zu den Bezugsaxen und die Winkelgeschwindigkeiten  $\omega_x$ ,  $\omega_y$ ,  $\omega_z$  um drei parallele sich im Schwerpunkt treffende Axen dargestellt.

Nach § 74 ist die Winkelbewegungsgrösse um  $Oz$  der um eine parallele Axe, welche durch den als festen Punkt betrachteten Schwerpunkt geht, gleich, zusammen mit der Winkelbewegungsgrösse der ganzen im Schwerpunkt vereinigten Masse. Die erste ist im vorigen Paragraphen gefunden worden und die letzte ist offenbar  $M(\bar{x}v - \bar{y}u)$ . Die gesuchte Grösse ist daher

$$M(\bar{x}v - \bar{y}u) + \Sigma m(x^2 + y^2)\omega_z - (\Sigma m xz)\omega_x - (\Sigma m yz)\omega_y.$$

$M$  ist hierin die ganze Masse des Körpers und die Coefficienten von  $\omega_x$ ,  $\omega_y$ ,  $\omega_z$  sind die Trägheits- und Deviationsmomente für die Axen, welche sich im Schwerpunkt schneiden.

§ 264. **Bewegliche Axen.** Wenn die Bezugsaxen sich im Raum bewegen, so wird die Bewegung des Körpers während der Zeit  $dt$  mittelst der Componenten der Bewegung so construirt, *als ob die Axen für den Moment im Raum festlägen*. Siehe § 248. In den soeben gefundenen Ausdrücken für die Winkelbewegungsgrösse sind die Axen zwar als im Raum festliegend angenommen, aber sonst durchaus beliebig. Wählt man sie derart, dass das System der beweglichen Axen zur Zeit  $t$  mit ihnen zusammenfällt, so geben die Formeln die Winkelbewegungsgrössen um die beweglichen Axen für diesen speciellen Moment, mögen sie nun dieselben Lagen im Raum noch länger einnehmen oder nicht. *Die Formeln sind daher durchaus allgemein gültig und liefern die augenblicklichen Winkelbewegungsgrössen, 'mögen die Axen festliegen oder nicht.*

Liegen die gewählten Axen im Raum fest, so sind die Coefficienten von  $\omega_x$ ,  $\omega_y$ ,  $\omega_z$  in dem Ausdruck für  $h_3$  im Allgemeinen veränderlich und ihre Aenderungen können complicirten Gesetzen unterliegen. Als dann ist es vortheilhafter, in dem Körper festliegende Axen zu wählen, wie es Euler in seinen Bewegungsgleichungen, § 252, gethan hat.

Bewegt sich ein Körper um einen festen Punkt  $O$  und ist seine augenblickliche Bewegung durch die Winkelgeschwindigkeiten  $\omega_1$ ,  $\omega_2$ ,  $\omega_3$  um die im Körper festen Axen  $Ox'$ ,  $Oy'$ ,  $Oz'$  gegeben, so ist die Winkelbewegungsgrösse um die  $z'$ -Axe

$$h_3' = C\omega_3 - E\omega_1 - D\omega_2,$$

worin  $C, E, D$  absolute Constante sind, nämlich

$$C = \Sigma m(x'^2 + y'^2), \quad E = \Sigma m x' z', \quad D = \Sigma m y' z'.$$

Sind die im Körper festen Axen Hauptaxen, so verschwinden die Deviationsmomente und man erhält die Winkelbewegungsgrößen in den einfachen Formen

$$h_1' = A\omega_1, \quad h_2' = B\omega_2, \quad h_3' = C\omega_3,$$

worin  $A, B, C$  die Hauptträgheitsmomente des Körpers für den Coordinatenanfang sind, von dem angenommen ist, dass er im Raum festliege.

Auf diese Art kommt man zu einem neuen Beweis der Euler'schen Gleichungen. Substituirt man diese Werthe von  $h_1, h_2, h_3$  in die Gleichungen für die beweglichen Axen (§ 261), so wird die erste

$$\frac{d}{dt}(A\omega_1) - (B\omega_2)\theta_3 + (C\omega_3)\theta_2 = L$$

und, da die beweglichen Axen im Körper festliegen, also  $\theta_2 = \omega_2$ ,  $\theta_3 = \omega_3$  ist (§ 250), so nimmt die Gleichung die Euler'sche Gestalt an

$$A \frac{d\omega_1}{dt} - (B - C)\omega_2\omega_3 = L.$$

Der Beweis scheint kürzer zu sein als der in § 252 gegebene; in der That sind beide dieselben. Beide hängen von einem speciellen Fall des Fundamentalsatzes über bewegliche Axen ab (§§ 249, 250); der eine erfordert die Substitution für  $\frac{d^2x}{dt^2}, \frac{d^2y}{dt^2}$  mit Weglassung gewisser Glieder, der andre die gleichwerthige Substitution für  $u', v'$  (§ 262).

§ 265. Eine für die Praxis bequeme Anleitung, die Winkelbewegungsgrößen eines Körpers um ein System fester oder beweglicher Axen zu finden.

Suchen wir unter der Voraussetzung, der Körper drehe sich um einen festen Punkt  $O$ , nach einem Axensystem  $Ox', Oy', Oz'$ , für welches sich die Winkelbewegungsgrößen leicht ermitteln lassen, so wird dies im Allgemeinen ein im Körper festliegendes Axensystem sein und die Größen  $h_1', h_2', h_3'$  sind alsdann im letzten Paragraphen gegeben worden.

Sind die Richtungscosinusse eines jeden der beiden Axensysteme in Bezug auf das andre durch das Diagramm wie in § 217

	$x, y, z$
$x'$	$a_1, a_2, a_3$
$y'$	$b_1, b_2, b_3$
$z'$	$c_1, c_2, c_3$

gegeben, so ist die Winkelbewegungsgröße um die  $z$ -Axe, da Momente dem Parallelogrammgesetz unterworfen sind,

$$h_3 = h_1' a_3 + h_2' b_3 + h_3' c_3.$$

Die Einfachheit des Verfahrens hängt von der geeigneten Wahl des Hilfsaxensystems  $Ox', Oy', Oz'$  ab. Im Allgemeinen sind die Hauptaxen des Körpers für  $O$  am vortheilhaftesten. Alsdann wird

$$h_3 = A\omega_1 a_3 + B\omega_2 b_3 + C\omega_3 c_3.$$

Es sind noch  $\omega_1, \omega_2, \omega_3; a_3, b_3, c_3$  durch die Coordinaten des Körpers auszudrücken (§ 72). Sind diese Coordinaten die Euler'schen Winkel  $\theta, \varphi, \psi$ , so findet man die gesuchten Ausdrücke ausführlich in den §§ 256 und 258.

§ 266. *Ist der Körper einaxig, so dass also zwei Hauptträgheitsmomente  $A$  und  $B$  einander gleich sind, so lassen sich zwei einfache Ausdrücke für die Winkelbewegungsgrößen um die Axen  $Ox, Oy, Oz$  finden.*

*Erstens.* Zwei Coordinaten des Körpers seien die Euler'schen Winkel  $\theta, \psi$  der Symmetrieaxe. Die Axen  $Ox', Oz'$  mögen mit  $OE, OC$  (Fig. S. 230) zusammenfallen. Alsdann ist  $\varphi = 0$  und aus der Figur ergibt sich, dass  $\omega_1 = -\frac{d\psi}{dt} \sin \theta$ ,  $\omega_2 = \frac{d\theta}{dt}$  ist. Da die Winkelbewegungsgrößen um  $Ox', Oy', Oz'$  gleich  $A\omega_1, A\omega_2, C\omega_3$  sind, so findet man durch einfache Zerlegung

$$h_1 = A \left[ -\sin \psi \frac{d\theta}{dt} - \sin \theta \cos \theta \cos \psi \frac{d\psi}{dt} \right] + C\omega_3 \sin \theta \cos \psi,$$

$$h_2 = A \left[ \cos \psi \frac{d\theta}{dt} - \sin \theta \cos \theta \sin \psi \frac{d\psi}{dt} \right] + C\omega_3 \sin \theta \sin \psi,$$

$$h_3 = A \sin^2 \theta \frac{d\psi}{dt} + C\omega_3 \cos \theta.$$

Man könnte für  $\omega_3$  seinen Werth aus der dritten Euler'schen geometrischen Gleichung einsetzen; damit würde man aber  $\frac{d\varphi}{dt}$  in die Gleichungen einführen und im Allgemeinen ist es vortheilhafter, statt dessen  $\omega_3$  beizubehalten.

Auf diese Weise werden die Winkelbewegungsgrößen eines einaxigen Körpers um beliebige Gerade durch die Richtungswinkel der Axe des Körpers und die Winkelgeschwindigkeit um sie ausgedrückt.

*Zweitens.* Statt der unsymmetrischen Coordinaten  $\theta, \psi$  kann man die Richtungs-cosinusse  $\xi, \eta, \zeta$  der Axe des Körpers benutzen. Nach dem in § 75 angegebenen Verfahren wollen wir den Körper durch ein System von Massenpunkten gleichen Trägheitsmoments ersetzen.

Die Winkelbewegungsgrößen des Körpers um die Hauptaxen für den festen Punkt  $O$  sind  $A\omega_1, A\omega_2, C\omega_3$ . An die Axe  $OC$  mögen nun ein oder mehrere imaginäre materielle Punkte derart befestigt werden, dass ihr vereinigtcs Trägheitsmoment für ein von  $O$  aus auf  $OC$  errichtetes Loth gleich  $A$  ist. Diese Massenpunkte mögen sich mit der Axe herumdrehen. Die Bewegung der Axe ist durch die Winkelgeschwindigkeiten  $\omega_1, \omega_2$  gegeben und die Winkelbewegungsgrößen dieser Punkte um die Axen  $OA, OB$  sind daher offenbar  $A\omega_1, A\omega_2$ . Sie sind dieselben, wie die des Körpers. Die Winkelbewegungsgrösse der Punkte um

$OC$  ist offenbar Null. Die Winkelbewegungsgrößen des Körpers um  $OA$ ,  $OB$ ,  $OC$  sind mithin dieselben, wie die der Massenpunkte zusammen mit einem Moment  $C\omega_3$  um  $OC$ . Aus dem Parallelogrammgesetz folgt, dass dieselbe Gleichheit für alle Axen besteht.

*Folglich ist die Winkelbewegungsgröße eines einaxigen Körpers um eine beliebige durch  $O$  gehende Axe dieselbe, wie die eines oder mehrerer derart an seiner Axe angebrachten Massenpunkte, dass ihr vereinigtes Trägheitsmoment für  $O$  gleich  $A$  ist, zusammen mit der Winkelbewegungsgröße  $C\omega_3$  um die Axe.*

Ein einzelner materieller Punkt werde in einem Abstand vom Koordinatenanfang, welcher der Einheit gleich ist, auf die Axe des Körpers gesetzt. Seine Masse wird daher durch  $A$  dargestellt.  $(\xi \eta \zeta)$  seien die Coordinaten des materiellen Punktes, auf die Axen  $x, y, z$  bezogen, also auch die Richtungscosinusse der Axen. Die Winkelbewegungsgrößen um die Coordinatenachsen sind also

$$h_1 = A \left[ \eta \frac{d\zeta}{dt} - \zeta \frac{d\eta}{dt} \right] + C\omega_3 \xi,$$

$$h_2 = A \left[ \zeta \frac{d\xi}{dt} - \xi \frac{d\zeta}{dt} \right] + C\omega_3 \eta,$$

$$h_3 = A \left[ \xi \frac{d\eta}{dt} - \eta \frac{d\xi}{dt} \right] + C\omega_3 \zeta.$$

Wollen wir lieber  $\theta, \varphi, \psi$  statt der Richtungscosinusse  $\xi, \eta, \zeta$  benutzen, so setzen wir für  $\xi, \eta, \zeta$  ihre Werthe  $\xi = \sin \theta \cos \varphi$ ,  $\eta = \sin \theta \sin \varphi$ ,  $\zeta = \cos \theta$ . Die Substitution in die letzte Gleichung ist leicht auszuführen, wenn man sich an den Satz der Differenzialrechnung erinnert:  $\xi d\eta - \eta d\xi = r^2 d\psi$ . (Vergl. § 76.) Wir kommen so wieder zu denselben Ausdrücken für die Momente  $h_1, h_2, h_3$  wie zuvor.

Wenn der einaxige Körper kleine Schwingungen macht und die Axe  $OC$  der Axe  $Oz$  immer so nahe bleibt, dass man die Quadrate von  $\theta$  vernachlässigen kann, so ist

$$\xi = \theta \cos \varphi, \quad \eta = \theta \sin \varphi, \quad \zeta = 1,$$

$$\left. \begin{aligned} h_1 &= -A \frac{d\eta}{dt} + C\omega_3 \xi \\ h_2 &= A \frac{d\xi}{dt} + C\omega_3 \eta \\ h_3 &= C\omega_3 \end{aligned} \right\}.$$

Diese Formeln für die Winkelbewegungsgrößen um die festen Axen sind sehr einfach.

Bewegt sich der Körper frei im Raum, so benutze man den Schwerpunkt statt des festen Punktes. Es ist dann am besten, an die Axe zwei gleiche materielle Punkte auf beiden Seiten und in gleichem Abstand vom Schwerpunkt so zu befestigen, dass der Schwerpunkt des gedachten Systems mit dem des Körpers zusammenfällt. Die Winkelbewegungsgröße des freien Körpers um irgend eine Gerade ist alsdann dieselbe, wie die des Punktesystems zusammen mit dem Paar  $C\omega_3$  um die Axe.

Beisp. 1. Ein Körper, der nicht nothwendigerweise einaxig zu sein braucht, dreht sich um einen festen Punkt  $O$ . Drei materielle Punkte werden in solchen Abständen  $a, b, c$  von  $O$  an die Hauptaxen befestigt, dass

$$Ma^2 = \frac{1}{2}(B + C - A), \quad Mb^2 = \frac{1}{2}(C + A - B), \quad Mc^2 = \frac{1}{2}(A + B - C)$$

ist. Man beweise, dass die Winkelbewegungsgröße des Körpers um eine beliebige durch  $O$  gehende Gerade derjenigen der Punkte gleich ist. Es folgt dies unmittelbar aus § 75.

Beisp. 2. Ein der Schwerkraft unterworfenen Stab wird gezwungen auf dem Mantel eines glatten Umdrehungskegels zu bleiben, dessen Spitze zugleich der Aufhängungspunkt des Stabes ist. Man zeige, dass die Winkelgeschwindigkeit des Stabes um die Axe des Kegels dieselbe ist, wie die eines einfachen Pendels von der Länge  $\frac{2}{3} \cdot a \frac{\sin \alpha}{\sin \beta}$ , wo  $a$  die Länge des Stabes,  $\alpha$  den halben Winkel an der Spitze des Kegels und  $\beta$  den Winkel bedeutet, den die Axe des Kegels mit der Verticalen macht. [St. John's Coll.]

Um die Momente der Effectivkräfte zu finden, vereinige man die Masse in einem Punkt gleichen Trägheitsmomentes und zur Ermittlung der Momente der gegebenen Kräfte im Schwerpunkt. Setzt man die Momente um die Axe des Kegels gleich, so ergibt sich das Resultat sofort.

Beisp. 3. Die Hauptträgheitsmomente eines Körpers für den festen Punkt  $O$ , um den er sich dreht, sind sämmtlich gleich.  $\theta, \varphi, \psi$  sind die Euler'schen Coordinaten der in dem Körper festliegenden Axen  $OA, OB, OC$ ; man zeige, dass die Winkelbewegungsgrössen um die im Raum festliegenden Axen bez.

$$h_1 = A \left( -\sin \psi \frac{d\theta}{dt} + \sin \theta \cos \psi \frac{d\varphi}{dt} \right),$$

$$h_2 = A \left( \cos \psi \frac{d\theta}{dt} + \sin \theta \sin \psi \frac{d\varphi}{dt} \right),$$

$$h_3 = A \left( \frac{d\psi}{dt} + \cos \theta \frac{d\varphi}{dt} \right)$$

sind.

§ 267. Beisp. 1. Die Bewegung eines Körpers ist durch die Translationsgeschwindigkeiten ( $u, v, w$ ) des Schwerpunktes und die Winkelgeschwindigkeiten ( $\omega_x, \omega_y, \omega_z$ ) gegeben; man beweise, dass die Winkelbewegungsgrösse um die Gerade  $\frac{x-f}{l} = \frac{y-g}{m} = \frac{z-h}{n}$  dem Ausdruck

$$lh_1 + mh_2 + nh_3 + M \begin{vmatrix} l, m, n \\ u, v, w \\ f, g, h \end{vmatrix}$$

gleich ist, worin  $M$  die Masse des Körpers bedeutet,  $h_1, h_2, h_3$  die in § 262 angegebenen Werthe haben und  $(l, m, n)$  die augenblicklichen Richtungscosinusse der gegebenen Geraden sind.

Dies kann mit Hülfe des in § 74 bewiesenen Satzes geschehen. Die Winkelbewegungsgrösse um eine Parallele zu der gegebenen Axe ist offenbar  $lh_1 + mh_2 + nh_3$ ; alsdann hat man die Winkelbewegungsgrösse der ganzen im Schwerpunkt vereinigten Masse um die gegebene Gerade zu ermitteln und beide Resultate zu addiren.

$P$  (siehe die Figur S. 216) sei der Punkt ( $fgh$ ). Wir wollen zuerst die Winkelbewegungsgrösse um ein System von Axen suchen, die den gegebenen Coordinatenaxen parallel sind und  $P$  zum Anfang haben. Offenbar ist die Verlängerung von  $NP$  die neue  $z$ -Axe. Das Moment der Geschwindigkeit des Coordinatenanfangs  $O$  um  $NP$  ist, wie man sieht,  $u \cdot MN - v \cdot OM$ , was das Nämliche ist, wie  $ug - vf$ , und dreht in positiver Richtung um  $NP$ . Ebenso sind die Momente der Geschwindigkeiten von  $O$  um die zu  $x$  und  $y$  Parallelen  $vh - wg$  und  $wf - uh$ . Multiplicirt man diese drei Momente bez. mit  $(n, l, m)$ , so erhält man das Moment der Geschwindigkeit des Schwerpunktes um die Gerade. Multiplicirt man dieses mit  $M$ , so findet man die Winkelbewegungsgrösse der im Schwerpunkt vereinigten Masse. Das gesuchte Resultat ergibt sich daraus unmittelbar.

§ 267. Beisp. 2. *Die Winkelbewegungsgrösse eines Körpers um die Momentanaxe und ebenso um eine Axe zu finden, welche die Momentanaxe rechtwinklig schneidet.*

Nimmt man die Momentanaxe zur  $z$ -Axe, so kann man die in § 262 gegebenen Ausdrücke für  $h_1, h_2, h_3$  benutzen.

Im vorliegenden Fall ist  $\omega_x = 0, \omega_y = 0$  und  $\omega_z = \Omega$ , unter  $\Omega$  die resultirende Winkelgeschwindigkeit des Körpers verstanden. Die Winkelbewegungsgrössen um die  $x$ -,  $y$ -,  $z$ -Axen sind daher bez.

$$h_1 = -(\Sigma m x z) \Omega, \quad h_2 = -(\Sigma m y z) \Omega, \quad h_3 = \Sigma m (x^2 + y^2) \Omega.$$

Daraus folgt, dass die Winkelbewegungsgrösse um irgend eine auf der Momentanaxe  $Oz$  senkrechte Gerade  $Ox$  nur dann Null ist, wenn das Deviationsmoment für die beiden Axen Null ist.

Um sich dies vollständig klar zu machen, bedenke man, dass die Winkelgeschwindigkeiten  $\omega_x, \omega_y, \omega_z$  nur dazu benutzt wurden, die Bewegung des Körpers während der Zeit  $dt$  zu construiren. Ist  $Oz$  die Momentanaxe (vergleiche die Figur S. 216), so bewegt sich der in  $P$  liegende materielle Punkt des Körpers senkrecht zur Ebene  $PLO$ , die Richtung seiner Geschwindigkeit ist also nicht parallel zu  $Ox$  und schneidet auch  $Ox$  nicht. Die Geschwindigkeit des Punktes hat daher ein Moment um  $Ox$ , obwohl  $Ox$  senkrecht auf der Momentanaxe steht. Versteht man unter  $\theta$  den Winkel  $PMN$  und unter  $r$  die Gerade  $PM$ , so ist

$$r^2 \frac{d\theta}{dt} = y \frac{dz}{dt} - z \frac{dy}{dt} = r^2 \omega_x - xz \omega_z - xy \omega_y,$$

so dass also die Winkelgeschwindigkeit  $\frac{d\theta}{dt}$  des materiellen Punktes  $P$  um  $Ox$ , vorausgesetzt dass  $\omega_x = 0, \omega_y = 0$  ist, nur dann verschwindet, wenn der Punkt entweder in der  $xy$ - oder der  $yz$ -Ebene liegt.

Beisp. 3. Eine Gerade  $OL$  dreht sich um den festen Punkt  $O$  so, dass  $\frac{dh}{dt} = N$  ist, unter  $h$  die Winkelbewegungsgrösse eines Körpers um  $OL$  und unter  $N$  das Moment der gegebenen Kräfte verstanden. Man beweise, dass jeder Punkt von  $OL$  sich senkrecht zu der Ebene bewegt, die ihn und die resultirende Axe der Winkelbewegungsgrösse für  $O$  enthält.

Beisp. 4. Eine dreieckige Lamelle  $ACB$ , deren Masse  $M$  ist, dreht sich mit der Winkelgeschwindigkeit  $\omega$  um die Seite  $CA$ . Man zeige, dass die Winkelbewegungsgrösse um die Seite  $CB$  gleich  $\frac{1}{12} M ab \sin^2 C \omega$  ist, wenn  $a$  und  $b$  die Seiten sind, die den Winkel  $C$  einschliessen.

Beisp. 5. Zwei Stäbe  $OA, AB$  sind bei  $A$  durch ein Gelenk verbunden und an dem festen Punkt  $O$  aufgehängt. Das System dreht sich mit der Winkelgeschwindigkeit  $\omega$  um eine durch  $O$  gehende verticale Gerade so, dass die beiden Stäbe in einer verticalen Ebene liegen.  $\theta, \varphi$  sind die Neigungen der Stäbe gegen die Verticale,  $a, b$  ihre Längen,  $M, M'$  ihre Massen; man zeige, dass die Winkelbewegungsgrösse um die verticale Axe

$$\omega \left[ \left( \frac{1}{3} M + M' \right) a^2 \sin^2 \theta + M' ab \sin \theta \sin \varphi + \frac{1}{3} M' b^2 \sin^2 \varphi \right]$$

ist.

Beisp. 6. Einem graden Kegel, dessen Spitze  $O$  festliegt, wird die Winkelgeschwindigkeit  $\omega$  um seine Axe  $OC$  mitgetheilt, während seine Axe zugleich im Raum in Bewegung gesetzt wird. Der halbe Winkel an der Spitze des Kegels ist  $\frac{1}{4} \pi$  und seine Höhe  $h$ ,  $\theta$  die Neigung der Axe gegen eine feste Gerade  $Oz$  und  $\psi$  der Winkel, den die Ebene  $zOC$  mit einer durch  $Oz$  gehenden festen

Ebene macht. Man beweise, dass die Winkelbewegungsgrösse um  $Oz$  gleich  $\frac{3}{4} M h^2 \left( \sin^2 \theta \frac{d\psi}{dt} + \frac{2}{5} \omega \cos \theta \right)$  ist, unter  $M$  die Masse des Kegels verstanden.

Beisp. 7. Ein Stab  $AB$  ist mittelst eines Fadens an dem festen Punkt  $O$  aufgehängt und bewegt sich auf irgend eine Art.  $(l, m, n)$ ,  $(p, q, r)$  sind die Richtungscosinusse des Fadens und des Stabes in Bezug auf rechtwinklige Axen  $Ox, Oy, Oz$ ; man zeige, dass die Winkelbewegungsgrösse um die  $z$ -Axe

$$M b^2 \left( l \frac{dm}{dt} - m \frac{dl}{dt} \right) + M \frac{a^2}{3} \left( p \frac{dq}{dt} - q \frac{dp}{dt} \right) \\ + M \frac{ab}{2} \left( p \frac{dm}{dt} - m \frac{dp}{dt} + l \frac{dq}{dt} - q \frac{dl}{dt} \right)$$

ist, wenn  $M$  die Masse des Stabes und  $a, b$  die Längen des Stabes und des Fadens bedeuten.

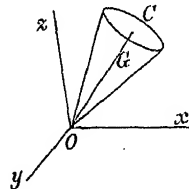
§ 268. Als Beispiel, wie diese Ausdrücke für die Winkelbewegungsgrösse eines Körpers anzuwenden sind, wollen wir sie zur Lösung zweier Probleme über die Bewegung eines Körpers im Raum von drei Dimensionen benutzen. Die Bezugsaxen liegen bei ihnen im Raum fest, die Benutzung beweglicher Axen behalten wir uns für später vor. Weiteres findet man in dem zweiten Band, in welchem ein ganzes Kapitel von Beispielen und Erläuterungen den verschiedenen Methoden zur Bestimmung der Bewegung der Körper im Raum von drei Dimensionen gewidmet ist.

## Bewegung eines Kreisels.

**Problem 1.** *Ein einaxiger Kiesel dreht sich auf einem vollkommen rauhen Tisch derart, dass seine Axe nahezu vertical bleibt; man finde die kleinen Schwingungen des Kreisels<sup>1)</sup>.*

$O$  sei die Spitze,  $OC$  die Axe des Kreisels.  $C$  und  $A$  seien die Trägheitsmomente für die Axe  $OC$  und ein durch  $O$  gehendes Loth auf  $OC$ . Da der Schwerpunkt  $G$  des Kreisels in seiner Axe liegt, so haben die gegebenen Kräfte kein Moment um  $OC$ . Es ist ferner  $A = B$  und daher nach Euler's dritter dynamischer Gleichung

$$C \frac{d\omega_s}{dt} = 0.$$



Die Winkelgeschwindigkeit des Kreisels um seine Axe bleibt daher immer dieselbe.  $\omega_s = n$  sei diese constante Winkelgeschwindigkeit.

$\xi, \eta, \zeta$  seien die Richtungscosinusse von  $OC$  in Bezug auf Axen, die im Raum festliegen, nämlich  $Ox, Oy, Oz$ , von denen  $Oz$  vertical ist. Da die Axe des Kegels stets nahezu vertical bleibt, so hat man  $\zeta = 1$ , während  $\xi, \eta$  kleine Grössen sind, deren Quadrate man vernachlässigen kann. Es sei  $l = OG$  und die Masse werde durch die Einheit dargestellt.

1) Die allgemeine Bewegung eines Kreisels unter der Wirkung der Schwere wird im zweiten Band besprochen werden. Die kleinen Schwingungen unsymmetrischer und geneigter Kiesel ebenso wie eine kurze historische Uebersicht findet man an derselben Stelle.



Die Momente der an  $G$  angreifenden Schwerkraft um die Axen findet man nach den gewöhnlichen Formeln

$$L = yZ - zY = -gl\eta,$$

$$M = zX - xZ = gl\xi,$$

wobei  $X=0$ ,  $Y=0$ ,  $Z=-g$  die Componenten der Schwere sind. Die Winkelbewegungsgrößen des Körpers um dieselben Axen sind nach § 265

$$\left. \begin{aligned} h_1 &= -A \frac{d\eta}{dt} + Cn\xi \\ h_2 &= A \frac{d\xi}{dt} + Cn\eta \end{aligned} \right\}.$$

Daraus folgt nach § 261

$$\left. \begin{aligned} -A \frac{d^2\eta}{dt^2} + Cn \frac{d\xi}{dt} &= -gl\eta \\ A \frac{d^2\xi}{dt^2} + Cn \frac{d\eta}{dt} &= gl\xi \end{aligned} \right\}.$$

Die Gleichung, die man aus der Winkelbewegungsgröße um die  $z$ -Axe erhält, zeigt nur wieder, dass  $\omega_3$  constant ist, was wir schon aus den Euler'schen Gleichungen abgeleitet haben.

Um die Gleichungen aufzulösen, setze man

$$\xi = P \cos(\mu t + f), \quad \eta = Q \sin(\mu t + f);$$

man findet durch Substitution dieser Werthe

$$\left. \begin{aligned} (A\mu^2 + gl)Q - Cn\mu P &= 0 \\ Cn\mu Q - (A\mu^2 + gl)P &= 0 \end{aligned} \right\}$$

und daraus

$$A\mu^2 + gl = \pm Cn\mu.$$

Es ist nicht nöthig, beide Vorzeichen auf der rechten Seite zu nehmen. Wählen wir das eine, so besteht die Wirkung des andern nur darin, dass es das Vorzeichen von  $\mu$  und damit nur die bis jetzt unbestimmten Constanten  $Q$  und  $f$  ändert. Ohne Einbusse an Allgemeinheit können wir daher *das obere Zeichen* wählen. Dadurch werden die beiden resultirenden Werthe von  $\mu$  positiv und  $P=Q$ . Die Werthe von  $\mu$  sind

$$\mu = \frac{Cn}{2A} \pm \frac{(C^2n^2 - 4gAl)^{\frac{1}{2}}}{2A}.$$

Bezeichnet man sie mit  $\mu_1$  und  $\mu_2$ , so erhält man

$$\xi = P_1 \cos(\mu_1 t + f_1) + P_2 \cos(\mu_2 t + f_2),$$

$$\eta = P_1 \sin(\mu_1 t + f_1) + P_2 \sin(\mu_2 t + f_2),$$

worin  $P_1$ ,  $P_2$ ,  $f_1$ ,  $f_2$  vier Constante sind, die durch die Anfangswerthe von  $\xi$ ,  $\eta$ ,  $\frac{d\xi}{dt}$ ,  $\frac{d\eta}{dt}$  bestimmt werden. Die Anfangswerthe der Coordinaten wollen wir durch den Index Null darstellen. Es wird dann

$$\xi_0 = P_1 \cos f_1 + P_2 \cos f_2,$$

$$\eta_0 = P_1 \sin f_1 + P_2 \sin f_2,$$

$$-\frac{d\xi_0}{dt} = P_1 \mu_1 \sin f_1 + P_2 \mu_2 \sin f_2,$$

$$\frac{d\eta_0}{dt} = P_1 \mu_1 \cos f_1 + P_2 \mu_2 \cos f_2.$$

Daraus folgt

$$\left. \begin{aligned} P_1^2 (\mu_1 - \mu_2)^2 &= \left( \frac{d\eta_0}{dt} - \mu_2 \xi_0 \right)^2 + \left( \frac{d\xi_0}{dt} + \mu_2 \eta_0 \right)^2 \\ P_2^2 (\mu_1 - \mu_2)^2 &= \left( \frac{d\eta_0}{dt} - \mu_1 \xi_0 \right)^2 + \left( \frac{d\xi_0}{dt} + \mu_1 \eta_0 \right)^2 \end{aligned} \right\}.$$

Sind  $\theta, \psi$  die Winkelkoordinaten der Axe, so erhält man

$$\begin{aligned} \theta^2 &= \xi^2 + \eta^2 = P_1^2 + P_2^2 + 2P_1 P_2 \cos[(\mu_1 - \mu_2)t + f_1 - f_2], \\ \theta^2 \frac{d\psi}{dt} &= \xi \frac{d\eta}{dt} - \frac{d\xi}{dt} \eta = P_1^2 \mu_1 + P_2^2 \mu_2 + P_1 P_2 (\mu_1 + \mu_2) \cos[(\mu_1 - \mu_2)t + f_1 - f_2]. \end{aligned}$$

Nimmt man an,  $P_1$  und  $P_2$  wären einander nicht gleich, so kann, wie man sieht,  $\theta$  niemals verschwinden, d. h. die Axe des Kreisels kann niemals genau vertical werden. Ebenso kann  $\frac{d\psi}{dt}$  nur dann verschwinden, wenn  $P_1 P_2 (\mu_1 + \mu_2)$  grösser als  $P_1^2 \mu_1 + P_2^2 \mu_2$  ist, d. h. die Ebene  $ZOC$  dreht sich um  $OZ$  entweder mit zeitweisen Umkehrungen der Richtung oder immer in derselben Richtung, je nachdem  $\frac{P_1}{P_2}$  zwischen  $\frac{\mu_2}{\mu_1}$  und der Einheit liegt oder nicht.

Soll  $P_1 = P_2$  sein, so muss Anfangs

$$2 \left( \xi \frac{d\eta}{dt} - \frac{d\xi}{dt} \eta \right) = (\mu_1 + \mu_2) (\xi^2 + \eta^2)$$

sein. Dies erfordert, dass  $\frac{d\psi}{dt}$  Anfangs von  $\frac{1}{2}(\mu_1 + \mu_2)$  um kleine Grössen von der Ordnung  $P$  differirt. Alsdann behält  $\frac{d\psi}{dt}$  während der Bewegung sein Vorzeichen und die Axe wird in constanten Intervallen  $\frac{2\pi}{\mu_1 - \mu_2}$  vertical.

Wir haben angenommen, die Werthe von  $\mu$  seien sowohl reell als ungleich. Ist der Werth von  $n$  so klein, dass die Werthe von  $\mu$  imaginär werden, so enthalten die Werthe von  $\xi$  und  $\eta$  reelle Exponentialgrössen. Alsdann bleiben diese Werthe im Allgemeinen nicht klein. Es zeigt dies an, dass der Kiesel nicht so schnell um seine Axe rotirt, dass die Axe vertical bleiben könnte. Er verlässt seine Anfangslage.

Ist  $C^2 n^2 = 4gAl$ , so sind die beiden Werthe von  $\mu$  reell und gleich. Alsdann wird, wie man leicht sieht, den Gleichungen durch

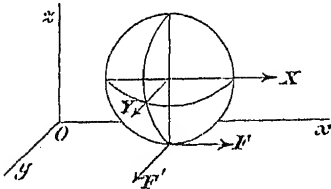
$$\begin{aligned} \xi &= P_1 \cos(\mu t + f_1) + P_2 t \cos(\mu t + f_2), \\ \eta &= P_1 \sin(\mu t + f_1) + P_2 t \sin(\mu t + f_2) \end{aligned}$$

genügt, so dass also die Bewegung im Allgemeinen unstabil ist. Die Axe des Kreisels kann nur dann nahezu vertical bleiben, wenn die Anfangsbedingungen derart sind, dass  $P_2 = 0$  ist.

Beisp. Ein einaxiger Körper rotirt um seine Axe mit der Winkelgeschwindigkeit  $n$ . Zwei unausdehnbare Fäden sind an zwei Punkten der Axe in gleichen Abständen  $b$  von dem Schwerpunkt  $G$  des Körpers befestigt. Die andern Enden der Fäden werden an zwei im Raum festliegende Punkte geheftet. Die Länge eines jeden Fadens ist  $a$  und seine Spannung  $T$ . Die Masse des Körpers ist die Einheit. Man beweise, dass die Periode  $\frac{2\pi}{p}$  der Linearschwingungen von  $G$  durch  $ap^2 = 2T$ , die Perioden  $\frac{2\pi}{q}$  der Winkelschwingungen der Axe dagegen durch  $Aq^2 - Cnq = 2T(a + b)\frac{b}{a}$  gegeben sind.

## Bewegung einer Kugel.

§ 269. Problem 2. Die Bewegung einer Kugel auf einer vollkommen rauhen Ebene zu finden.



Die Ebene möge die  $xy$ -Ebene sein und  $F, F'$  die Komponenten der Reibung am Berührungspunkt parallel diesen Axen.  $X, Y$  seien die Komponenten der gegebenen Kräfte, die am Mittelpunkt angreifen sollen.  $a$  sei der Radius der Kugel,  $k$  der Trägheitsradius für einen Durchmesser und ihre Masse sei die Einheit.

Die Winkelbewegungsgrößen um die der  $x$ - und  $y$ -Achse parallelen Durchmesser sind  $k^2\omega_1$  und  $k^2\omega_2$ . Diese Richtungen liegen im Raum fest; nach § 77 oder § 161 ist daher

$$k^2 \frac{d\omega_1}{dt} = F' a, \quad k^2 \frac{d\omega_2}{dt} = -F a.$$

Sind  $u$  und  $v$  die Geschwindigkeiten des Schwerpunktes parallel den Axen, so ist ferner

$$\frac{du}{dt} = X + F', \quad \frac{dv}{dt} = Y + F''$$

und da der Berührungspunkt der Kugel und der Ebene nicht gleitet,

$$u - a\omega_1 = 0, \quad v - a\omega_2 = 0.$$

Durch Elimination von  $F', F'', \omega_1$  und  $\omega_2$  ergibt sich

$$\frac{du}{dt} = \frac{a^2}{a^2 + k^2} X, \quad \frac{dv}{dt} = \frac{a^2}{a^2 + k^2} Y.$$

Es sind dies die Bewegungsgleichungen einer Kugel, die sich wie ein materieller Punkt ohne Rotation auf einer glatten Ebene unter der Wirkung derselben, aber im Verhältniss von  $a^2$  zu  $a^2 + k^2$  reducirten Kräfte bewegt. Da  $k^2 = \frac{2}{5} a^2$  ist, so lässt sich dies so aussprechen:

*Wenn eine homogene Kugel unter der Wirkung ganz beliebiger Kräfte, deren Resultante durch das Centrum der Kugel geht, auf einer vollkommen rauhen festen Ebene rollt, so ist die Bewegung des Centrums dieselbe als ob die Ebene glatt wäre und sämtliche Kräfte auf fünf Siebentel ihres früheren Werths reducirt würden<sup>1)</sup>.*

Beisp. 1. Die Ebene ist nicht vollkommen rau, der Reibungscoefficient jedoch grösser als  $\frac{2R}{7Z}$ , unter  $R$  die resultirende gegebene Kraft parallel zur Ebene und unter  $Z$  die Normalkraft verstanden. Man beweise, dass die Reibung immer gross genug ist, um die Kugel vor dem Gleiten zu bewahren.

Beisp. 2. Eine Kugel wird auf eine schiefe Ebene gesetzt, die rauh genug ist, um Gleiten zu verhüten und ihr eine Geschwindigkeit in irgend einer Richtung mitgetheilt. Man zeige, dass ihr Mittelpunkt eine Parabel beschreibt. Wenn  $V$  die horizontale Anfangsgeschwindigkeit des Mittelpunktes und  $\alpha$  die Neigung der Ebene gegen den Horizont bedeutet, so ist der Parameter  $\frac{14}{5} \frac{V^2}{g \sin \alpha}$ .

1) Dieser Satz wurde von dem Verfasser als Problem in den Mathematical Tripos, 1860 gegeben; siehe die Lösungen von diesem Jahr. Einen andern Beweis findet man im 2. Band, aus welchem sich auch der entsprechende Satz für den Fall ergibt, in welchem die Kugel auf einer andern Kugel rollt.

Beisp. 3. Eine homogene Kugel rollt auf einer vollkommen rauhen Ebene unter der Wirkung einer Kraft, die dem Quadrat des Abstandes von einem Punkt in der Ebene, in der sich das Centrum bewegt, umgekehrt proportional ist. Man beweise, dass ihr Centrum einen Kegelschnitt beschreibt und dass, wenn die Kugel in dem Augenblick, in welchem der Abstand ihres Centrums von dem Sitz der Kraft ein Viertel der Hauptaxe der Bahn wird, an einen glatten Theil der Ebene kommt, die Hauptaxe der Bahn plötzlich in dem Verhältniss 7 : 13 reducirt wird.

[Trin. Coll.]

Beisp. 4. Eine homogene Kugel bewegt sich ohne Rotation unter der Wirkung einer Centralkraft derart auf einer glatten horizontalen Ebene, dass das Centrum der Kugel eine Ellipse beschreibt, in deren Brennpunkt sich der Sitz der Kraft befindet. Die Kugel gelangt an einen Theil der Ebene, der vollständig rauh ist, zu einer Zeit, zu welcher der Abstand ihres Centrums von dem Sitz der Kraft  $\frac{1}{n}$  tel der grossen Axe ihrer Bahn ist; man zeige, dass die grosse Axe in dem Verhältniss 7 : 5 + 2n kleiner wird. Kommt die Kugel wieder an den glatten Theil der Ebene, wenn der Abstand ihres Centrums von dem Brennpunkt derselbe Theil der grossen Axe ist, wie zuvor, so wird die Länge der grossen Axe wieder in demselben Verhältniss vermindert.

Beisp. 5. Zwei Kugeln von gleichem Volumen, aber verschiedenen Massen, ziehen sich nach dem Newton'schen Gesetz an und rollen auf einer rauhen Ebene. Man zeige, dass beide in Bezug auf ihren gemeinschaftlichen Schwerpunkt Ellipsen beschreiben, die diesen Punkt zu einem Brennpunkt haben.

§ 270. In der Regel werden die Hauptaxen zu Bezugsaxen gewählt, weil die Momente der Effectivkräfte für sie äusserst einfach sind. Die etwas langen Gleichungen in § 252 reduciren sich auf die einfache Euler'sche Gestalt, wenn man sie auf die Hauptaxen bezieht. Manchmal jedoch ist es von Vortheil, andre Axen zu wählen, falls diese den geometrischen Bedingungen des Problems besser entsprechen. Die Discussion solcher Axen behalten wir uns für den zweiten Theil vor. Wenn aber die Bewegung stetig ist, die Winkelgeschwindigkeiten also constant sind, so nehmen die Gleichungen in § 252 auch ohne Reduction manchmal eine so einfache Form an, dass sie ohne Schwierigkeit aufzulösen sind.

Beisp. Ein schwerer Körper ist mittelst zweier Gelenke an eine horizontale Axe befestigt, um welche er sich frei drehen kann. Die Axe lässt man mit gleichförmiger Winkelgeschwindigkeit  $\omega$  um eine verticale, sie im Punkt O schneidende Gerade rotiren. Man soll finden, unter welchen Bedingungen der Körper einen constanten Winkel mit der Verticalen macht.

Die horizontale im Körper befestigte Axe nehme man zur  $z$ -Axe. Die Verticale liegt dann in der  $xy$ -Ebene und möge mit der  $x$ - bez.  $y$ -Axe die Winkel  $\theta$  und  $\frac{1}{2}\pi - \theta$  machen. Das ganze System dreht sich um die Verticale mit der Winkelgeschwindigkeit  $\omega$ . Durch Zerlegung erhält man daher  $\omega_x = \omega \cos \theta$ ,  $\omega_y = \omega \sin \theta$ ,  $\omega_z = 0$ . Da diese Winkelgeschwindigkeiten constant sind, so wird die allgemeine Momentengleichung des § 252

$$-\Sigma mxy(\omega_x^2 + \omega_y^2) + \Sigma m(x^2 + y^2)\omega_x\omega_y = N.$$

Um  $N$  zu finden, zerlegen wir das Gewicht  $Mg$  parallel zu den Axen; es ist dann  $X = -Mg \cos \theta$ ,  $Y = -Mg \sin \theta$ ,  $Z = 0$ , und wenn  $(x, y, z)$  die Coordinaten des Schwerpunktes sind,  $N = xY - yX$ . Die gesuchte Beziehung zwischen  $\omega$  und  $\theta$  ist daher

$$\omega^2 [\cos 2\theta \Sigma mxy - \frac{1}{2} \sin 2\theta \Sigma m(x^2 - y^2)] = Mg(x \sin \theta - y \cos \theta).$$

Die Integrale  $\Sigma mxy$  und  $\Sigma m(x^2 - y^2)$  kann man durch die Trägheits- und Deviationsmomente des Körpers auf die gewöhnliche Art ausdrücken.

Probleme über gleichförmige Bewegung lassen sich oft leicht durch directe Anwendung des D'Alembert'schen Princip's lösen. So beschreibt in dem eben besprochenen Problem jedes Element des Körpers mit gleichförmiger Winkelgeschwindigkeit einen horizontalen Kreis, dessen Mittelpunkt in der verticalen Axe liegt. Ist  $r$  der Radius des Kreises, so hat die Effectivkraft  $m\omega^2 r$ , die an dem Element angreift, die Richtung des Radius. Der Körper lässt sich daher so ansehen, als ob er im Gleichgewicht wäre unter der Wirkung seines Gewichtes und eines Systems von Kräften, die direct von der verticalen Axe aus wirken und dem Abstand von dieser Axe proportional sind. Die oben gefundene Gleichung erhält man, wenn man die Momente um  $Oz$  nimmt.

Beisp. 1. Wird dem Körper ein Stoss in der Richtung der  $z$ -Axe gegeben und lässt man ihn um die Verticalen mit derselben Winkelgeschwindigkeit, wie zuvor, rotiren, so hat dies, wie man zeigen möge, keinen Einfluss auf die Neigung des Körpers gegen die Verticalen.

Beisp. 2. Der Körper sei eine schwere Scheibe, die sich um eine horizontale in ihrer Ebene liegende Axe  $Oz$  drehen kann; man zeige, dass die Ebene der Scheibe vertical steht, solange  $k^2\omega^2$  nicht grösser als  $gh$  wird, unter  $h$  den Abstand des Schwerpunktes der Scheibe von  $Oz$  und unter  $k$  den Trägheitsradius für  $Oz$  verstanden.

Beisp. 3. Wenn der Körper eine kreisförmige Scheibe ist, die sich um eine horizontale auf ihrer Ebene senkrechte und ihren Umfang schneidende Axe drehen kann, so lässt sich zeigen, dass die Winkelgeschwindigkeit  $\omega$ , wenn  $\theta$  den Winkel bedeutet, den die Tangente an die Scheibe bei dem Gelenk mit der Verticalen macht, durch  $\omega^2 a \sin \theta = g$  gegeben ist.

Beisp. 4. Zwei gleiche Bälle  $A$  und  $B$  werden an die Enden zweier gleicher dünner Stäbe  $Aa$ ,  $Bb$  befestigt. Die Enden  $a$  und  $b$  sind durch Gelenke mit einem festen Punkt  $O$  verbunden und das Ganze wird um eine verticale durch  $O$  gehende Axe, wie bei dem Regulator einer Dampfmaschine, in Rotation gesetzt. *Wenn die Masse der Stäbe vernachlässigt wird, zu zeigen, dass die Rotationszeit der Schwingungsdauer eines Pendels gleichkommt, dessen Länge der verticale Abstand jeder Kugel von den Gelenken bei  $O$  ist.*

Beisp. 5. Wenn in dem vorigen Beispiel  $m$  die Masse eines jeden dünnen Stabes,  $M$  die einer Kugel,  $l$  die Länge eines Stabes,  $r$  der Radius einer Kugel,  $h$  die Tiefe eines jeden Mittelpunktes unter dem Gelenk bedeutet, so ist die Länge des Pendels

$$\frac{h}{l + r} \frac{M(l + r)^2 + \frac{1}{3} m l^2}{M(l + r) + \frac{1}{2} m l}.$$

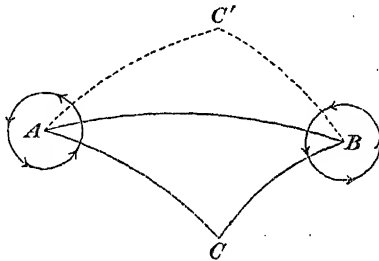
## Endliche Rotationen.

§ 271. Sind die Rotationen, welche zusammenzusetzen sind, ihrer Grösse nach endlich, so ist das Verfahren zur Ermittlung ihrer Resultanten etwas complicirt. Wie schon in § 229 erwähnt wurde, sind solche Rotationen in der Dynamik der Systeme starrer Körper nicht von grosser Bedeutung. Wir wollen daher nur einige Sätze kurz erwähnen, welche dieselben für den Fall unendlich kleiner Bewegung schon besprochenen Sätze in besseres Licht zu setzen im Stande sind. Wir beginnen mit dem Satz, der dem Parallelogramm der Winkelgeschwindigkeiten entspricht.

**Der Satz von Rodriguez.** *Ein Körper erleidet nacheinander zwei Rotationen, 1) eine Rotation um eine Axe  $OA$  von der Amplitude  $\theta$ , 2) eine darauf folgende Rotation um eine Axe  $OB$  von der Amplitude  $\theta'$ ; die beiden Axen liegen im Raum fest. Man soll die Rotationen zusammensetzen.*

Die auf  $OA, OB$  aufgetragenen Längen sollen diese Rotationen auf die in § 231 erklärte Art darstellen.

Die Richtungen der Axen  $OA, OB$  mögen eine Kugel, deren Centrum in  $O$  liegt, in  $A$  und  $B$  treffen. Auf dieser Kugel trage man an  $BA$  in der der Rotation um  $OA$  entgegengesetzten Richtung den Winkel  $BAC$  gleich  $\frac{1}{2}\theta$  an und ebenso den Winkel  $ABC$  gleich  $\frac{1}{2}\theta'$ , doch in derselben Rich-



tung, in der die Rotation um  $OB$  erfolgt und die Bogen mögen sich in  $C$  schneiden. Schliesslich trage man noch die Winkel  $BAC'$  und  $ABC'$  gleich  $BAC$  bez.  $ABC$  auf der andern Seite von  $AB$  auf.

Die Rotation  $\theta$  um  $OA$  bringt jeden Punkt  $P$  in  $OC$  in die Gerade  $OC'$  und die folgende Rotation  $\theta'$  um  $OB$  bringt den Punkt  $P$  wieder zurück nach  $OC$ . Die Punkte von  $OC$  sind daher nach der doppelten Rotation in ihrer früheren Lage und  $OC$  ist deshalb die Axe der einzelnen Rotation, durch welche die gegebene Verrückung des Körpers sich herstellen lässt. Die Gerade  $OC$  heisst die resultirende Rotationsaxe. Wird die Reihenfolge der Rotationen umgekehrt, so dass der Körper zuerst um  $OB$  und dann um  $OA$  rotirt, so würde  $OC'$  die resultirende Axe sein. Lügen die Axen  $OA, OB$  in dem Körper fest, so würde die Rotation  $\theta$  um  $OA$  die Axe  $OB$  in eine Lage  $OB'$  bringen. Der Körper kann dann von seiner ersten in seine letzte Lage durch die Rotationen  $\theta, \theta'$  um die im Raum festliegenden Axen  $OA, OB'$  gebracht werden. Dieselbe Construction liefert mithin wieder die Lage der resultirenden Axe und die Rotation um sie.

Um die Grösse  $\theta''$  der Rotation um die resultirende Axe  $OC$  zu finden, bemerken wir, dass ein in  $OA$  angenommener Punkt  $P$  durch die Rotation  $\theta$  um  $OA$  nicht in Bewegung gesetzt wird und durch die darauf folgende Rotation  $\theta'$  um  $OB$  in eine solche Lage  $P'$  kommt, dass  $PP'$  durch die Ebene  $OBC$  rechtwinklig halbirt wird. Die Rotation  $\theta''$  um  $OC$  muss aber dem Punkt  $P$  dieselbe Verschiebung geben; daher ist für den Normalfall  $\theta''$  das Doppelte des Aussenwinkels zwischen den Ebenen  $OCA$  und  $OCB$ . Wird die Folge der Rotationen umgekehrt, so ist die Rotation um die resultirende Axe  $OC'$  das Doppelte des Aussenwinkels bei  $C'$ , welcher dem bei  $C$  gleich ist. Obwohl also die Lage der resultirenden Rotationsaxe von der Folge der Rotationen abhängt, so ist doch der resultirende Rotationswinkel von ihr unabhängig.

§ 272. Eine Rotation, deren Amplitude das Doppelte eines Innenwinkels des sphärischen Dreiecks  $ABC$  beträgt, ist der Rotation gleich und entgegengesetzt, deren Amplitude das Doppelte des zu ihm gehörigen Aussenwinkels ist. Denn da die Summe der beiden Winkel  $\pi$  ist, so unterscheiden sich die zwei Rotationen nur durch  $2\pi$  und es leuchtet ein, dass eine Rotation um einen Winkel  $2\pi$  die Lage eines Punktes des Körpers nicht ändern kann. Es ist dies nur eine andre Art den Satz auszusprechen, dass ein Körper, der sich um eine feste Axe dreht, von einer gegebenen Lage in eine andre durch Drehung um die Axe sowohl in der einen als der andern Richtung gebracht werden kann.

§ 273. Dem Satz über die Zusammensetzung endlicher Rotationen kann man folgende Fassung geben:

Ist  $ABC$  ein sphärisches Dreieck, so ist eine Rotation um  $OA$  von  $C$  nach  $B$  hin von der Amplitude gleich dem doppelten inneren Winkel bei  $A$ , gefolgt von einer Rotation um  $OB$  von  $A$  nach  $C$  hin von einer Amplitude gleich dem doppelten inneren Winkel bei  $B$  der Rotation um  $OC$  von  $B$  nach  $A$  hin, deren Amplitude dem doppelten inneren Winkel bei  $C$  gleichkommt, gleich und entgegengesetzt.

Man merke, dass die Reihenfolge, in welcher die Axen zu nehmen sind, bei dem Umgang um das Dreieck den Rotationen entgegengesetzt ist.

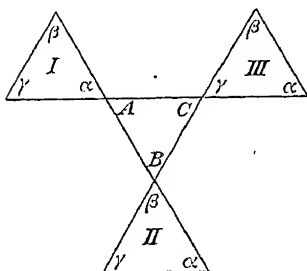
Da die Beweise des § 271 in ihren Grundzügen von Rodriguez herrühren, so hat man dem Satz seinen Namen gegeben. Die Abhandlung von Rodriguez findet man im 5. Band von Liouville's Journal, 1840.

Beisp. Wenn zwei Rotationen  $\theta, \theta'$  um zwei Axen  $OA, OB$ , die senkrecht aufeinander stehen, zu einer einzigen Rotation  $\varphi$  um die Axe  $OC$  vereinigt werden, so ist

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} COA &= \operatorname{tg} \frac{\theta'}{2} \operatorname{cosec} \frac{\theta}{2}, & \operatorname{tg} COB &= \operatorname{tg} \frac{\theta}{2} \operatorname{cosec} \frac{\theta'}{2} \quad \text{und} \\ \cos \frac{\varphi}{2} &= \cos \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta'}{2}. \end{aligned}$$

§ 274. Der Sylvester'sche Satz. Aus dem Satz von Rodriguez lässt sich der Sylvester'sche dadurch ableiten, dass man das Polardreieck  $A'B'C'$  zieht. Da die Seite  $B'C'$  das Supplement des Winkels  $A$  ist, so unterscheidet sich eine der Richtung und Grösse nach durch  $2B'C'$  dargestellte Rotation von der durch  $2A$  in der entgegengesetzten Richtung dargestellten durch eine Rotation von der Amplitude  $2\pi$ . Eine Rotation  $2\pi$  kann aber die Lage des Körpers nicht ändern, daher sind die beiden Rotationen  $2B'C'$  und  $2A$  der Grösse nach äquivalent, dagegen der Richtung nach entgegengesetzt. Ist daher  $A'B'C'$  ein beliebiges sphärisches Dreieck, so bewirkt eine Rotation zweimal  $B'C'$ , gefolgt von einer Rotation zweimal  $C'A'$ , dieselbe Verrückung des Körpers wie eine Rotation zweimal  $B'A'$ . Unter einer Rotation  $B'C'$  versteht man dabei eine Rotation um eine zur Ebene  $B'C'$  senkrechte Axe, die den Punkt  $B'$  nach  $C'$  bringt.

§ 275. Den folgenden Beweis des vorstehenden Satzes hat Prof. Donkin in dem *Phil. Mag.* für 1851 gegeben.  $ABC$  sei ein beliebiges Dreieck auf einer im Raum festliegenden Kugel,  $\alpha\beta\gamma$  ein Dreieck auf einer gleichen und concentrischen Kugel, die sich um ihren Mittelpunkt bewegen kann. Die Seiten und Winkel von  $\alpha\beta\gamma$  sind denen von  $ABC$  gleich, aber anders angeordnet, indem das eine Dreieck das umgekehrte oder Bild des andern ist. Wird das Dreieck  $\alpha\beta\gamma$  in die Lage  $I$  gebracht, so dass die den Winkel  $\alpha$  enthaltenden Seiten in denselben grössten Kreisen mit den den Winkel  $A$  enthaltenden liegen, so kann es offenbar längs  $AB$  in die Lage  $II$  und dann längs  $BC$  in die Lage  $III$  gleiten und kann ebenso auch durch Gleiten längs  $AC$  in diese



letztere Lage gebracht werden.  $\alpha\beta\gamma$  aber längs  $AB$  gleiten lassen ist äquivalent damit, sowohl  $\beta$  als  $\alpha$  längs eines Bogens, der doppelt so gross als  $AB$  ist, um eine auf die Ebene  $AB$  senkrechte Axe bewegen. Dasselbe gilt, wenn das Dreieck längs  $BC$  oder  $AC$  gleitet. Zweimal die Rotation  $AB$ , gefolgt von zweimal der Rotation  $BC$ , bewirkt mithin dieselbe Verrückung wie zweimal die Rotation  $AC$ .

§ 276. Rotationspaare. Sollen die Rotationen um zwei parallele Axen zusammengesetzt werden, so bedarf das Verfahren von Rodriguez nur einer ge-

ringen Aenderung. Statt Bogen auf einer Kugel zu ziehen, lege man Ebenen durch die Axen, welche mit der die beiden Axen enthaltenden Ebene dieselben Winkel wie zuvor machen. Ihre Durchschnittslinie ist die resultirende Axe. Ein specieller Fall verdient Beachtung. Wenn  $\theta = -\theta'$  ist, so liegt die resultirende Axe im Unendlichen. Eine Rotation um eine im Unendlichen liegende Axe ist aber offenbar eine Translation. Eine Rotation  $\theta$  daher um eine Axe  $OA$ , gefolgt von einer gleichen und entgegengesetzten Rotation um eine parallele Axe  $O'B$ , im Abstand  $a$  von  $OA$ , ist einer Translation  $2a \sin \frac{1}{2}\theta$  äquivalent, welche die Richtung der Sehne des von einem beliebigen Punkt in  $OA$  beschriebenen Bogens hat und senkrecht auf der Ebene steht, die durch  $OA$  geht und mit der die Axen enthaltenden Ebene den Winkel  $\frac{1}{2}\theta$  macht. Dies folgt auch auf einfache Art aus § 223.

§ 277. *Conjugirte Rotationen.* Jede gegebene Verrückung eines Körpers lässt sich durch zwei endliche Rotationen darstellen, von denen die eine um eine beliebige gegebene Gerade und die andre um eine zweite Gerade stattfindet, welche die erste nicht notwendigerweise schneiden muss. Wenn eine Verrückung so dargestellt wird, so heissen die Axen *conjugirte Axen* und die Rotationen *conjugirte Rotationen*.

$OA$  sei die gegebene Gerade und die gegebene Verrückung sei durch die Rotation  $\varphi$  um eine Gerade  $OR$  und die Translation  $OT$  dargestellt. Wir wünschen die Rotation um  $OR$  in zwei Rotationen zu zerlegen, eine um  $OA$ , die andere auf sie folgende um  $OB$ , wenn  $OB$  eine auf  $OT$  senkrechte Gerade ist. Zu diesem Zweck verfahren wir, wie in § 271 und beschreiben eine Kugel, deren Mittelpunkt  $O$  und Radius die Einheit ist.  $OA$ ,  $OR$ ,  $OT$  mögen sie in  $A$ ,  $R$ ,  $T$  schneiden. Den Winkel  $ARB$  machen wir dem Supplementwinkel von  $\frac{\varphi}{2}$

gleich, verlängern  $RB$  nach  $B$ , so dass  $TB = \frac{\pi}{2}$  ist und verbinden  $A$  und  $B$ .

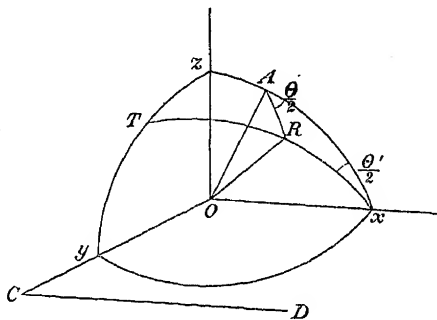
Nach dem Sylvester'schen Satz wird nun die Rotation  $\varphi$  durch eine Rotation um  $OA$ , die wir  $\theta$  nennen wollen, und die darauf folgende um  $OB$ , die  $\theta'$  heissen mag, dargestellt.

Nach § 276 ist die Rotation  $\theta'$  einer gleichen Rotation  $\theta'$  um eine parallele Axe  $CD$  zusammen mit einer Translation äquivalent, welche man so einrichten kann, dass sie die Translation  $OT$  aufhebt. Dieser Fall tritt ein; wenn der Winkel, den  $OT$  mit der Ebene von  $OB$ ,  $CD$  macht,  $\frac{1}{2}(\pi - \theta')$  ist und auf der einen oder andern Seite von  $OT$  je nach der Richtung der Rotation liegt und wenn der Abstand  $r$  zwischen  $OB$  und  $CD$  derart ist, dass  $2r \sin \frac{1}{2}\theta' = OT$  ist.

Auf diese Art ist die ganze Verrückung auf die Rotation  $\theta$  um  $OA$ , gefolgt von der Rotation  $\theta'$  um  $CD$  reducirt worden.

§ 278. *Zusammensetzung von Schraubenbewegungen.* Zwei aufeinander folgende Verrückungen eines Körpers kann man durch zwei successive Schraubenbewegungen darstellen. Man soll diese zusammensetzen.

Der Körper möge zuerst eine Rotation  $\theta$  um die Axe  $OA$  mit der Translation  $a$  und dann die Rotation  $\theta'$  um  $CD$  mit der Translation  $a'$  haben.  $OC$  sei der kürzeste Abstand zwischen  $OA$  und  $CD$  und möge der leichteren Darstellung wegen die  $y$ -Axe sein.  $O$  sei der





Coordinatenanfang und die  $x$ -Axe parallel zu  $CD$ , so dass also  $OA$  in der  $xz$ -Ebene liegt. Es sei  $OC = r$  und der Winkel  $AOx = \alpha$ . Man ziehe die Ebene  $xOT$  so, dass sie mit der  $xz$ -Ebene den Winkel  $\frac{1}{2}\theta'$  macht; sie schneide die  $yz$ -Ebene in  $OT$ . Ferner ziehe man eine zweite Ebene  $AOR$ , die mit der  $xz$ -Ebene den Winkel  $\frac{1}{2}\theta$  macht und die Ebene  $xOT$  in  $OR$  schneidet.

Man verlängere  $AO$  bis zu einem in der Figur nicht angegebenen Punkt  $P$ , so dass  $PO = a$  ist, und  $P$  sei der Reductionspunkt, auf welchen die ganze Verrückung des Körpers bezogen wird. Die Rotation  $\theta'$  ist einer Rotation  $\theta'$  um  $Ox$  zusammen mit einer Translation  $2r \sin \frac{1}{2}\theta'$  längs  $OT$  nach § 223 äquivalent. Nach § 271 ist die Rotation  $\theta$  um  $OA$ , gefolgt von  $\theta'$  um  $Ox$  gleichwerthig mit der Rotation  $\Omega$  um  $OR$ , wenn  $\Omega$  der doppelte Winkel  $ART$  ist, so dass

$$\sin \frac{1}{2}\Omega = -\cos \frac{1}{2}\theta \cos \frac{1}{2}\theta' + \sin \frac{1}{2}\theta \sin \frac{1}{2}\theta' \cos \alpha$$

ist. Die ganze Verrückung wird nun dargestellt durch (1) eine Translation des Reductionspunktes  $P$  nach  $O$ , (2) die Rotation  $\Omega$  und (3) eine weitere Translation, welche die Resultante der Translationen  $2r \sin \frac{1}{2}\theta'$  längs  $OT$  und  $a'$  längs  $Ox$  ist. Nach § 219 können diese Verrückungen in beliebiger Reihenfolge vorgenommen werden, da sie sich sämmtlich auf denselben Reductionspunkt beziehen. Man kann sie daher in eine einzige Schraubenbewegung auf die in § 225 angegebene Art zusammensetzen. Sie heisst *die resultirende Schraubenbewegung*. Eine Schraubenbewegung, die dieser resultirenden gleich und entgegengesetzt ist, bringt den Körper wieder in seine ursprüngliche Lage zurück.

Die Rotationsamplitude der resultirenden Schraubenbewegung ist  $\Omega$  und ihre Axe ist nach § 220 parallel zu  $OR$ . Aus § 271 ergibt sich, dass *der Sinus der halben Rotationsamplitude einer jeden Schraubenbewegung dem Sinus des Winkels zwischen den Axen der beiden andern Schraubenbewegungen proportional ist*.

Um die Translation längs der Axe der resultirenden Schraubenbewegung zu finden, muss man nach § 222 die Projectionen der drei Translationen  $OT$ ,  $a$ ,  $a'$  auf  $OR$  addiren. Die Projection von  $OT$  ist  $2r \sin \frac{1}{2}\theta' \cos TR = 2r \cos Ty \cdot \cos TR$ , also der doppelten Projection des kürzesten Abstandes  $r$  auf die Rotationsaxe gleich. Bezeichnet  $T$  die gesuchte Translation, so hat man

$$T = 2r \cos Ry + a \cos RA + a' \cos Rx.$$

§ 279. Sind die zusammenzusetzenden Schraubenbewegungen einfache Rotationen, so ist  $a = 0$ ,  $a' = 0$  und es lässt sich leicht zeigen, dass

$$T \sin \frac{1}{2}\Omega = 2r \sin \frac{1}{2}\theta \sin \frac{1}{2}\theta' \sin \alpha$$

ist. In § 277 ist bewiesen worden, dass man jede Verrückung durch zwei conjugirte Rotationen auf unendlich verschiedene Art darstellen kann; aus dem Vorigen ergibt sich nun, dass in allen diesen Fällen  $r \sin \frac{1}{2}\theta \sin \frac{1}{2}\theta' \sin \alpha$  sich gleich bleibt. Sind die Rotationen unbegrenzt klein und  $\omega dt$  bez.  $\omega' dt$  gleich, so wird daraus  $\frac{1}{4} r \omega \omega' (dt)^2 \sin \alpha$ , d. h. das Product aus einer Winkelgeschwindigkeit und dem Moment ihrer conjugirten Winkelgeschwindigkeit um ihre Axe ist für alle dieselbe Bewegung darstellenden conjugirten Winkelgeschwindigkeiten dasselbe.

Beisp. 1. Sind die zusammenzusetzenden Schraubenbewegungen einfache endliche Rotationen, so lässt sich zeigen, dass die Gleichungen für die Axe der resultirenden Schraubenbewegung

$$\begin{aligned} -x \operatorname{tg} \varphi' + y \sin \frac{1}{2}\theta' + z \cos \frac{1}{2}\theta' &= r \sin \frac{1}{2}\theta', \\ y \cos \frac{1}{2}\theta' - z \sin \frac{1}{2}\theta' &= r \sin \frac{1}{2}\theta' \cos \varphi' \cotg \frac{1}{2}\Omega \end{aligned}$$

sind, worin  $\varphi'$  den Winkel  $\angle OR$  und  $\Omega$  die resultirende Rotation bedeutet. Die erste Gleichung drückt aus, dass die Centralaxe in der Ebene liegt, welche die von  $O$  aus auf  $OR$  in der Ebene  $\angle OR$  senkrecht gezogene, die Translation in dieser Richtung darstellende Gerade rechtwinklig halbirt; die zweite, dass die Centralaxe in einer zu  $TOR$  parallelen Ebene liegt, welche den in § 225 bestimmten Abstand von  $TOR$  hat.

§ 280. Die Geschwindigkeit der Punkte. Die Formeln sind etwas complicirter als die entsprechenden in § 238 für unendlich kleine Bewegungen.

Die Verrückung eines Körpers ist durch eine Rotation von der endlichen Amplitude  $\theta$  um eine Axe  $OI$  gegeben, die durch den Coordinatenanfang geht und deren Richtungs-cosinusse  $(l, m, n)$  sind. Man soll die dadurch bedingten Aenderungen der Coordinaten  $(x, y, z)$  eines Punktes  $P$  finden.

Statt den Körper zu verrücken, wollen wir die Coordinatenachsen um den gleichen Winkel  $\theta$  und um dieselbe Axe  $OI$ , jedoch in entgegengesetzter Richtung rotiren lassen. Das Problem wird dann die Umkehrung des in § 217 besprochenen.

Die Axen  $Ox, Oy, Oz$  mögen nach dieser Rotation die Lagen  $Ox', Oy', Oz'$  einnehmen; die neuen Coordinaten von  $P$  seien

$$x' = x + \delta x, \quad y' = y + \delta y, \quad z' = z + \delta z$$

und  $\alpha, \beta, \gamma$  die Richtungswinkel von  $OI$  auf beide Axensysteme bezogen. Die Axen mögen eine Kugel vom Radius gleich der Einheit in  $A, B, C; A', B', C'$  treffen. Durch Projection erhält man

$$x' = x \cos AA' + y \cos BA' + z \cos CA',$$

aus dem sphärischen Dreieck  $IAA'$

$$\sin \frac{1}{2} AA' = \sin \alpha \sin \frac{1}{2} \theta$$

und aus den beiden sphärischen Dreiecken  $BIA, BIA'$

$$0 = \cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta \cos Z,$$

$$\cos BA' = \cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta \cos(Z + \theta),$$

worin  $Z$  den Winkel  $AIB$  bezeichnet. Beachtet man, dass  $l = \cos \alpha, m = \cos \beta, n = \cos \gamma$  ist, so ergibt die erste Gleichung  $\operatorname{tg} Z = -\frac{n}{lm}$  und die zweite

$\cos BA' = lm - lm(\cos \theta - \operatorname{tg} Z \sin \theta) = \sin \theta (-n + lm \operatorname{tg} \frac{1}{2} \theta)$ . Auf ähnliche Weise erhält man durch Aenderung des Vorzeichens von  $\theta$ ,

$$\cos CA' = \sin \theta (m + ln \operatorname{tg} \frac{1}{2} \theta),$$

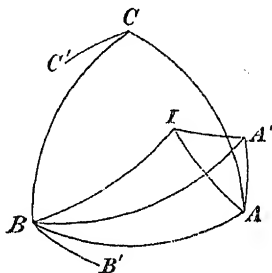
also

$$\operatorname{cosec} \theta \delta x = -x \operatorname{tg} \frac{1}{2} \theta + mz - ny + l \operatorname{tg} \frac{1}{2} \theta (lx + my + nz) \quad (1)$$

und ähnliche Ausdrücke für  $\delta y, \delta z$ .

Wenn der Coordinatenanfang eine Translation hat, deren Componenten parallel den Axen  $Ox, Oy, Oz$  durch  $a, b, c$  dargestellt werden, so müssen diese zu den obigen Werthen von  $\delta x, \delta y, \delta z$  addirt werden.

Nimmt man an, die Verrückung sei durch eine Translation  $(a, b, c)$  und eine Rotation  $\theta$  um die Axe  $(l, m, n)$  gegeben, so ergeben sich die Gleichungen der Centralaxe ohne Schwierigkeit. Die gesuchte Axe ist parallel zu  $OI$  (§ 225) und die Translation längs derselben der Projection der Translation des Coordinaten-



anfangs auf sie gleich (§ 222). Jeder Punkt auf der Centralaxe muss daher den Gleichungen

$$\frac{\delta x}{l} = \frac{\delta y}{m} = \frac{\delta z}{n} = la + mb + nc \quad \dots \quad (A)$$

genügen. Sind  $f, g, h$  die Coordinaten des Fusspunktes des vom Coordinatenanfang auf die Centralaxe gefüllten Lothes, so ist

$$2f = a - l(al + bm + cn) - (bn - cm) \cotg \frac{1}{2} \theta$$

mit ähnlichen Ausdrücken für  $g, h$ . Die Gleichung der Centralaxe nimmt dann die einfache Gestalt an

$$\frac{x-f}{l} = \frac{y-g}{m} = \frac{z-h}{n}.$$

Um den Ausdruck für  $f$  zu erhalten, setze man  $f, g, h$  statt  $x, y, z$  in den Werthen von  $\delta x, \delta y, \delta z$ . Bezeichnet man die rechte Seite der Gl. (A) der Kürze wegen mit  $K$  und beachtet, dass  $fl + gm + hn = 0$  ist, so erhält man

$$lK - a = \left( -f \operatorname{tg} \frac{1}{2} \theta + mh - ng \right) \sin \theta$$

und zwei ähnliche Gleichungen. Multiplicirt man diese drei Gleichungen mit  $-\operatorname{tg} \frac{1}{2} \theta, n$  bez.  $-m$  und addirt, so wird

$$(a - lK) \operatorname{tg} \frac{1}{2} \theta - (bn - cm) = f(1 + \operatorname{tg}^2 \frac{1}{2} \theta) \sin \theta,$$

woraus sich der gesuchte Werth von  $f$  sofort ergibt.

Wenn  $\xi, \eta, \zeta$  die Coordinaten des *Mittelpunktes der ganzen Verschiebung eines Punktes*  $P$  bezeichnen, so ist  $\xi = x + \frac{1}{2} \delta x$ , etc. Die Ausdrücke für die Componenten der Verschiebung nehmen dann die Gestalt an

$$\delta x = a + 2 \operatorname{tg} \frac{1}{2} \theta \left[ m \left( \xi - \frac{1}{2} c \right) - n \left( \eta - \frac{1}{2} b \right) \right] \quad \dots \quad (2)$$

Dies stimmt mit den von Rodriguez gefundenen Resultaten überein. Um die Gleichungen (2) zu erhalten, beachte man, dass ein Körper, der um  $OI$  durch einen Winkel  $\theta$  gedreht wurde, wenn man ihn rückwärts um denselben Winkel rotiren lässt, seine frühere Lage wieder einnimmt. Setzt man daher  $x + \delta x$ , etc. anstatt  $x, y, z$  auf der rechten Seite der Gl. (1) und ändert das Vorzeichen von  $\theta$ , so erhält man dieselbe linke Seite mit  $-\delta x$  und  $-\theta$  an Stelle von  $\delta x$  und  $\theta$ . Es wird also

$$\operatorname{cosec} \theta \delta x = + (x + \delta x) \operatorname{tg} \frac{1}{2} \theta + m(z + \delta z) - n(y + \delta y) - l \operatorname{tg} \frac{1}{2} \theta \{ l(x + \delta x) + \dots \}.$$

Bedenkt man, dass  $l\delta x + m\delta y + n\delta z = 0$  ist, weil nur Rotation stattfindet, § 222, so findet man durch Addition

$$\delta x = 2(m\xi_1 - n\eta_1) \operatorname{tg} \frac{1}{2} \theta,$$

worin  $\xi_1 = x + \frac{1}{2} \delta x$ , etc. die Coordinaten des Mittelpunktes der durch die Rotation allein bewirkten Verrückung sind. Hat der Coordinatenanfang ebenfalls eine Translation, die durch  $a, b, c$  dargestellt wird, so schliessen wir diese in die Werthe von  $\delta x, \delta y, \delta z$  ein. Weil  $\xi, \eta, \zeta$  die Coordinaten des Mittelpunktes der ganzen Verrückung sind, so setze man  $\xi_1 = \xi - \frac{1}{2} a$ , etc. Man erhält dann unmittelbar die Gleichungen (2).

Da die ganze Verschiebung eines Punktes der Centralaxe längs dieser Axe stattfindet, so sind  $\xi, \eta, \zeta$  auch die Coordinaten eines Punktes der Centralaxe. Die Gleichungen der Centralaxe kann man daher auch bilden, indem man die Werthe von  $\delta x, \delta y, \delta z$  in (A) substituirt.

§ 281. Durch Benutzung der Formeln für  $\delta x$ ,  $\delta y$ ,  $\delta z$  kann man die Componenten der ganzen Verschiebung eines Punktes  $P$  in Folge zweier Schraubenbewegungen finden, die der Reihe nach um zwei durch beliebige Punkte  $(f, g, h)$ ,  $(f', g', h')$  gehende Axen  $(l, m, n)$ ,  $(l', m', n')$  stattfinden. Bezeichnet man die Rotationen und Translationen mit  $(\theta, v)$ ,  $(\theta', v')$ , so sind die Verschiebungen von  $(xyz)$  in Folge der ersten

$$\delta x = vl + \sin \theta [-t(x-f) + m(z-h) - n(y-g) + ltP],$$

worin

$$P = l(x-f) + m(y-g) + n(z-h) \quad \text{und} \quad t = \operatorname{tg} \frac{1}{2} \theta$$

ist, mit ähnlichen Ausdrücken für  $\delta y$ ,  $\delta z$ .

Die Verschiebungen  $\delta'x$ ,  $\delta'y$ ,  $\delta'z$  in Folge der zweiten Schraubenbewegung ergeben sich, wenn man  $x + \delta x = f'$ , etc. für  $x, y, z$ ;  $l', m', n'$  für  $l, m, n$  und  $\theta', v'$  für  $\theta, v$  setzt. Addirt man beide, so erhält man die ganze Verschiebung  $\Delta x = \delta x + \delta'x$ , etc. in Folge beider Schraubenbewegungen. Das Verfahren bietet weiter keine Schwierigkeiten dar, nur ist das Resultat im Allgemeinen etwas lang. Wir kommen so zu drei linearen Ausdrücken für die Componenten  $\Delta x$ ,  $\Delta y$ ,  $\Delta z$  der ganzen Verschiebung in Folge beider Schraubenbewegungen. Sie haben die Form

$$\Delta x = a + Ax + By + Cz$$

und ähnlich für  $\Delta y$ ,  $\Delta z$ .

Um die Centralaxe der beiden Schraubenbewegungen zu finden, beachte man, dass der Ort von Punkten, deren Verschiebungen gleich und parallel sind, eine der resultirenden Schraubenaxe parallele Gerade ist, § 220. Setzt man daher  $\Delta x = a$ ,  $\Delta y = b$ ,  $\Delta z = c$ , so erhält man drei Gleichungen ersten Grades, von welchen immer zwei die Verhältnisse von  $x, y, z$  bestimmen und daher die Richtungscosinusse der Centralaxe angeben. Sie seien  $\lambda, \mu, \nu$ . Die Gleichung der Centralaxe ist dann

$$\frac{\Delta x}{\lambda} = \frac{\Delta y}{\mu} = \frac{\Delta z}{\nu} = \lambda a + \mu b + \nu c.$$

## Kapitel VI.

### Die Bewegungsgrösse.

§ 282. Das Kapitel hat die Ueberschrift „Bewegungsgrösse“ erhalten, obgleich nur ein Theil seines Inhalts durch sie ausgedrückt wird. Am besten lässt sich der Inhalt des Kapitels in dem folgenden Problem aussprechen. Die Umstände der Bewegung eines Systems zur Zeit  $t_0$  sind gegeben; zur Zeit  $t_1$  bewegt sich das System unter anderen Umständen; man soll die Beziehungen bestimmen, welche zwischen den beiden Bewegungen existiren. Die Art, auf welche diese Aenderungen durch die Kräfte bewirkt werden, ist nicht Gegenstand der Untersuchung. Wir wollen nur bestimmen, welche Aenderungen in der Zeit  $t_1 - t_0$  vorgegangen sind. Ist die Zeit  $t_1 - t_0$  sehr klein und sind die Kräfte sehr gross, so wird es zum allgemeinen Problem der Momentankräfte. Auch dieses soll in dem Kapitel behandelt werden.

Das System möge auf beliebige feste Axen  $Ox$ ,  $Oy$ ,  $Oz$  bezogen werden. Die sechs allgemeinen Bewegungsgleichungen lassen sich dann nach § 71 in der Form schreiben

$$\left. \begin{aligned} \Sigma m \frac{d^2 z}{dt^2} &= \Sigma m Z, \\ \Sigma m \left( x \frac{d^2 y}{dt^2} - y \frac{d^2 x}{dt^2} \right) &= \Sigma m (x Y - y X) \end{aligned} \right\}.$$

Integrirt man sie von  $t = t_0$  bis  $t = t_1$ , so ergibt sich

$$\begin{aligned} \left( \Sigma m \frac{dz}{dt} \right)_{t_0}^{t_1} &= \Sigma m \int_{t_0}^{t_1} Z dt, \\ \left[ \Sigma m \left( x \frac{dy}{dt} - y \frac{dx}{dt} \right) \right]_{t_0}^{t_1} &= \Sigma m \int_{t_0}^{t_1} (x Y - y X) dt. \end{aligned}$$

Eine beschleunigende Kraft  $F$  greife an einem in Bewegung befindlichen materiellen Punkt  $m$  während der Zeit  $t_1 - t_0$  an und diese Zeit werde in Intervalle getheilt, von denen jedes gleich  $dt$  ist. In der Mitte eines jeden solchen Intervalls ziehe man von der Lage aus, die  $m$  in diesem Augenblick hat, eine Linie, welche den Werth, den

$mFdt$  in demselben Augenblick besitzt, der Richtung und Grösse nach darstellt. Die Resultante dieser Kräfte, wie man sie in der Statik findet, heisst *die ganze* in der Zeit  $t_1 - t_0$  zur Verwendung gekommene

Kraft. So ist  $\int_{t_0}^{t_1} mZdt$  die Componente der ganzen Kraft parallel der  $z$ -Axe. Aus den Gleichungen geht nun hervor, dass

(1) *die durch beliebige Kräfte hervorgebrachte Aenderung der Componente der Bewegungsgrösse eines Systems zu einer beliebigen Zeit der ganzen Componente der Kraft in derselben Richtung gleich ist und dass*

(2) *die durch beliebige Kräfte bewirkte Aenderung des Moments der Bewegungsgrösse des Systems um eine Gerade zu einer beliebigen Zeit dem ganzen Moment dieser Kräfte um dieselbe Gerade gleich ist.*

Ist das Intervall  $t_1 - t_0$  sehr klein, so ist „die ganze Kraft“, die zur Verwendung gekommen ist, das gewöhnliche Mass einer Momentankraft und die vorstehenden Gleichungen sind identisch mit denen in § 85.

Es ist nicht nöthig, die beiden Sätze aus den Bewegungsgleichungen, wie wir es gethan haben, abzuleiten; das folgende allgemeine Theorem, das den beiden obigen Sätzen in Wirklichkeit äquivalent ist, ergibt sich leicht aus dem D'Alembert'schen Princip.

§ 283. **Fundamentalsatz.** *Wenn die Bewegungsgrösse eines Massenpunktes eines sich bewegenden Systems, wie in der Statik, so zusammengesetzt und zerlegt wird, als ob sie eine an der augenblicklichen Lage des Massenpunktes angreifende Kraft wäre, dann sind die Bewegungsgrössen aller Massenpunkte zur Zeit  $t_1$  den Bewegungsgrössen zu einer früheren Zeit  $t_0$  zusammen mit den ganzen Kräften, die während des Intervalls gewirkt haben, äquivalent.*

Die Sache lässt sich auf Grund des D'Alembert'schen Princip's klarer darstellen, wenn man sie etwas ausführlicher behandelt. Multiplicirt man die Masse  $m$  eines Punktes  $P$  mit seiner Geschwindigkeit  $v$ , so ist das Product die Bewegungsgrösse  $mv$  des Massenpunktes. Wir wollen sie der Richtung und Grösse nach durch die Gerade  $PP'$  darstellen, die von dem Massenpunkt aus in der Richtung seiner Bewegung gezogen wird. Zum Zweck der Zusammensetzung und Zerlegung kann man (nach den Regeln der Statik) diese darstellende Gerade in der Richtung der Bewegung in eine beliebige Lage bringen; sie möge sich also mit dem Punkt bewegen. Greift an dem Massenpunkt in irgend einem Augenblick eine äussere Kraft  $mF$  an, so wird in der Zeit  $dt$  eine neue Bewegungsgrösse  $mFdt$  erzeugt. Sie kann ebenfalls durch eine Gerade dargestellt und mit dem  $mv$  des Punktes zusammengesetzt werden. Agiren und reagiren zwei Massenpunkte während der Zeit  $dt$  mit der Kraft  $R$  aufeinander, so werden den Punkten zwei gleiche und entgegengesetzte Bewegungsgrössen (nämlich  $Rdt$ ) mitgetheilt. Nimmt man alle Punkte zusammen, so ist, wie man sieht, die Aenderung ihrer Bewegungsgrössen der Resultante aller  $mFdt$ , die auf das System gewirkt haben, gleich. Da dies für jedes Zeitelement gilt, so ist es auch für jedes endliche Intervall  $t_1 - t_0$  gültig. Weil aber die Resultante aller  $mFdt$  als die ganze Kraft definirt worden ist, so ergibt sich der obige Satz unmittelbar.

Falls keine Kräfte mit Ausnahme der gegenseitigen Einwirkungen der Massenzentren aufeinander an dem System angreifen, sind, wie man sieht, die Bewegungsgrössen aller Massenzentren des Systems zu beliebigen zwei Zeiten äquivalent.

Die beiden Principien der Erhaltung der Translationsbewegungsgrösse und der Flächen kann man so aussprechen:

*Wenn die an einem System angreifenden Kräfte derart sind, dass sie längs einer gewissen festen Geraden keine Componente besitzen, dann ist die Bewegung derart, dass die Componente der Translationsbewegungsgrösse längs dieser Linie constant ist.*

*Wenn die Kräfte so sind, dass sie um eine gewisse feste Gerade kein Moment haben, dann ist das Moment der Bewegungsgrösse oder der Sectorbewegungsgrösse (§ 76) um diese Gerade constant.*

Offenbar sind diese Sätze nur specielle Fälle der in § 78 bewiesenen Theoreme.

§ 284. Die Centralkraft als Beispiel. Ein einzelner Massenpunkt  $m$  beschreibe eine Bahn um ein Kraftcentrum  $O$ .  $v, v'$  seien seine Geschwindigkeiten in irgend zwei Punkten  $P, P'$  seines Wegs.  $mv'$  welches längs der Tangente in  $P'$  wirkte, würde dann, wenn umgekehrt im Gleichgewicht mit dem längs der Tangente in  $P$  wirkenden  $mv$  zusammen mit der ganzen Centralkraft von  $P$  bis  $P'$  stehen. Sind  $p, p'$  die Längen der von  $O$  auf die Tangenten in  $P, P'$  gefällten Lothe, so ergeben die Momente um  $O$ ,  $vp = v'p'$ ; mithin ist  $vp$  während der Bewegung constant. Treffen sich ferner die Tangenten in  $T$ , so muss die ganze zur Verwendung gekommene Centralkraft längs der Linie  $TO$  wirken und lässt sich nach den Regeln für die Zusammensetzung der Geschwindigkeiten durch  $v, v'$  ausdrücken.

Beisp. Zwei Punkte von den Massen  $m, m'$  bewegen sich um dasselbe Kraftcentrum. Sind  $h, h'$  die Sectorengeschwindigkeiten eines der beiden Punkte, zu beweisen, dass  $mh + m'h'$  durch einen Zusammenstoss zwischen den Punkten nicht geändert wird. (§ 76.)

§ 285. Drei Massenpunkte als Beispiel. Drei Massenpunkte mögen vom Zustand der Ruhe ausgehend einander anziehen, ohne dass äusserer Kräfte an ihnen angreifen. Die Bewegungsgrössen der drei Punkte sind zusammen in jedem Augenblick den drei Anfangsbewegungsgrössen äquivalent und sind daher im vorliegenden Fall im Gleichgewicht. Daher müssen sich in jedem Augenblick die Tangenten an ihre Bahnen in einem Punkt  $O$  schneiden und wenn man Parallele zu ihren Bewegungsrichtungen so zieht, dass sie ein Dreieck bilden, so sind die Bewegungsgrössen der einzelnen Punkte den Seiten dieses Dreiecks proportional.

Sind es  $n$  Massenpunkte, so lässt sich auf dieselbe Art zeigen, dass die  $n$  durch  $mv, m'v'$ , etc. dargestellten Kräfte im Gleichgewicht sind und dass die Geraden, welche man parallel zu den Bewegungsrichtungen und proportional den Bewegungsgrössen der Punkte, an

einem beliebigen Punkt beginnend, zieht, ein geschlossenes Polygon bilden.

Die Richtungslinien der an den drei Punkten angreifenden resultirenden Anziehungskräfte  $F, F', F''$  schneiden sich ebenfalls in einem Punkt. Denn sind  $X, Y, Z$  die Wirkungen zwischen den Punkten  $m'm'', m''m, mm'$  der Reihe nach, so ist  $F$  die Resultante von  $-Y$  und  $Z$ ;  $F'$  von  $-Z$  und  $X$ ,  $F''$  von  $-X$  und  $Y$ . Die drei Kräfte  $F, F', F''$  stehen daher im Gleichgewicht<sup>1)</sup> und ihre Richtungslinien müssen sich in einem Punkt  $O'$  schneiden. Auch ist die Grösse einer jeden dem Sinus des Winkels zwischen den Richtungen der beiden andern proportional. Der Punkt  $O'$  liegt im Allgemeinen nicht fest und fällt mit  $O$  nicht zusammen.

Ist die Anziehung dem Abstand direct proportional, so fallen die beiden Punkte  $O, O'$  mit dem Schwerpunkt  $G$  zusammen und liegen während der Bewegung im Raum fest. Denn es ist aus der Statik bekannt, dass unter dieser Voraussetzung die ganze Anziehung eines Systems von Massenpunkten auf einen der Punkte dieselbe ist, als wenn das ganze System in seinem Schwerpunkt vereinigt wäre.  $O'$  fällt daher mit  $G$  zusammen. Da ferner jeder Punkt vom Zustand der Ruhe ausgeht, so ist die Anfangsgeschwindigkeit des Schwerpunktes Null und daher, nach § 78,  $G$  ein fester Punkt. Da weiter jeder Punkt vom Zustand der Ruhe ausgeht und einem festen Punkt  $G$  zugetrieben wird, so bewegt er sich auf der Geraden, welche seine Anfangslage mit  $G$  verbindet.  $O$  fällt daher mit  $G$  zusammen. Wenn die Anziehung dem Abstand direct proportional ist, so hängt, wie in der Dynamik der materiellen Punkte bewiesen wird, die Zeit, welche dazu nöthig ist, das Centrum der Kraft von der Ruhelage aus zu erreichen, von dem Abstand dieser Ruhelage nicht ab. Daher erreichen alle Massenpunkte des Systems  $G$  zu derselben Zeit und treffen sich da. Bezeichnet  $\Sigma m$  die Summe der durch ihre Anziehungen auf die gewöhnliche Art gemessenen Massen, so ist diese Zeit, wie bekannt,  $\frac{1}{4} \frac{2\pi}{\sqrt{\Sigma m}}$ .

Aehnliche Theoreme gelten, wenn die Kräfte anderen Gesetzen folgen. Beispiele dazu werden am Ende des nächsten Paragraphen gegeben und ihre Auflösung kurz angedeutet.

§ 286. Die drei Punkte von Laplace als Beispiel. *Drei Punkte, deren Massen  $m, m', m''$  sind und die sich gegenseitig anziehen, werden so geworfen, dass das durch Verbindung ihrer Lage in jedem Moment gebildete Dreieck seiner Anfangsgestalt immer ähnlich bleibt. Man soll bestimmen, unter welchen Bedingungen der Wurf stattfinden muss.*

Der Schwerpunkt muss sich entweder in Ruhe befinden oder sich gleichförmig auf einer Geraden bewegen. Wir können daher annehmen, er befinde sich

1) Der Beweis ist nur eine nähere Ausführung des folgenden: Die drei Kräfte  $F, F', F''$  stehen nach D'Alembert's Princip im Gleichgewicht, weil sie die inneren Reactionen eines Systems dreier Körper sind.



ist, in welchen der Schwerpunkt bewegt wird. Nach der Voraussetzung sollen  $P, P', P''$  die Lagen der Massenpunkte zur Zeit  $t$ . Nach der Voraussetzung sollen dann die Längen  $OP, OP', OP''$  stets proportional und die Winkelgeschwindigkeiten um  $O$  gleich sein. Da das Moment der Bewegungsgrößen des System um  $O$  sich immer gleich bleibt, so ist

$$mr^2n + m'r'^2n + m''r''^2n = \text{Constante},$$

wenn  $r, r', r''$  die Abstände  $OP, OP', OP''$  und  $n$  ihre gemeinschaftliche Winkelgeschwindigkeit bedeuten. Da die Verhältnisse  $r : r' : r''$  constant bleiben, so folgt aus dieser Gleichung, dass  $mr^2n$  constant ist, d. h. dass  $OP$  gleiche Sektoren in gleichen Zeiten beschreibt. Nach Newton's zweitem Princip ist daher die resultirende an  $P$  angreifende Kraft nach  $O$  gerichtet.

$q, q', q''$  seien die Seiten  $P'P'', P''P, PP'$  des durch die Massenpunkte gebildeten Dreiecks und die Anziehung sei der  $\frac{\text{Masse}}{(\text{Abstand})^k}$  proportional. Dann ist da die resultirende an  $m$  angreifende Anziehung von  $m', m''$  durch  $O$  geht,

$$\frac{m'}{q''^k} \sin P'PO = \frac{m''}{q'^k} \sin P''PO$$

und, weil  $O$  der Schwerpunkt ist,

$$m'q'' \sin P'PO = m''q' \sin P''PO.$$

Entweder liegen daher die drei Massenpunkte in einer Geraden oder es ist  $q''^{k+1} = q'^{k+1}$ . Ist  $k = -1$ , so ist die Anziehung dem Abstand proportional ist  $k$  dagegen nicht  $= -1$ , so wird  $q' = q''$  und das Dreieck muss gleichseitig sein.

Nimmt man an, die Massenpunkte würden in Richtungen geschleudert, die gleiche Winkel mit ihren Abständen vom Schwerpunkt machen und mit Geschwindigkeiten, die diesen Abständen proportional sind und setzt man ferner voraus, die resultirenden Anziehungen nach dem Schwerpunkt hin seien diesen Abständen proportional, so gelten in allen drei Fällen dieselben Bedingungen am Ende der Zeit  $dt$  und so beständig weiter. Die drei Punkte beschreiben daher ähnliche Bahnen auf ähnliche Art um den Schwerpunkt.

Erstens wollen wir annehmen, die drei Massenpunkte lägen in derselben Geraden. Um eine bestimmte Vorstellung zu gewinnen, liege  $m'$  zwischen  $m$  und  $m''$  und  $O$  zwischen  $m$  und  $m'$ . Da die auf jeden Punkt wirkende Anziehungskraft dem Abstand des Punktes von  $O$  proportional sein muss, so müssen die drei Anziehungen, in der Richtung  $PP''$  gemessen, nämlich

$$\frac{m'}{(PP')^k} + \frac{m''}{(PP'')^k}, \quad \frac{m''}{(P'P'')^k} - \frac{m}{(PP')^k}, \quad -\frac{m}{(PP'')^k} - \frac{m}{(P'P'')^k}$$

proportional  $OP, OP', OP''$  sein. Da  $\Sigma mOP = 0$  ist, so liefern die sich daraus ergebenden beiden Gleichungen im Ganzen nur eine Gleichung. Setzt man  $z = \frac{P'P''}{PP'}$  so dass also

$$\frac{OP}{m' + m''(1+z)} = -\frac{OP'}{m + m''z} = \frac{PP'}{m + m' + m''}$$

ist, so erhält man

$$\left(m' + \frac{m''}{(1+z)^k}\right)(-m + m''z) = \left(\frac{m''}{z^k} - m\right)[m' + m''(1+z)],$$

was mit dem Resultat übereinstimmt, welches Laplace fand, der sich zuerst mit diesem Problem beschäftigte.

Falls die Anziehung dem Newton'schen Gesetz folgt, ist  $k=2$  und wird die Gleichung

$$mz^2[(1+z)^3-1] - m'(1+z)^2(1-z^3) - m''[(1+z)^3-z^3] = 0,$$

welche vom fünften Grad ist und daher immer eine reelle Wurzel hat. Die linke Seite der Gleichung hat entgegengesetzte Vorzeichen für  $z=0$  und  $z=\infty$ , daher ist diese reelle Wurzel positiv. Es ist also immer möglich die drei Massen so zu werfen, dass sie in einer Geraden bleiben. Laplace bemerkt, dass, wenn  $m$

die Sonne,  $m'$  die Erde,  $m''$  der Mond ist,  $z$  nahezu den Werth  $\sqrt[3]{\frac{m'+m''}{3m}} = \frac{1}{100}$  erhält. Wären daher ursprünglich die Erde und der Mond in dieselbe Gerade mit der Sonne gebracht worden in Abständen von der Sonne, die zu 1 und  $1 + \frac{1}{100}$  proportional sind, und wären ihre Geschwindigkeiten anfänglich diesen Abständen parallel und proportional gewesen, so würde der Mond stets in Opposition zur Sonne geblieben sein. Der Abstand des Mondes von der Erde wäre zu gross gewesen, als dass er im Zustand beständiger Verfinsterung hätte sein können und es würde deshalb jede Nacht Vollmond gewesen sein. Liouville hat indess in den *Additions à la Connaissance des Temps*, 1845 nachgewiesen, dass eine solche Bewegung unstabil wäre.

Die Bahnen der Punkte sind ähnliche Ellipsen, die den Schwerpunkt zum gemeinschaftlichen Brennpunkt haben.

*Zweitens* sei die Anziehung dem Abstand proportional. In diesem Fall ist die an jedem Massenpunkt angreifende Anziehungskraft dieselbe, als wenn die drei Punkte im Schwerpunkt vereinigt wären. Jeder Punkt beschreibt eine Ellipse, die den Schwerpunkt zum Mittelpunkt hat, in derselben Zeit. Nothwendige Bedingungen für den Wurf sind, dass die Wurfgeschwindigkeiten den Anfangsabständen vom Schwerpunkt proportional sind und dass ihre Richtungen gleiche Winkel mit diesen Abständen machen.

*Drittens* mögen sich die Massenpunkte in den Ecken eines gleichseitigen Dreiecks befinden. Die resultirende, am Punkt  $m$  angreifende beschleunigende Kraft ist

$$\frac{m'}{q'^k} \cos P'PO + \frac{m''}{q''^k} \cos P''PO.$$

Die Bedingung, dass die an den Punkten angreifenden Kräfte ihren Abständen von  $O$  proportional sein müssen, zeigt, dass das Verhältniss dieser Kraft zu dem Abstand  $OP$  dasselbe für alle Massenpunkte ist. Da nach einem Satz über den Schwerpunkt

$$m'q'' \cos P'PO + m''q' \cos P''PO = (m + m' + m'')OP$$

ist, so wird dieser Bedingung offenbar anfangs genügt, wenn  $q = q' = q''$ . Wenn daher die Massenpunkte mit Geschwindigkeiten geworfen werden, die diesen Abständen proportional sind und in Richtungen, die gleiche Winkel mit  $OP$ ,  $OP'$  bez.  $OP''$  machen, so werden sie aus demselben Grund, wie zuvor, stets in den Ecken eines gleichseitigen Dreiecks bleiben.

Eine Besprechung der Stabilität dieser Bewegung findet man im zweiten Theil dieses Werkes.

Beisp. 1. Man zeige, dass, wenn die drei Massenpunkte sich in den Ecken eines gleichseitigen Dreiecks befinden und einander nach dem Newton'schen Gesetz anziehen, ihre Bahnen ähnliche Ellipsen sind, die  $O$  zum gemeinschaftlichen Brennpunkt haben. Man finde die Dauer der Periode.

Beisp. 2. Drei ungleiche Massenpunkte, die sich anziehen wie die umgekehrte  $k^{\text{te}}$  Potenz des Abstandes, werden im Zustand der Ruhe auf die Ecken eines gleichseitigen Dreiecks gesetzt. Man beweise, dass sie sich schliesslich in ihrem gemeinschaftlichen Schwerpunkt treffen.

grade Linien und kommen gleichzeitig in  $O$  an. Die Uebergangszeit ist durch

$$\sqrt{2\mu} t = q^{\frac{1}{2}(k+1)} (1-k)^{\frac{1}{2}} \int_0^1 (1-y^{1-k})^{-\frac{1}{2}} dy$$

gegeben, worin  $\mu = m + m' + m''$  und  $q$  eine Seite des anfänglichen gleichseitigen Dreiecks ist. Das Integral kann man in Gammafunctionen ausdrücken, wenn man  $y^{1-k} = z$  oder  $\frac{1}{2}$  setzt, je nachdem  $k$  kleiner oder grösser als die Einheit ist. Wenn  $k = 3$  ist, kann die Integration ohne Schwierigkeit ausgeführt werden.

Beisp. 3. Wenn das Sonnensystem nur aus Sonne, Erde und Mond, die sich in einer Ebene bewegen, bestände, zu beweisen, dass

$$S(E + M)^3 H + (S + E + M) E M h = \text{Constante}$$

ist, worin  $h$  die Sektorengeschwindigkeit eines Punktes auf dem Mond um die Erde bedeutet, dessen Masse der Einheit gleich gesetzt wird und  $H$  die Sektorengeschwindigkeit des Schwerpunktes der Erde und des Mondes um die Sonne bezeichnet.

Man beweise auch, dass, wenn die Sonne im Raum festläge,

$$\frac{dH}{dt} = \frac{SEM\Delta}{(E + M)^2} \left( \frac{1}{r^3} \sim \frac{1}{r'^3} \right)$$

ist, wo  $r, r'$  die Abstände der  $M$  und  $E$  von  $S$  und  $\Delta$  den doppelten Inhalt des von den drei Körpern gebildeten Dreiecks bezeichnet.

[St. John's Coll., 1896.]

$G$  sei der Schwerpunkt des ganzen Systems,  $K$  der von  $E$  und  $M$ .  $\omega$  sei die Winkelgeschwindigkeit im Raum von  $EM$ ,  $\Omega$  die von  $SK$ . Die doppelte Sektorenbewegungsgrösse des ganzen Systems um  $G$  ist nun constant, die von  $E$  und  $M$ , nach § 74,

$$(E \cdot KE^2 + M \cdot KM^2) \omega + (E + M) \cdot GK^2 \cdot \Omega$$

und die von  $S$  ist  $S \cdot GS^2 \cdot \Omega$ . Gegeben ist  $h = EM^2 \cdot \omega$ ,  $H = SK^2 \cdot \Omega$ ; auch die Abstände  $KE, KM, GK, GS$  kann man, wie aus der Definition des Schwerpunktes bekannt ist, durch die Abstände  $EM, SK$  und die Massen  $S, E, M$  ausdrücken. Substituiert man und setzt die Summe der Sektorenbewegungsgrössen einer Constanten gleich, so ergibt sich die erste Gleichung sofort. Die zweite erhält man dadurch, dass man die Momente um  $S$  und  $K$  nimmt.

Beisp. 4. *Jacobi's Theorem.* Ein freies System von Massenpunkten bewegt sich nur unter der Einwirkung ihrer gegenseitigen Anziehungen und die Kräftefunction  $U$  ist eine homogene Function  $n^{\text{ten}}$  Grades. Man beweise, dass

$$\frac{d^2}{dt^2} \Sigma m R^2 = 2(n+2) U + 2C$$

ist, worin  $R_1, R_2$ , etc. die Abstände der Massenpunkte  $m_1, m_2$ , etc. von ihrem gemeinschaftlichen Schwerpunkt  $O$  und  $C$  eine Constante ist. Wenn die Anziehung umgekehrt wie die dritte Potenz des Abstandes variiert, zu beweisen, dass

$$\Sigma m R^2 = A + Bt + Ct^2$$

ist. (Vorlesungen über Dynamik, 1864, herausgegeben von A. Clebsch, Supplementband, S. 22.)

Durch einfache Differentiation erhält man

$$m \frac{d^2(x^2)}{dt^2} - 2m \left( \frac{dx}{dt} \right)^2 = 2mx \frac{d^2x}{dt^2} = 2x \frac{dU}{dt}$$

und, wenn man die Summen für die Coordinaten  $x, y, z$  und für alle Massenpunkte nimmt, da  $U$  homogen ist,

$$\frac{d^2}{dt^2} (\Sigma m r^2) - 2 \Sigma m v^2 = 2n U.$$

Nach dem Princip der lebendigen Kraft (§ 138 oder § 350) ist

$$\Sigma m v^2 = 2U + C, \quad C = \Sigma m v_0^2 - 2U_0,$$

wenn  $U_0$  der Werth der Kräftefunction im Anfangszustand ist. Daraus folgt

$$\frac{d^2}{dt^2} \Sigma m r^2 = 2(n+2)U + 2C.$$

Nun ist

$$\Sigma m r^2 = \Sigma m R^2 + (\Sigma m)(\bar{x}^2 + \bar{y}^2 + \bar{z}^2);$$

da aber keine äusseren Kräfte existiren, so ist  $\frac{d\bar{x}}{dt}$  constant und deshalb  $\frac{d^2(\bar{x})^2}{dt^2}$

Null. Da das Gleiche für  $\bar{y}$  und  $\bar{z}$  gilt, so folgt daraus der zu beweisende Satz unmittelbar.

Beisp. 5. Drei Massenpunkte, die einander umgekehrt wie die dritte Potenz des Abstandes anziehen, werden in *beliebige Lagen im Zustand der Ruhe gebracht*. Man leite aus Jacobi's Theorem ab, dass ein Zusammenstoss stattfinden muss, bevor die Zeit  $t$ , die sich aus  $t^2 \Sigma \frac{m' m''}{\varrho^2} = \Sigma m R^2$  ergibt, vorüber ist.

Da die Massenpunkte vom Zustand der Ruhe ausgehen, so ist  $B = 0$  und  $C = -2U_0 = -\Sigma \frac{m' m''}{\varrho^2}$ , wenn  $\varrho$  die Seite des Dreiecks bedeutet, welche die Anfangslagen von  $m', m''$  verbindet. Ferner ist  $A$  das Anfangsträgheitsmoment der drei Massenpunkte in Bezug auf ihren gemeinschaftlichen Schwerpunkt. Wir bemerken, dass  $C$  negativ und  $A$  positiv ist und dass die quadratische Gleichung  $A + Ct^2 = 0$  reelle Wurzeln hat.

Stossen zwei Massenpunkte während der Bewegung gegeneinander, so sind wie man aus der Gleichung der lebendigen Kraft ersieht, ihre Geschwindigkeiten in diesem Moment unendlich gross. Die ganze darauf folgende Bewegung wird durch den Zusammenstoss afficirt. Findet er nicht vor der durch  $Ct^2 = -A$  gegebenen Zeit statt, so ist offenbar in diesem Moment  $\Sigma m R^2 = 0$ ; die Massenpunkte müssen daher in Berührung sein.

Aus dem Jacobi'schen Theorem ergibt sich ferner, dass die Anordnung unseres Sonnensystems nicht stabil sein könnte, wenn die Attraction dem umgekehrten Cubus des Abstandes proportional wäre. Denn sind die Wurzeln der Gleichung  $A + Bt + Ct^2 = 0$  reell, so müssen sich die Massenpunkte nach einer endlichen Zeit treffen; sind sie imaginär, so muss, da  $A$  ein Trägheitsmoment und also positiv ist,  $C$  positiv sein und es müssen mithin die Radienvectoren einiger Planeten unendlich gross werden, wenn  $t$  unendlich gross wird.

*Gilt die Jacobi'sche Gleichung ganz unbegrenzt?*

Könnte man annehmen, dass zwei Massenpunkte, wenn sie sich treffen, ohne Widerstand der eine durch den andern hindurchgehen, so liesse sich erwarten, dass die Gleichung

$$\Sigma m R^2 = A + Bt + Ct^2$$

zu jeder Zeit ihre Gültigkeit behielte. Wenn aber  $C$  negativ und  $t$  hinlänglich gross ist, so haben die beiden Seiten der Gleichung entgegengesetzte Vorzeichen, so dass also die Gleichheit nicht unbegrenzt stattfinden kann.

Die Ursache dieses Widerspruchs liegt in der Unstetigkeit, welche bei dem Zusammentreffen zweier Massenpunkte eintritt<sup>1)</sup>. Wenn die Massenpunkte  $m, m'$  den sehr kleinen Abstand  $x$  von einander haben, wird schliesslich  $(dx/dt)^2 = E^2/x^2$ , worin  $E^2 = m + m'$  ist. Daraus erhält man durch Ausziehen der Wurzel  $dx/dt = \pm E/x$ . Nähern sich die Punkte einander, so muss man der Wurzel das negative Vorzeichen geben, weil  $x$  positiv und  $dx/dt$  negativ ist. Wenn die Massen-

1) Um die Sache klarer zu machen, wollen wir annehmen, ein einzelner Massenpunkt  $P$  gehe vom Zustand der Ruhe im Punkt  $A$  aus und werde von einer Centralkraft  $F = \frac{\mu}{OP^2}$ , welche in  $O$  liegt, angezogen. Ist  $OP = x$ , so erhält man  $v^2 = C - 2 \int F dx = C + \frac{\mu}{x^2}$ .

Anfangs ist für  $x = a$ ,  $v = 0$ , daher  $C = -\mu/a^2$ . Wenn der Massenpunkt durch den Coordinatenanfang  $O$  gegangen ist, gilt für die Geschwindigkeit  $v'$  der gleiche Ausdruck, wenn man  $C'$  statt  $C$  setzt. Sind  $v_0, v_0'$  die End- und Anfangsgeschwindigkeiten der beiden Bewegungsperioden, so ist  $v_0'^2 = v_0^2$ , weil es der doppelten von  $F$  auf einer Strecke, die *absolut Null* ist, verrichteten Arbeit gleichkommt, für jedes noch so grosse  $F$  Null. Daher ist  $C' = C$ .

Nimmt man die Quadratwurzel, so wird

$$v = \pm \frac{\sqrt{\mu}}{x} \left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Bei der Annäherung des Massenpunktes an  $O$  muss das negative Vorzeichen genommen werden, weil  $v$  negativ und  $x$  positiv ist. Wenn der Massenpunkt  $O$  passiert hat, ist das positive Vorzeichen zu nehmen, weil  $v$  sein Vorzeichen behält und  $x$  negativ wird. In unserm Problem wechselt daher die Wurzel das Zeichen und geht im Coordinatenanfang  $O$  durch die Unendlichkeit. Diesem Zeichenwechsel kann man dadurch Rechnung tragen, dass man  $\pm \sqrt{\mu}$  negativ oder positiv nimmt, je nachdem der Massenpunkt sich auf der positiven oder negativen Seite des Kraftsitzes befindet.

Es ist nun

$$\frac{d^2}{dt^2}(x^2) = 2v^2 + 2xv \frac{dv}{dt} = -\frac{2\mu}{a^2},$$

daher

$$x^2 = A + Bt - t^2 \frac{\mu}{a^2}.$$

Die Zeit  $t$  werde negativ und positiv genommen von der Epoche an, zu welcher der Massenpunkt durch das Centrum der Kraft geht. Für  $t = 0$  ist dann  $x = 0$ ,  $xv = \mp \sqrt{\mu}$  und also

$$x^2 = \mp 2\sqrt{\mu}t - \frac{\mu}{a^2}t^2,$$

wo das obere oder untere Zeichen zu nehmen ist, je nachdem der Massenpunkt sich auf der positiven oder negativen Seite des Centrums der Kraft befindet. Der Punkt schwingt in gleichen Bogen auf beiden Seiten des Centrums der Kraft und die rechte Seite der Gleichung wird nie negativ.

Die Ansichten über die richtige Interpretation der Gleichungen für die Punkte, an welchen entweder die Geschwindigkeit oder die Kraft unendlich gross wird, sind sehr auseinandergegangen. Wir verweisen den Leser auf eine Abhandlung von Asaph Hall in Bd. 3 des *Messenger of Mathematics*, 1874, wo die sich etwas widersprechenden Resultate von Euler, Montucla, Laplace, Plana u. A. kurz zusammengestellt sind. Die Sache hat mehr theoretischen als praktischen Werth; in Wirklichkeit kommen solche Fälle nicht vor.

punkte einander passiren, wechselt der Abstand  $x$  sein Vorzeichen bei dem Durchgang durch Null, *der momentane Werth der Geschwindigkeit bleibt jedoch ungeändert*, die Quadratwurzel muss also das positive Vorzeichen erhalten;  $x \frac{dx}{dt}$  wechselt daher das Zeichen; es muss mithin die Constante  $E$  unstetig sein und plötzlich bei dem Zusammentreffen der beiden Massenpunkte ein andres Vorzeichen annehmen. Jeder Zusammenstoss markirt daher einen Abschnitt, mit welchem ein neues Problem beginnt und die Werthe der willkürlichen Constanten von Neuem bestimmt werden müssen.

§ 287. Lebende Wesen als Beispiele. Beisp. 1. Ein Mann wird an eine verticale Axe gebunden, die ohne Reibung rotiren kann, und hat nur seine Arme frei. Das System ist anfangs in Ruhe; man erkläre, wie der Mensch durch Bewegung seiner Arme im Raum seinen Körper herumdrehen kann.

In welcher Weise der Mann auch seine Arme bewegen mag, die ganze Sektorenbewegungsgrösse um die Axe ist nach § 283 jedenfalls Null. Er möge seinen rechten Arm dicht an seine Seite legen, ihn dann seitwärts ausstrecken und so nach vorn bewegen, dass der Arm den vierten Theil eines horizontalen Kreises beschreibt. Er ziehe dann den Arm ein und bringe ihn so wieder in seine Anfangslage. Offenbar hat jeder Punkt des Armes und der Hand einen Sector um die Axe von der Rechten zur Linken beschrieben. Der Körper des Mannes muss sich daher um die verticale Axe von der Linken zur Rechten um einen solchen Winkel drehen, dass die ganze Sektorenbewegungsgrösse Null ist. Durch Wiederholung des Verfahrens kann er seinen Körper um jeden beliebigen Winkel drehen.

Auf diese Art kann eine Person, die auf einem vollkommen glatten Tisch aufrecht steht, sich um eine verticale durch ihren Schwerpunkt gehende Axe drehen und nach jeder beliebigen Richtung Front machen.

Beisp. 2. Eine Person liegt auf einem vollständig glatten Tisch auf dem Rücken; man erkläre, wie sie sich herumdrehen und mit dem Gesicht nach dem Tisch zu liegen kommen kann.

Sie strecke einen Arm aus und schlage mit ihm auf den Tisch; auf diese Art erhält sie Winkelbewegungsgrösse um ihre Axe. Hat sie sich so um zwei rechte Winkel gedreht, so schlägt sie wieder mit ausgestrecktem Arm oder Armen auf den Tisch und kann so die Bewegung zum Stillstand bringen. Dieselbe Wirkung bringt sie hervor, wenn sie einen Theil ihrer Kleidung seitwärts wegwirft. Schliesslich kann sie auch die im letzten Beispiel beschriebene Methode benutzen.

Beisp. 3. Man erkläre, wie es kommt, dass eine Katze, die man mit den Beinen nach oben aus hinreichend grosser Höhe herabfallen lässt, auf ihre Füsse fällt.

Während des ersten Stadiums des Falles streckt die Katze ihre Hinterbeine fast senkrecht zur Körperaxe aus und zieht die Vorderbeine dicht an den Nacken an. In dieser Lage dreht sie den Vordertheil des Körpers um einen so grossen Winkel, als sie kann, während der hintere Theil sich um einen kleineren Winkel in entgegengesetzter Richtung dreht, so dass die ganze Sektorenbewegungsgrösse um die Axe (wie in Beisp. 1) Null ist. In dem zweiten Stadium des Falles hält sie die Beine umgekehrt, indem die hinteren dicht am Körper anliegen und die vorderen ausgestreckt sind. Die Katze dreht nun den hinteren Theil ihres Körpers um den grossen Winkel, während der vordere Theil um den kleinen Winkel rotirt. Das Resultat ist, dass sich beide Theile der Katze um die Axe durch etwa gleiche Winkel herumdrehen.

In der *Nature* vom 22. Nov. 1894 findet man eine Reihe von Photographien einer fallenden Katze, die aus Marey's Artikel in den *Comptes Rendus* CXIX,

1894 reproducirt sind. Die richtige Erklärung schreibt man Guyon zu. In demselben Band der *Comptes Rendus* bringt Maurice Levy eine mathematische Begründung des Vorganges und zeigt wie ein Mann in einem leeren Raum sich ohne Anfangsgeschwindigkeit und ohne den Beistand einer äusseren Kraft um seine Axe herumdrehen kann. Lecornu (ibid.) erklärt auch, wie eine Schlange durch *innere* beständig wiederholte *Bewegungen* ihren Körper um ihre Längsaxe drehen kann, *ohne ihre äussere Gestalt oder ihre Lage im Raum zu ändern*. Vergl. auch die Aufsätze von Marcel Deprez, Picard und Appell in demselben Bd. und das *Bull. de la soc. math.*, Nov. 1894.

Beisp. 4. Eine Person ist in einen leichten Verschlag eingeschlossen, der auf einem rauhen Boden steht. Man zeige, durch welche Bewegungen er die Reibung dazu benutzen kann, den Verschlag und sich selbst beliebig weit längs des Bodens fortzubewegen.

Er schreite von dem einen Ende aus den Verschlag entlang, aber nicht so schnell, dass die Reibung unzureichend wäre, den Verschlag in Ruhe zu erhalten. Er bewegt so seinen eignen Schwerpunkt und erlangt Bewegungsgrösse. Indem er dann aufspringt, hebt er den Kasten vom Boden in die Höhe und trägt ihn mit sich. Wenn die Schwere den Kasten wieder auf den Boden senkt, wiederholt er die Operation. Eine andere Methode ist in Kap. II, Beisp. 3 angegeben.

Man hat die Beobachtung gemacht, dass gewisse mexicanische Fruchthülsen, die man Springbohnen nennt, sich mittelst einer Reihe von Sprüngen in Bewegung setzen. Man fand, dass jede Bohne ein Thierchen enthielt, das beträchtlich kleiner als die Höhlung war, in der es eingeschlossen sass. Die Art, wie das Thier die Bohne auf eine Entfernung, die zwei bis dreimal so lang als die Bohne ist, zum Springen bringt, hat sich nicht recht aufklären lassen. Man sehe *Chamber's Journal*, 1896; *Royal Botanical Society*, 1894.

Beisp. 5. Zwei Eimer, deren Gewichte  $m, m'$  sind, werden an einem dünnen unelastischen Seil, das über eine feste Rolle läuft, aufgehängt; in dem Mittelpunkt des Bodens des einen Eimers sitzt ein Frosch, dessen Gewicht  $\mu$  ist. In einem Moment augenblicklicher Ruhe der Eimer springt der Frosch vertical so in die Höhe, dass er gerade das Niveau des oberen Randes seines Eimers erreicht. Man beweise, dass das Verhältniss der absoluten Länge  $h'$  des verticalen Aufstiegs des Frosches im Raum zu der Länge  $h$  seines Eimers, und die Zeit  $t$ , welche verfliesst, bis der Frosch wieder auf dem Boden seines Eimers ankommt, durch

$$(m + m' + \mu)^2 h' = 2m'(m + m')h, \quad m'gt^2 = 4(m + m')h$$

gegeben ist, wobei die letzte Gleichung von dem Gewicht des Frosches nicht abhängt.

[Walton's Problem, Math. Tripos, 1864.]

Beisp. 6. Man zeige, dass eine Person, welche sich auf einer Schaukel schwingt, den Schwingungswinkel dadurch vergrössern kann, dass sie sich am höchsten Punkt zusammenkrümmt und sich am tiefsten Punkt längs des Seiles aufrichtet.

$2a, 2b$  seien die Längen des Mannes, wenn er sich bückt und wenn er aufrecht steht;  $M, m$  die Massen der Schaukel und des Mannes;  $I$  das Trägheitsmoment der Schaukel und  $c$  der Abstand ihres Schwerpunktes von ihrem Aufhängepunkt. Zuerst kommt das System mit der Person in gebückter Lage vom Zustand der Ruhe aus einen Winkel  $\alpha$  herab und hat in seiner tiefsten Lage die Winkelgeschwindigkeit  $\omega$ . Wenn nun plötzlich die Person aufsteht, so wird die Winkelgeschwindigkeit  $\omega$  in  $\omega'$  umgeändert. Zuletzt steigt dann das System einen Winkel  $\beta$  hinan. Man hat daher

$$A\omega^2 = 4gA'\sin^2\frac{1}{2}\alpha, \quad A\omega = B\omega', \quad B\omega'^2 = 4gB'\sin^2\frac{1}{2}\beta,$$

worin

$$A = I + m(l - a)^2 + \frac{1}{3}ma^2, \quad A' = Mc + m(l - a)$$

ist und man  $B, B'$  aus  $A, A'$  erhält, wenn man  $\alpha$  schreibt. Die erste und dritte Gleichung ergeben sich aus dem Princip der lebendigen Kraft, die zweite aus dem der Flächen. Daraus folgt  $\sin^2 \frac{1}{2} \beta / \sin^2 \frac{1}{2} \alpha = AA' / BB'$ . Es ist aber  $A' > B'$ , weil  $b > a$  ist, und  $A > B$ , weil man bei Schaukeln die Länge  $l$  des Seiles gewöhnlich grösser als die Höhe der Person nimmt. Folglich ist  $\beta$  grösser als  $\alpha$ .

Man betrachte die Gleichung  $A\omega = B\omega'$ ; jedesmal, wenn die Person sich aufrichtet, verringert sich das Trägheitsmoment und wächst mithin die Winkelgeschwindigkeit. An dem höchsten Punkt, an dem sich das System momentan in Ruhe befindet, wird die Winkelgeschwindigkeit durch das Bücken nicht verändert, dagegen das Trägheitsmoment vergrössert. Durch fortgesetztes Wiederholen der beiden Bewegungen wird die Winkelgeschwindigkeit bei jedem Durchgang durch den tiefsten Punkt grösser. Das Moment der Schwere ist ferner beim Herabkommen der Schaukel grösser, als beim Aufsteigen; aus beiden Ursachen vermehrt sich die Amplitude der Schwingung.

§ 288. **Plötzliche Fixirungen.** Ein starrer Körper bewegt sich frei auf bekannte Art im Raum. Plötzlich wird eine Gerade im Körper fixirt oder ihre Bewegung in irgend einer gegebenen Weise geändert. Man soll finden, welche Aenderungen in der Bewegung des übrigen Körpers vor sich gehen.

Probleme wie diese werden sämmtlich mit Hülfe desselben mechanischen Principes gelöst. Die Aenderung der Bewegung wird durch Momentankräfte hervorgebracht, die an Punkten dieser Geraden angreifen. *Daher ist nach § 283 die Winkelbewegungsgrösse des Körpers um die Axe dieselbe nach wie vor der Aenderung.* Dies dynamische Princip liefert eine Gleichung, die zur Bestimmung der folgenden Bewegung des Körpers um die Gerade ausreicht.

Diesen Satz kann man auch in einem allgemeineren Fall benutzen. Man nehme an, wir hätten ein System in Bewegung befindlicher Körper, die plötzlich starr mit einander verbunden sind und gezwungen werden, sich um eine Axe zu drehen. Die darauf folgende Winkelgeschwindigkeit um diese Axe lässt sich dann dadurch finden, dass man die Winkelbewegungsgrösse des Systems um diese Axe nach der Aenderung derjenigen vor der Aenderung gleich setzt.

Bei der Anwendung dieses Principes auf verschiedene Körper empfiehlt es sich, verschiedene Methoden zur Ermittlung der Winkelbewegungsgrösse zu gebrauchen. Das folgende Verzeichniss soll den Leser bei der Auswahl des für jeden speciellen Fall geeignetsten Verfahrens unterstützen.

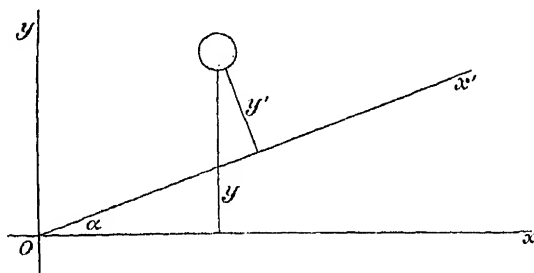
§ 289. Fall 1. Der Körper sei eine Scheibe, die sich auf beliebige Art in ihrer eignen Ebene bewegt und die Axe, deren Bewegung geändert wird, stehe senkrecht auf ihrer Ebene. Die Lösung findet man in § 171.

§ 290. Fall 2. Der Körper sei eine Scheibe, die sich um eine in ihrer Ebene gelegene Momentanaxe  $Ox$  mit der Winkelgeschwindig-



keit  $\omega$  herumdreht. Eine Axe  $Ox'$ , die ebenfalls in ihrer Ebene liegt, werde plötzlich fixirt.

In diesem Fall ist die Ermittlung der Winkelbewegungsgrösse so einfach, dass es am besten ist, wenn wir auf die Grundprincipien zurückgreifen.  $d\sigma$  sei ein Element der materiellen Fläche der Scheibe;  $y, y'$  seine Abstände von  $Ox, Ox'$ . Dann sind  $y\omega, y'\omega'$  die Geschwindigkeiten von  $d\sigma$  grade vor und grade nach dem Stoss. Die Momente der Bewegungsgrösse um  $Ox'$



grade vor- und grade nachher sind deshalb  $y y' \omega d\sigma$  und  $y'^2 \omega' d\sigma$ . Nimmt man die Summen für die ganze Fläche der Scheibe, so ergibt sich

$$\omega' \Sigma y'^2 d\sigma = \omega \Sigma y y' d\sigma \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1).$$

*Erstens* seien  $Ox, Ox'$  einander parallel, so dass also  $O$  im Unendlichen liegt.  $h$  sei der Abstand der Axen, daher  $y' = y - h$ . Es wird dann

$$\omega' \Sigma y'^2 d\sigma = \omega [\Sigma y^2 d\sigma - h \Sigma y d\sigma].$$

$A, A'$  seien die Trägheitsmomente der Scheibe für  $Ox$  bez.  $Ox'$ ,  $\bar{y}$  der Abstand des Schwerpunktes von  $Ox$ ,  $M$  die Masse der Scheibe. Man erhält

$$A' \omega' = \omega (A - M h \bar{y}).$$

*Zweitens* seien  $Ox, Ox'$  einander nicht parallel.  $O$  sei der Koordinatenanfang und der Winkel  $x O x' = \alpha$ ; es ist dann  $y' = y \cos \alpha - x \sin \alpha$ .  $F$  sei das Deviationsmoment der Scheibe um  $Ox, Oy$ , wobei  $Oy$  senkrecht auf  $Ox$  steht. Durch Substitution in (1) findet man

$$A' \omega' = \omega (A \cos \alpha - F \sin \alpha).$$

Beisp. 1. Eine elliptische Scheibe mit der Excentricität  $e$  dreht sich um einen Parameter. Plötzlich wird dieser Parameter losgelassen und der andere fixirt. Man zeige, dass die Winkelgeschwindigkeit  $\frac{1-4e^2}{1+4e^2}$  ihres früheren Werthes beträgt.

Beisp. 2. Eine Scheibe von der Gestalt eines rechtwinkligen Dreiecks  $ACB$  dreht sich um die Seite  $AC$ . Plötzlich wird  $AC$  losgelassen und  $BC$  festgehalten. Wenn  $C$  der rechte Winkel ist, so beträgt die Winkelgeschwindigkeit  $\frac{BC}{2AC}$  ihres früheren Werthes.

Beisp. 3. Die Ebene eines Rechtecks  $ABCD$  steht vertical und seine untere Kante  $AB$  hat eine horizontale Lage und liegt im Raum fest. Bei einer leichten Störung dreht sich das Rechteck um  $AB$  und in dem Augenblick, in dem seine Ebene horizontal ist, wird die Seite  $AD$  festgehalten und  $AB$  losgelassen. Es dreht sich jetzt um  $AD$  und wenn die Ebene wieder vertical steht wird  $AB$  festgehalten und  $AD$  losgelassen. Man zeige, dass die Endwinkelgeschwindigkeit um

$AB$  durch die Gleichung  $\omega^2 = \frac{27g(16a + 9b)}{512b^2}$  gegeben ist, worin  $AB = 2a$  und  $AD = 2b$ .

Beisp. 4. Ein Punkt in einer Lamelle, welche um eine in ihrer Ebene gelegene gegebene Momentanaxe rotirt, wird plötzlich festgehalten. Man zeige, dass, wenn die neue Momentanaxe senkrecht auf der früheren stehen soll, der Punkt auf einer Hyperbel liegen muss, deren eine Asymptote rechtwinklig zur gegebenen Axe und deren andere in Bezug auf die Trägheitsellipse für den Schwerpunkt zu ihr conjugirt ist.

§ 291. Fall 3. Der Körper drehe sich um eine Momentanaxe  $OI$  mit der bekannten Winkelgeschwindigkeit  $\omega$  und eine Axe  $OI'$ , welche sie in einem Punkt  $O$  schneidet, werde plötzlich festgehalten.

$l, m, n$  seien die Richtungscosinusse von  $OI$  in Bezug auf die Hauptaxen für  $O$  und  $l', m', n'$  die Richtungscosinusse von  $OI'$ . Dann sind nach § 264 die Winkelbewegungsgrössen um diese Hauptaxen grade vor dem Stoss  $A\omega l, B\omega m, C\omega n$ . Die Winkelbewegungsgrösse um  $OI'$  grade vor dem Wechsel ist daher nach § 265

$$(All' + Bmm' + Cnn')\omega.$$

Ist  $\omega'$  die Winkelgeschwindigkeit des Körpers um  $OI'$ , grade nachdem  $OI$  im Raum festgelegt wurde, so ist die Winkelbewegungsgrösse

$$(Al'^2 + Bm'^2 + Cn'^2)\omega'.$$

Durch Gleichsetzung der beiden Ausdrücke erhält man dann  $\omega'$ .

Beisp. 1. Ein massiver gerader Kegel, dessen halber Winkel an der Spitze  $\alpha$  ist, rotirt um eine Erzeugende. Plötzlich wird eine andere Erzeugende festgelegt und die beiden Ebenen, welche die Erzeugenden und die Axe enthalten, sind um den Winkel  $\varphi$  gegeneinander geneigt. Man zeige, dass das Verhältniss der Winkelgeschwindigkeiten

$$[2 + (4 + n) \cos \varphi] : [6 + n] \text{ ist, wo } n = \tan^2 \alpha.$$

Beisp. 2. Wenn ein Körper um einen festen Punkt rotirt, so heisst das halbe Product aus dem Trägheitsmoment für die Momentanaxe und dem Quadrat der Winkelgeschwindigkeit die lebendige Kraft.  $T$  sei die lebendige Kraft des Körpers, wenn er sich frei um die Axe  $OI$  dreht und  $T'$ , wenn die Axe  $OI'$  plötzlich festgelegt wird. Man construire das Trägheitsellipsoid für den Punkt  $O$  und  $\theta$  sei der Winkel zwischen den excentrischen Linien (§ 40) der beiden Axen  $OI, OI'$ . Man beweise, dass  $T' = T \cos^2 \theta$ . Daraus folgt, dass die lebendige Kraft jedesmal verringert wird, wenn eine neue Axe festgelegt wird.

§ 292. Fall 4. Die Bewegung des Körpers sei durch die Bewegungscomponenten  $u, v, w, \omega_x, \omega_y, \omega_z$  gegeben und der Schwerpunkt sei der Reductionspunkt. Die Gleichung der Geraden, deren Bewegung plötzlich geändert wird, sei

$$\frac{x-f}{l} = \frac{y-g}{m} = \frac{z-h}{n},$$

worin  $l, m, n$  die augenblicklichen Richtungscosinusse sind.

Man nehme an, die Gerade werde plötzlich im Raum fixirt. Die Winkelbewegungsgrösse vor der Fixirung ist in § 266 gegeben. Ist  $\omega'$

die Winkelgeschwindigkeit um diese Gerade nach der Fixirung, so ist die Winkelbewegungsgrösse  $I\omega'$ , worin  $I$  in § 17, Beisp. 9 gegeben ist. Setzt man beide Ausdrücke gleich, so ergibt sich  $\omega'$ .

§ 293. Man nehme ferner an, die Bewegung, welche der Geraden plötzlich aufgezwungen wird, werde durch die Geschwindigkeiten  $U, V, W$  eines Punktes  $P$  der Geraden und die Winkelgeschwindigkeiten  $\theta, \varphi, \psi$  dargestellt. Die Bewegung des Körpers kann dann durch die Translationsgeschwindigkeiten  $U, V, W$  des nämlichen Reductionspunktes  $P$  und die Winkelgeschwindigkeiten  $\theta + \Omega l, \varphi + \Omega m, \psi + \Omega n$  ausgedrückt werden, worin  $\Omega$  die einzige unbekannte Grösse ist.

Die Winkelgeschwindigkeiten  $\theta, \varphi, \psi$  kann man, um die gegebene Bewegung der Geraden darzustellen, auf unendlich verschiedene Art wählen, weil eine Winkelgeschwindigkeit um die Gerade die Linie selbst nicht bewegt. Wählt man nun  $\theta, \varphi, \psi$  so, dass die Componente  $l\theta + m\varphi + n\psi$  um die Gerade Null ist, und sind  $(l, m, n)$  die augenblicklichen Richtungscosinusse der Geraden, so ist  $\Omega$  die Winkelgeschwindigkeit des Körpers um die Axe grade nach dem Wechsel.

Diese Grösse  $\Omega$ , ihre Bedeutung mag sein, welche sie wolle, findet man durch Gleichsetzung der Winkelbewegungsgrössen um die Axe vor und nach dem Wechsel. Diese Momente kann man so aufstellen, wie in § 266 erklärt wurde.

§ 294. Wird die der Geraden plötzlich aufgezwungene Bewegung dadurch dargestellt, dass man die Geschwindigkeiten zweier Punkte  $P, P'$  der Geraden gibt, und stellen die Bewegungscomponenten  $u', v', w', \omega'_x, \omega'_y, \omega'_z$  für den Schwerpunkt als Reductionspunkt die gesuchte Bewegung des Körpers nach dem Wechsel vor, so lassen sich die Winkelbewegungsgrössen vor und nach dem Wechsel niederschreiben, wie in § 266 angegeben wurde. Setzt man sie gleich, so erhält man die dynamische Gleichung. Die Componenten der Geschwindigkeiten von  $P$  und  $P'$  kann man nach § 238 finden und den gegebenen Werthen für die erzwungenen Geschwindigkeiten gleichsetzen. Wir erhalten so im Ganzen sechs *unabhängige* Gleichungen zur Ermittlung der sechs Bewegungscomponenten nach dem Wechsel.

Beisp. 1. Eine elliptische Scheibe befindet sich in Ruhe. Plötzlich wird das eine Ende der grossen und das eine der kleinen Axe gezwungen, sich senkrecht zur Ebene der Scheibe mit der Geschwindigkeit  $U$  bez.  $V$  zu bewegen. Man zeige, dass der Schwerpunkt sich mit der Geschwindigkeit  $\frac{1}{6}(U + V)$  zu bewegen anfängt.

Beisp. 2. Eine elliptische Scheibe befindet sich in Ruhe. Plötzlich wird das eine Ende des Parameters gezwungen sich parallel zur grossen Axe mit der Geschwindigkeit  $U$  zu bewegen, während sich das andere senkrecht zur Ebene der Scheibe mit der Geschwindigkeit  $W$  bewegt. Man zeige, dass die Componenten der Geschwindigkeit des Centrums parallel den Axen der Scheibe

$$\text{sind.} \quad \frac{U}{2}, \quad \frac{-Ue}{2(1-e^2)}, \quad \frac{W}{2(1+4e^2)}$$

Beisp. 3. Eine frei in ihrer Ebene, welche vertical ist, rotirende Kreisscheibe fällt auf eine andere ihr gleiche Kreisscheibe, deren Ebene horizontal ist und welche sich um eine feste verticale durch ihr Centrum gehende Axe dreht. Im Augenblick des Zusammenstosses werden die beiden Scheiben starr miteinander verbunden. Wenn der Punkt des Zusammenstosses einen Radius des horizontalen Kreises halbirt, zu zeigen, dass sich die Winkelgeschwindigkeit um die feste verticale Axe auf die Hälfte reducirt.

Beisp. 4. Die Bewegung eines freien Körpers sei durch die Componenten  $u, v, w, \omega_x, \omega_y, \omega_z$ , auf irgend einen Reductionspunkt bezogen, gegeben. Die plötzlich einer Geraden ertheilte Bewegung werde durch die Componenten  $U, V, W, \theta, \varphi, \psi$  dargestellt und auf denselben Reductionspunkt bezogen. Die relative Bewegung ist dann durch die Componenten  $u - U, v - V$ , etc. gegeben. Man nehme an, sie seien die gegebenen Grössen und finde die Componenten der Bewegung nach dem Wechsel unter der Voraussetzung, dass die Gerade plötzlich festgelegt wird. Diese Componenten seien  $u', v'$ , etc. Man beweise, dass die gesuchte Bewegung dann durch die Componenten  $U + u', V + v'$ , etc. dargestellt wird. Dies Verfahren, die Lösung zu finden, kann man das zur Ruhe Bringen der Geraden nennen.

§ 295. Fall 5. Manchmal wird statt einer Geraden ein einzelner Punkt  $P$  des Körpers ergriffen und gezwungen sich auf gegebene Art zu bewegen. Alsdann bleibt die Winkelbewegungsgrösse um jede durch den festgelegten Punkt gehende Gerade unverändert. Wählt man drei geeignete sich in dem Punkt schneidende Axen und setzt die Winkelbewegungsgrösse um jede vor dem Wechsel der nach dem Wechsel gleich, so erhält man drei dynamische Gleichungen. Ausserdem hat man die geometrischen Gleichungen nach § 238, welche ausdrücken, dass die Componenten der Geschwindigkeit von  $P$  den gegebenen Componenten der dem Punkt aufgezwungenen Geschwindigkeit gleich sind. Auf diese Art kommt man zu sechs Gleichungen für die Ermittlung der sechs Componenten der Bewegung.

§ 296. Wir wollen ein Beispiel zu diesem Verfahren betrachten. Man nehme an, die Bewegung des Körpers sei durch die Componenten  $u, v, w, \omega_x, \omega_y, \omega_z$  gegeben, sein Schwerpunkt sei der Reductionspunkt und der Punkt  $P$  mit den Coordinaten  $f, g, h$  werde plötzlich festgelegt.  $A, B, C, D, E, F$  seien die Trägheits- und Deviationsmomente des Körpers für die durch den Schwerpunkt gehenden Axen und die mit einem Strich versehenen Buchstaben mögen die entsprechenden Grössen für die durch  $P$  gehenden parallelen Axen darstellen.  $\Omega_x, \Omega_y, \Omega_z$  seien die gesuchten Winkelgeschwindigkeiten des Körpers um die sich in  $P$  schneidenden Axen, die denen des Schwerpunktes parallel sind. Dann liefern die Gleichungen der Bewegungsgrössen

$$\begin{aligned} A\omega_x - F\omega_y - E\omega_z + M(vh - wg) &= A'\Omega_x - F'\Omega_y - E'\Omega_z, \\ -F\omega_x + B\omega_y - D\omega_z + M(wf - uh) &= -F'\Omega_x + B'\Omega_y - D'\Omega_z, \\ -E\omega_x - D\omega_y + C\omega_z + M(ug - vf) &= -E'\Omega_x - D'\Omega_y + C'\Omega_z. \end{aligned}$$

Man sieht, dass die Gleichungen sich viel einfacher gestalten, wenn man die Axen so wählt, dass das eine System aus Hauptaxen besteht.

§ 297. Wenn der Körper grade, ehe der Punkt  $P$  festgehalten wird, um eine durch den Schwerpunkt  $G$  gehende Axe  $GI$  rotirt, so verschwinden aus den Gleichungen die Ausdrücke, welche die Geschwindigkeiten des Schwerpunktes enthalten. Sie lassen nun eine leichte geometrische Deutung zu. Die Gleichung des Trägheitsellipsoids für den Schwerpunkt ist

$$AX^2 + BY^2 + CZ^2 - 2DYZ - 2EZX - 2FXY = M\epsilon^2.$$

Es ist daher klar, dass die linken Seiten der Gleichungen den Richtungs-cosinussen der Diametralebene proportional sind, welche einer Geraden conjugirt ist, deren Richtungscosinusse  $(\omega_x, \omega_y, \omega_z)$  proportional sind. Ebenso sind die rechten Seiten, wenn man das Trägheitsellipsoid für  $P$  construirt, den Richtungscosinussen der Diametralebene, welche zur Axe  $(\Omega_x, \Omega_y, \Omega_z)$  gehört, proportional. *Dieser Art stehen die Momentanaxen vor und nach dem Festlegen von  $P$  in der Beziehung zu einander, dass ihre conjugirten Diametralebenen in Bezug auf die Trägheitsellipsoide für  $G$  bez.  $P$  einander parallel sind.*

Dieses Resultat lässt sich auch ohne Schwierigkeit aus § 118 ableiten. Die Bewegung des Körpers um die Axe  $GI$  kann durch ein Momentanpaar in der zu  $GI$  conjugirten Diametralebene in Bezug auf das Trägheitsellipsoid für  $G$  hervorgebracht werden. *Nehmen wir nun an, der Körper befinde sich in Ruhe und  $P$  liege fest, und lassen dieses Paar auf ihn einwirken.* Es folgt dann aus § 118, dass sich der Körper um eine Axe  $PI'$  zu drehen beginnt, deren zugehörige Diametralebene in Bezug auf das Trägheitsellipsoid für  $P$  der Ebene des Paares parallel ist.

Die Richtung des Stosses bei  $P$  lässt sich auch leicht finden. Der Schwerpunkt, der sich in Ruhe befand, beginnt sich plötzlich senkrecht zu der durch ihn und die Axe  $PI'$  gelegten Ebene zu bewegen. Dies ist daher offenbar die Richtung des Stosses.

§ 298. Beisp. 1. *Eine Kugel auf dem Breitengrad  $90^\circ - \theta$  ist an einem Punkt ihrer Oberfläche aufgehängt und befindet sich unter der Einwirkung der Schwere im Gleichgewicht. Plötzlich hört die Rotation der Erde auf; man soll die Bewegung der Kugel bestimmen.* [Math. Tripos, 1857.]

$G$  sei das Centrum der Kugel,  $O$  ihr Aufhängungspunkt und  $a$  ihr Radius.  $C$  sei der Mittelpunkt der Erde. Man nehme an, die Figur, S. 271, sei so gezeichnet, dass sich die Kugel von dem Beobachter entfernt. Ist  $\omega$  die Winkelgeschwindigkeit der Erde und  $CG = \mu a$ , so rotirt die Kugel um eine zu  $CP$ , der Erdaxe, parallele Axe  $Gp$  mit der Winkelgeschwindigkeit  $\omega$ , während sich ihr Schwerpunkt mit der Geschwindigkeit  $\mu a \sin \theta \cdot \omega$  bewegt.

$OC$ ,  $Op$  und das auf der Ebene  $OC$ ,  $Op$  errichtete Loth seien die Axen der  $x$ ,  $y$  bez.  $z$  und  $\Omega_x$ ,  $\Omega_y$ ,  $\Omega_z$  die Winkelgeschwindigkeiten um sie, grade nachdem die Rotation der Erde aufgehört hat.

nach dem Satze von Chasles, dass

$$Mk^2\omega \cos \theta = Mk^2\Omega_x,$$

worin  $Mk^2$  das Trägheitsmoment der Kugel für einen Durchmesser ist. Ferner sind die Winkelbewegungsgrößen um  $Oy$  einander gleich; daher

$$-Mk^2\omega \sin \theta + M\mu a^2\omega \sin \theta = M(k^2 + a^2)\Omega_y$$

und schliesslich auch die um  $Oz$ ; daher

$$0 = Mk^2\Omega_z.$$

Löst man diese Gleichungen auf, so wird

$$\Omega_y = \omega \sin \theta \frac{-k^2 + \mu a^2}{k^2 + a^2} = \omega \sin \theta \frac{-2 + 5\mu}{7}$$

und  $\Omega_x = \omega \cos \theta$ . Durch Addition der Quadrate von  $\Omega_x$ ,  $\Omega_y$ ,  $\Omega_z$  erhält man

$$\Omega^2 = \omega^2 \left[ \cos^2 \theta + \left( \frac{-2 + 5\mu}{7} \right)^2 \sin^2 \theta \right],$$

worin  $\Omega$  die Winkelgeschwindigkeit der Kugel um ihre Momentanaxe ist.

Beisp. 2. Ein Punkt von der Masse  $M$ , der keine Geschwindigkeit besitzt, wird plötzlich an die Oberfläche der Erde in dem Endpunkt eines Radiusvectors befestigt, der den Winkel  $\theta$  mit der Erdaxe macht. Wenn  $E$  die Masse der Erde vor dem Hinzukommen von  $M$  ist,  $A$  und  $C$  ihre Hauptträgheitsmomente für den Mittelpunkt und  $\omega$  die Winkelgeschwindigkeit um ihre Axe ist, zu beweisen, dass

$$\frac{\omega}{\Omega} = 1 + \frac{EMAr^2 \sin^2 \theta}{(E + M)AC + EMc r^2 \cos^2 \theta},$$

$$\cotg \varphi = \cotg \theta + \frac{E + M}{E} \cdot \frac{A}{Mr^2 \sin \theta \cos \theta}$$

ist, unter  $\Omega$  die Anfangswinkelgeschwindigkeit um eine zur Erdaxe parallele Axe und unter  $\varphi$  den Winkel verstanden, den die Anfangsrotationsaxe mit der Erdaxe bildet.

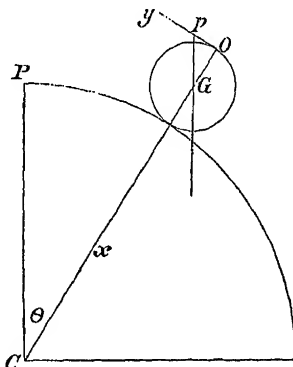
Beisp. 3. Ein regelmässiges homogenes Prisma, dessen Normalschnitt ein regelmässiges Polygon von  $n$  Seiten ist, rollt auf einer vollkommen rauhen Fläche. Man beweise, dass die Winkelgeschwindigkeit, wenn die Rotationsaxe von der einen Kante auf die andere übergeht, in dem Verhältniss

$$2 + 7 \cos \frac{2\pi}{n} : 8 + \cos \frac{2\pi}{n}$$

reducirt wird.

§ 299. Allmälige Aenderungen. In den obigen Beispielen waren die Aenderungen der Bewegung plötzlich; man verfährt jedoch ebenso, wenn sie allmähig vor sich gehen.

Beisp. 1. Ein Kugelchen von der Masse  $m$  gleitet längs eines kreisförmigen Drahtes von der Masse  $M$  und dem Radius  $a$  und der Draht kann sich frei um einen verticalen Durchmesser drehen. Man beweise, dass  $\frac{\Omega}{\omega} = 1 + 2 \frac{m}{M}$  ist, wo



Beisp. 2. Wenn die Erde sich allmählig durch Ausstrahlung von Wärme so zusammenzieht, dass sie sich in Bezug auf ihre physische Beschaffenheit und Gestalt immer ähnlich bleibt, zu beweisen, dass, wenn jeder Radiusvector sich um den  $n^{\text{ten}}$  Theil seiner Länge zusammengezogen hat, sich die Winkelgeschwindigkeit um den  $2n^{\text{ten}}$  Theil ihres Werthes vermehrt hat, wobei  $n$  klein ist.

Beisp. 3. Zwei Eisenbahnzüge, von denen jeder die Masse  $M$  hat, gehen in entgegengesetzten Richtungen von dem Pol längs eines Meridians ab und kommen gleichzeitig auf dem Aequator an; man beweise, dass die Winkelgeschwindigkeit der Erde um  $\frac{2Ma^2}{Ek^2}$  ihres Werthes abnehmen würde; unter  $a$  den Radius des Erdäquators und unter  $Ek^2$  das Trägheitsmoment der Erde um ihre Axe der Figur verstanden.

Welche Wirkung würde es haben, wenn nur *ein* Zug von dem Pol nach dem Aequator führe?

Beisp. 4. Eine Fliege lässt sich senkrecht auf einem Blatt Papier nieder, das auf einer glatten horizontalen Ebene liegt, und schreitet auf der Curve  $r = f(\theta)$  voran, die auf dem Papier aufgezeichnet ist und deren Gleichung sich auf den Schwerpunkt des Papiers als Coordinatenanfang bezieht. Man nehme an, die Fliege sei im Stand sich ohne zu gleiten auf dem Papier zu bewegen und zeige, dass ihre Winkelgeschwindigkeit im Raum um den gemeinschaftlichen Schwerpunkt des Papiers und der Fliege  $\frac{(M+m)k^2}{(M+m)k^2 + mr^2} \frac{d\theta}{dt}$  ist, worin  $M$  und  $m$  die Massen des Papiers und der Fliege und  $k$  den Trägheitsradius des Papiers um seinen Schwerpunkt bedeuten. Man leite daraus die Bahn der Fliege im Raum ab.

Beisp. 5. Nimmt man an, das Eis schmelze in den Polarregionen zwanzig Grad um jeden Pol herum etwa 31 cm dick, so reicht dies aus, jene Flächen 33 cm tief oder die ganze Erde 2 cm tief unter Wasser zu setzen, wobei das Niveau des Meeres sich nur um die kaum merkbare Differenz von 2 cm oder 2,5 cm heben würde. Die Geschwindigkeit der Erde als Chronometer würde dadurch um den zehnten Theil einer Secunde pro Jahr verlangsamt werden. Dieses Beispiel wie das nächste sind dem *Phil. Mag.*, 1866 entnommen. Man verdankt beide Sir W. Thomson, jetzt Lord Kelvin.

Bedeutet  $E$  die Masse der Erde,  $a$  ihren Radius,  $k$  ihren Trägheitsradius für die Polaraxe,  $\omega$  ihre Geschwindigkeit vor dem Schmelzen, so ist nach dem Princip der Flächen  $\frac{\delta\omega}{\omega} = -\frac{Ma^2}{3Ek^2} \cos\theta (1 + \cos\theta)$ , worin  $M$  die Masse des geschmolzenen Eises und  $\theta$  zwanzig Grad ist. Setzt man für die Buchstaben ihre bekannten Zahlenwerthe ein, so findet sich  $\delta\omega$  leicht.

Beisp. 6. Durch das Fallen von Meteoren, die von allen Seiten die Erde erreichen, hat sich auf der Erde eine  $h$  Meter dicke Staubschicht gebildet, wobei  $h$  klein ist. Man zeige, dass die Aenderung in der Länge des Tages nahezu  $\frac{5h}{a} \frac{\rho}{D}$  eines Tages beträgt, wenn  $a$  den Radius der Erde in Metern,  $\rho$  und  $D$  die Dichtigkeiten des Staubes bez. der Erde bedeuten. Man drücke das Resultat in Zahlen aus, wenn die Dichtigkeit des Staubes doppelt so gross als die des Wassers und  $h = 0,015$  ist.

Oppolzer (*Astronomische Nachrichten*, Nr. 2573) und später H. A. Newton (*American Journal of Science*, Vol. XXX, 1884) haben die Wirkungen untersucht,

welche das Aufschlagen von Meteoriten und ihre Anziehungskraft durch die Schwere, wenn sie in die Nähe der Erde kommen, ohne sie zu treffen, auf die Erde ausüben.

Beisp. 7. Eine spiralförmige Röhre von kleinem gleichmässigen Querschnitt kann sich frei um eine verticale Axe drehen, in welcher ihre beiden Enden liegen. Eine variable Quantität  $Q$  Flüssigkeit tritt pro Secunde in das obere Ende ein und fliesst aus dem unteren heraus.  $M$  ist die Masse der Röhre,  $n$  der in ihr enthaltenen Flüssigkeit; man zeige, dass

$$(M + m) k^2 \omega + Q \int r \sin \varphi \, ds$$

constant ist, wenn  $\varphi$  der Winkel ist, den die Tangente an die Röhre in irgend einem Punkt  $P$  mit der Ebene bildet, welche  $P$  und die Axe enthält. Maxwell hat ein ähnliches Experiment gemacht, um zu bestimmen, ob die Elektrizität Bewegungsgrösse habe. Man sehe seine *Electricity*, Vol. II, Art. 574.

§ 300. Das Princip der Translationsbewegungsgrösse kann ebenso wie das der Flächen dazu benutzt werden, die allmäligen durch einen Wechsel der Massen bewirkten Aenderungen zu bestimmen. Im Allgemeinen verfährt man wie folgt.

An einem Körper von der Masse  $M$ , dessen Geschwindigkeitskomponente parallel der  $x$ -Axe  $v$  ist, greife eine endliche Kraft  $X$  an. Der Körper möge einen kleinen Theil  $m = -dM$  seiner Masse in jedem Zeitelement  $dt$  verlieren. Man soll seine Bewegungsgleichung finden. In der Zeit  $dt$  vergrößert die Kraft die Translationsbewegungsgrösse um  $Xdt$ , während die durch Verringerung der Masse verlorene Bewegungsgrösse  $mv$  ist. Der Gewinn an Bewegungsgrösse beträgt aber im Ganzen  $d(Mv)$ ; daher ist die Bewegungsgleichung

$$d(Mv) = Xdt + v dM,$$

also

$$M \frac{dv}{dt} = X. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1).$$

Man erhält dieselbe Gleichung, wenn man unter  $M$  die Masse des Körpers grade nach dem Verlust des Elementes  $m$  versteht. Setzt man dann die beiden Ausdrücke für den Gewinn an Bewegungsgrösse in dem nächsten Zeitelement einander gleich, so hat man  $M dv = X dt$ .

Wir wollen nun weiter annehmen, der Körper nehme um eine Masse  $m = dM$  in der Zeit  $dt$  zu und die Componente der Geschwindigkeit dieses Zuwachses *grade vor* seiner Verbindung mit  $M$  sei  $v'$ . Der vollständige Gewinn an Bewegungsgrösse ist nun  $Xdt$  in Folge der Kraft und  $mv'$  in Folge des Zusammenstosses, welcher durch die plötzliche Verbindung der Massen  $M$  und  $m$ , die verschiedene Geschwindigkeit haben, hervorgerufen wird. Die Bewegungsgleichung lautet daher

$$d(Mv) = Xdt + v'dM. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2).$$

Ist  $v' = v$ , so erhält man wieder das frühere Resultat.

Nach der in § 85 gegebenen Regel sollte die endliche Kraft  $X$  bei der Bestimmung der Wirkung einer Momentankraft vernachlässigt



werden.  $m$  ist aber als eine  $dM$  gleiche Grösse unendlich klein, die Aenderung der Bewegungsgrösse durch den Stoss ist daher eine kleine Grösse von derselben Ordnung wie  $Xdt$ . Die Kraft  $X$  muss mithin hier in die Gleichung eingeschlossen werden.

Die vorstehenden Sätze sollen durch die Auflösung einiger Probleme über die gradlinige Bewegung von Fäden erläutert werden, während wir uns vorbehalten die krummlinige in dem zweiten Band zu besprechen.

Beisp. 1. Ein gleichförmiges Seil von der Länge  $2L$  hängt über eine kleine glatte Rolle  $A$ , die in der Höhe  $L$  über einem unelastischen Tisch angebracht ist, und an jedem Ende des Seiles ist eine Masse befestigt, die der Masse des halben Seiles gleichkommt. Anfangs befindet sich die eine Masse  $P$  sehr nahe bei der Rolle, während die andere  $Q$  auf dem Tisch neben dem halben aufgerollten Seil liegt. Die obere Masse wird nun losgelassen; man beweise, dass die grösste Höhe, bis zu welcher die untere sich eventuell erheben kann,  $\xi L$  ist, worin  $\xi$  sich aus der Gleichung  $\xi + 2 \log \left(1 - \frac{1}{3} \xi\right) = \frac{16}{243}$  ergibt. [St. John's Coll., 1896.]

Es gibt drei Stadien der Bewegung. Zuerst senkt sich  $P$  und werden successive (mit der Geschwindigkeit  $v' = 0$ ) die Glieder der aufgewickelten Kette von dem Haufen weggenommen und der sich bewegenden Kette hinzugefügt. Da die Masse von  $P$  der Masse einer Länge  $L$  der Kette gleich ist, so hat man, wenn  $x = AP$ ,

$$d[(x + 2L)v] = xgdt.$$

Multipliziert man mit  $(x + 2L)v$  und integrirt, so findet man, dass  $P$  auf dem Tisch mit der Geschwindigkeit  $v_1$  ankommt, die aus  $v_1^2 = \frac{8}{27} Lg$  folgt. In diesem Augenblick findet ein Stoss statt;  $P$  wird durch den Tisch zur Ruhe gebracht, aber die Kette und  $Q$  bewegen sich. Ist  $v_2$  die Anfangsgeschwindigkeit von  $Q$ , so hat man  $3mLv_2 = 2mLv_1$ , also  $v_2 = \frac{2}{3} v_1$ . Zuletzt steigt das Gewicht  $Q$  in die Höhe und nacheinander werden die Glieder der Kette auf dem Tisch aufgehäuft. Ist  $y$  die von  $Q$  erstiegene Strecke, so wird

$$(3L - y)dv = -(L - y)gdy.$$

Setzt man  $\frac{dv}{dt} = \frac{v dv}{dy}$  und integrirt, so ergibt sich die Geschwindigkeit  $v$  von  $Q$  aus

$$\frac{v_2^2 - v^2}{2g} = y + 2L \log \left(1 - \frac{y}{3L}\right)$$

und daraus das gesuchte Resultat, wenn man  $L\xi$  für  $y$  schreibt und  $v = 0$  setzt.

Beisp. 2. Der eine Theil eines schweren gleichförmigen Seiles ist auf einem Tisch in einen kleinen Haufen  $A$  aufgerollt, der andere, nämlich  $ACB$ , läuft über eine kleine Rolle  $C$  (die sich vertical über  $A$  befindet) und hängt auf der andern Seite der Rolle frei bis zu einer Tiefe  $CB = b$  herab. Es sei  $CA = a$  und  $b$  grösser als  $a$ ; man finde die Bewegung, wenn das System vom Zustand der Ruhe ausgeht. [Tait und Steele's *Dynamics*, 1856.]

Bedeutet  $x$  die Länge von  $CB$ , so ist die Geschwindigkeit durch

$$(x + a)^2 v^2 = \frac{2}{3} g(x - b) (x^2 + bx + b^2 - 3a^2)$$

gegeben.

Beisp. 3. Eine biegsame Kette  $ABCDE$  hängt im Gleichgewicht über einem glatten verticalen Kreis und das eine Ende  $A$  ist an dem Endpunkt eines horizontalen Durchmessers befestigt. Ein Theil  $ABC$  hängt auf der einen Seite und ein anderer Theil  $DE$  auf der andern Seite des Kreises vertical herab. Das befestigte Ende  $A$  wird losgelassen; man zeige, dass

$$\left(l - y + \frac{1}{2}gt^2\right) \frac{d^2y}{dt^2} - \left(\frac{dy}{dt} - gt\right)^2 = g\left(y + \frac{1}{2}c\right)$$

die Gleichung zur Bestimmung des Abstandes  $y$  des tiefsten Punktes der Kette von dem horizontalen Durchmesser während des ersten Theils der Bewegung ist. Dabei ist  $l$  die ganze Länge des Seiles und  $2c$  der Umfang des Kreises.

[Math. Tripos, 1870.]

Ehe  $A$  losgelassen wird, sind die Längen  $AB, BC, DE$  sämmtlich gleich und  $ABC$  bildet eine Kettenlinie, deren Parameter Null ist. Wird nun  $A$  losgelassen, so bewegt sich  $AB$  zuerst abwärts. Jedes Element von  $AB$  fällt frei unter dem Einfluss der Schwere; ist daher  $x = AB$ , so erhält man  $y - x = \frac{1}{2}gt^2$ . Die Elemente von  $AB$  werden eines nach dem andern auf  $BC$  übertragen, wobei ein jedes die Geschwindigkeit  $v' = gt$  und die Länge  $-dx$  hat. So ist die Bewegungsgleichung von  $BCDE$  für die Zeit, in welcher sich  $BC$  abwärts und  $DE$  aufwärts bewegt,

$$d[(l - x)v] = (-dx)v' + g(2y + x + c - l)dt.$$

$v$  ist hierin die Geschwindigkeit der Kette  $BCDE$  und diese ist der Geschwindigkeit gleich, mit der sich  $E$  aufwärts, nicht aber  $B$  abwärts bewegt. Da

$$DE = l - c - x - y, \text{ so ist } v = \frac{dx}{dt} + \frac{dy}{dt}.$$

Setzt man für  $v$  und  $v'$  ihre Werthe ein, so erhält man das Resultat ohne Schwierigkeit.

Beisp. 4. Ein unelastischer Faden von der Länge  $L$  ist mit seinem einen Ende an den unteren Rand eines glatten horizontalen feinrandigen Tisches befestigt, auf welchem der Rest des Fadens liegt, während er am andern Ende rechtwinklig zum Rand durch eine Kraft straff angezogen wird. Das letztere Ende wird losgelassen; man zeige, dass die Geschwindigkeit, mit welcher es den Tisch verlässt,  $\sqrt{2gL(4 - 1)}$  ist.

[June Exam.]

Beisp. 5. Eine dünne gleichförmige Kette liegt in einen Haufen zusammengegrafft auf einem horizontalen Tisch; an ihr eines Ende ist ein dünner Faden befestigt, der über eine glatte vertical über der Kette befestigte Rolle läuft und ein Gewicht trägt, das dem Gewicht einer Länge  $a$  der Kette gleichkommt. Man beweise, dass die Länge der Kette, die in die Höhe gehoben wird, ehe das Gewicht zur Ruhe kommt,  $a\sqrt{3}$  ist, und finde die Länge der noch hängenden Kette, wenn das Gewicht zum zweiten Mal zur Ruhe kommt.

[May Exam.]

Beisp. 6. Eine Kette von der Länge  $a$  liegt zusammengerollt auf dem höchsten Punkt einer rauhen schiefen Ebene und ihr eines Ende lässt man hinabgleiten. Man zeige, dass die Kette sich am Ende der durch  $gt^2 = 6a \cotg \lambda$  gegebenen Zeit  $t$  frei bewegt, wenn die Neigung der Ebene doppelt so gross als der Reibungswinkel  $\lambda$  ist.

[Coll. Exam., 1887.]

Beisp. 7. Ein Luftballon befindet sich in einem gewissen Moment in der Höhe  $h$ , fällt mit der Geschwindigkeit  $V$  und bewegt sich in horizontaler Richtung mit der Geschwindigkeit  $V'$ , die der Geschwindigkeit des Windes in dieser Höhe gleichkommt. Wenn die Geschwindigkeit des Windes der Höhe proportional ist und wenn das Entweichen des Gases, um sich auf einen gewissen Punkt herabzulassen, so regulirt wird, dass die Geschwindigkeit des Fallens constant bleibt, so bringt ein Fehler  $dh$  in der Berechnung der Anfangshöhe an dem zu erreichenden Punkt einen Irrthum

$$= \frac{V' dh}{c^2 V} \left[ 1 + \frac{1}{2}c^2 - e^{-c}(1 + c) \right]$$

hervor, worin  $V^2 c = gh$  ist.

[Math. Tripos, 1871.]

Beisp. 8. Ein kugelförmiger Regentropfen, der durch die Wirkung der Schwere herabfällt, erfährt beständig durch das Niederschlagen von Dampf einen Zuwachs an Masse, der seiner Oberfläche proportional ist;  $c$  ist sein Radius im Beginn des Fallens,  $r$  sein Radius nach dem Zeitintervall  $t$ ; man zeige, dass seine Geschwindigkeit  $V$  durch die Gleichung

$$V = \frac{gt}{4} \left( 1 + \frac{c}{r} + \frac{c^2}{r^2} + \frac{c^3}{r^3} \right)$$

gegeben ist, wenn man den Widerstand der Luft nicht in Rechnung zieht.

[Smith's Prize Ex., 1853.]

## Die invariable Ebene.

§ 301. Wir wollen die Bewegungsgrösse  $mv$  eines Massenpunktes  $P$  durch die von dem Punkt aus in der Richtung seiner Bewegung gezogene Gerade  $PP'$  darstellen. (Siehe § 283.) Nach den Lehren der Statik ist diese Bewegungsgrösse einer gleichen und parallelen, an einem willkürlichen Punkt  $O$  angebrachten Translationsbewegungsgrösse äquivalent mit einem Paar zusammen, dessen Moment  $mvp$  ist, wenn  $p$  das Loth von  $O$  auf  $PP'$  bedeutet. Wir wollen diese transferirte Translationsbewegungsgrösse durch die Gerade  $OM$  darstellen, die selbstverständlich  $PP'$  gleich und parallel ist. Das Paar liegt in der Ebene, die  $OM$  und  $P$  enthält und sei durch eine auf seiner Ebene senkrechte Axe  $ON$  der Richtung und Grösse nach dargestellt.

Nimmt man alle Massenpunkte des Systems zusammen, so kann man die Translations- und Paarbewegungsgrössen der verschiedenen Punkte in eine einzelne resultirende an dem beliebigen Punkt  $O$  angebrachte Translationsbewegungsgrösse zusammen mit einem einzelnen Paar vereinigen.  $OV$  und  $OH$  seien die von  $O$  aus gezogenen Geraden, die der Richtung und Grösse nach diese beiden Resultanten darstellen. Die beiden Geraden stellen dann graphisch die augenblicklichen Bewegungsgrössen der als ein System betrachteten Massenpunkte dar.

Das System werde auf Cartesische Coordinaten bezogen. Die Componenten der Bewegungsgrösse des Punktes  $m$  sind, so ist der Vector  $OV$  die Resultante von  $\Sigma m \frac{dx}{dt}$ ,  $\Sigma m \frac{dy}{dt}$ ,  $\Sigma m \frac{dz}{dt}$ . Ferner ist, nach § 74,  $m \left( y \frac{dz}{dt} - z \frac{dy}{dt} \right)$  das Moment der Bewegungsgrösse desselben Punktes um die  $x$ -Axe.  $OH$  ist daher die Resultante der drei Paar-Bewegungsgrössen

$$h_1 = \Sigma m \left( y \frac{dz}{dt} - z \frac{dy}{dt} \right),$$

$$h_2 = \Sigma m \left( z \frac{dx}{dt} - x \frac{dz}{dt} \right),$$

$$h_3 = \Sigma m \left( x \frac{dy}{dt} - y \frac{dx}{dt} \right).$$

Wir wollen nun annehmen, es wirkten keine äusseren Kräfte auf das System, so dass es bei seiner Bewegung nur den gegenseitigen Actionen und Reactionen seiner verschiedenen Theile unterworfen ist. Alsdann sind die beiden Geraden  $OV$  und  $OH$ , weil keine zusätzliche Bewegungsgrösse dem System gegeben wird, der Grösse und Richtung nach während der Bewegung festliegend. (Siehe § 283.)

Die Componenten von  $OV$  und  $OH$  müssen constant sein. Daraus folgt, dass jede der Grössen  $h_1, h_2, h_3$  constant ist. Bezeichnen wir mit  $h$  die Winkelbewegungsgrösse um  $OH$ , so ist  $h^2 = h_1^2 + h_2^2 + h_3^2$ . Die Verhältnisse  $\frac{h_1}{h}, \frac{h_2}{h}, \frac{h_3}{h}$  sind daher die Richtungs cosinusse einer Geraden (nämlich  $OH$ ), welche während der Bewegung festliegt.

Dass die Componenten  $h_1, h_2, h_3$  der Winkelbewegungsgrösse constant sind, folgt auch sofort aus § 77. Betrachtet man die zweite Gleichung dieses Paragraphen, so sieht man, dass die Winkelbewegungsgrösse um eine im Raum festliegende Gerade constant ist, wenn das Moment der äusseren Kräfte um diese Linie Null ist.

Die Gerade  $OH$  heisst die für  $O$  *invariable Linie* und eine auf  $OH$  senkrechte Ebene die für  $O$  *invariable Ebene*. Die Gerade  $OH$  heisst auch manchmal die resultirende Axe der Winkel- oder Paarbewegungsgrösse für  $O$ .

Wird durch  $O$  eine Gerade  $OL$  gezogen, die den Winkel  $\theta$  mit der für  $O$  invariablen Linie  $OH$  macht, so ist die Winkelbewegungsgrösse um  $OL$  alsdann  $h \cos \theta$ . Denn die Axe des resultirenden Bewegungsgrössenpaares ist  $OH$  und die Componente um  $OL$  daher  $OH \cos \theta$ . Mithin kann die invariable Linie für  $O$  auch als die durch  $O$  gehende Axe definirt werden, um welche das Moment der Bewegungsgrösse am grössten ist.

Für verschiedene Punkte des Systems sind die Lagen der invariablen Linie verschieden. Sie sind aber durch dieselben Gesetze miteinander verbunden, wie die Axen des resultirenden Paares eines Systems von Kräften, wenn der Coordinatenanfang geändert wird. Diese Gesetze sind bereits in § 235 in Kap. V gegeben worden und hier brauchen wir uns nur im Allgemeinen auf sie zu beziehen.

Wenn an dem System äussere Kräfte angreifen, so können die Geraden  $OV$  und  $OH$  beide im Raum nicht festliegend sein. Man betrachte zuerst einen beliebigen Massenpunkt;  $OM, ON; OM', ON'$  seien seine Translations- und Paarbewegungsgrössen zur Zeit  $t$  und  $t + dt$ . Dann stellt  $MM', NN'$  der Richtung und Grösse nach die Translationsbewegungsgrösse und die Paar- oder Winkelbewegungsgrösse dar, die in der Zeit  $dt$  hinzukommt. Die Effectivkraft an einem Massenpunkt  $m$  ist daher einer einzelnen an  $O$  angreifenden durch  $\frac{MM'}{dt}$  dargestellten linearen Effectivkraft und einem einzelnen Effectivpaar äquivalent, das durch  $\frac{NN'}{dt}$  dargestellt wird.

Alsdann nehme man das ganze System von Massenpunkten.  $OV'$  und  $OH'$  mögen seine Translations- und Paarbewegungsgrössen nach dem Zeitintervall  $dt$  darstellen.

$OV$  ist so die Resultante der allen Massenpunkten des Systems entsprechende Gruppe  $OM$ ;  $OV'$  die Resultante der Gruppe  $OM'$ .  $\frac{VV'}{dt}$  stellt daher die ganz lineare Effectivkraft des Systems zur Zeit  $t$  dar und ebenso  $\frac{HH'}{dt}$  das resultirende Effectivpaar des Systems.

Daraus ergibt sich, dass die Punkte  $V$  und  $H$  zwei Raumcurven beschreiben deren Eigenschaften denen des Hodographen in der Dynamik der Massenpunkte analog sind.

Es folgt daraus auch, dass, wenn  $V_x$  die Componente der Bewegungsgrösse eines Systems in der Richtung einer Geraden  $Ox$  und  $H_x$  das Moment der Bewegungsumgrösse um dieselbe Gerade ist,  $\frac{dV_x}{dt}$  und  $\frac{dH_x}{dt}$  die Componente und das Moment der Effectivkräfte des Systems längs dieser Geraden bez. um sie sind.

Nach dem D'Alembert'schen Princip aber sind die Effectivkräfte eines Systems den gegebenen Kräften äquivalent. Daher, was für Coordinaten man auch benutzen mag, wenn  $X$  und  $L$  die Componente und das Moment der gegebenen Kräfte für eine beliebige Gerade sind, die wir die  $x$ -Axe nennen wollen, so ist  $\frac{dV_x}{dt} = X$  und  $\frac{dH_x}{dt} = L$ . Diese Gleichungen entsprechen den im § 71 mit (A) und (B) bezeichneten.

Zu beachten sind die folgenden Fälle:

(1) Wenn die gegebenen Kräfte sämmtlich durch einen festen Punkt gehen und dieser Punkt zum Coordinatenanfang gewählt wird, dann kann  $OV$  variabel sein,  $OH$  liegt aber stets der Lage und Grösse nach fest.

(2) Wenn die gegebenen Kräfte einem System von Paaren äquivalent sind, kann zwar  $OH$  veränderlich sein,  $OV$  dagegen liegt der Lage und Grösse nach fest.

In einer Abhandlung „*Differential coefficients and determinants of lines*“ hat Cohen die Eigenschaften dieser resultirenden Linien besprochen. *Phil. Trans.* 1866

§ 302. Die Lage der invariablen Ebene für den Schwerpunkt des Sonnensystems kann man folgendermassen finden. Man beziehe das System auf beliebige durch den Schwerpunkt gehende rechtwinklige Axen.  $\omega$  sei die Winkelgeschwindigkeit eines Körpers um seine Rotationsaxe,  $Mk^2$  sein Trägheitsmoment um diese Axe und  $(\alpha, \beta, \gamma)$  die Richtungswinkel der Axe. Die Umdrehungsaxe und zwei senkrechte Axen bilden am Schwerpunkt ein System von Hauptaxen. Die Winkelbewegungsgrösse um die Rotationsaxe ist  $Mk^2\omega$  und daher die Winkelbewegungsgrösse um eine zur  $z$ -Axe parallele Axe  $Mk^2\omega \cos \gamma$ . Das Moment der Bewegungsgrösse um die  $z$ -Axe für die ganze im Schwerpunkt vereinigte Masse ist  $M(x \frac{dy}{dt} - y \frac{dx}{dt})$ , woraus

$$h_3 = \Sigma Mk^2 \omega \cos \gamma + \Sigma M(x \frac{dy}{dt} - y \frac{dx}{dt})$$

folgt. Ebenso erhält man die Werthe von  $h_1$  und  $h_2$ . Damit ist die Lage der invariablen Ebene gegeben.

§ 303. Die invariable Ebene kann in der Astronomie als Normalebene bezugsebene benutzt werden. Man kann die Lagen der Himmelskörper

mit der grössten Sorgfalt beobachten und die Coordinaten eines jeden mit Bezug auf ganz beliebige Axen bestimmen; offenbar haben wir aber, wenn diese Axen im Raum nicht festliegen oder in Bewegung sind, ohne dass ihre Bewegung bekannt wäre, kein Mittel unsre Kenntnisse der Nachwelt zu übermitteln. Die Ebenen der Ekliptik und des Aequators sind allgemein zu Hauptbezugsebenen genommen worden. Sie sind beide in Bewegung und ihre Bewegungen sind bis zu einem grossen Grad der Genauigkeit bekannt und werden es später wahrscheinlich noch mehr sein. Es ist daher vielleicht möglich, in der Zukunft zu berechnen, welche Lagen sie im Raum zu der Zeit hatten, als werthvolle Beobachtungen gemacht wurden. In sehr langer Zeit jedoch kann ein Fehler von Jahr zu Jahr wachsen und schliesslich beträchtlich werden. Die jetzige Lage dieser Ebenen im Raum kann auch dadurch der Nachwelt überliefert werden, dass man Beobachtungen an den Fixsternen anstellt. Diese Körper liegen aber nicht absolut fest und daher kann man aus diesen Beobachtungen die Lage der Bezugsebenen mit der Zeit immer weniger genau ermitteln. Die dritte von Laplace vorgeschlagene Methode besteht in der Benutzung der invariablen Ebene. Unter der Annahme, die Körper, welche unser System bilden, nämlich Sonne, Planeten, Satelliten, Kometen etc. unterlägen nur ihren gegenseitigen Anziehungen, folgt aus den obigen Paragraphen, dass die Richtung der invariablen Ebene für den Schwerpunkt im Raum absolut festliegt. Auch ergibt sich aus § 78, dass sich der Schwerpunkt entweder in Ruhe befindet oder sich gleichförmig in einer Geraden bewegt. Die Anziehungskräfte der Sterne sind hier vernachlässigt worden; sie sind jedoch zu klein, als dass man sie bei dem jetzigen Zustand unserer astronomischen Kenntnisse in Rechnung zu ziehen brauchte. Wir können daher bis zu einem gewissen Grad der Genauigkeit die Lage unserer Coordinatenebenen im Raum bestimmen, indem wir sie auf die invariable Ebene beziehen, welche von allen andern bekannten Ebenen des Sonnensystems dem Zustand des Festliegens am nächsten kommt. Ihre Lage lässt sich zur jetzigen Zeit aus dem jetzigen Zustand des Sonnensystems berechnen und in der Zukunft lässt sich eine ähnliche Berechnung auf Grund des dann bestehenden Zustandes des Systems ausführen. So kann die Kenntniss ihrer Lage nicht verloren gehen. Die Kenntniss der Coordinaten der invariablen Ebene reicht übrigens nicht hin, umgekehrt die Lage unserer Bezugsebenen zu bestimmen. Wir müssen auch die Coordinaten einer graden in der invariablen Ebene liegenden Linie kennen, deren Richtung im Raum festliegt. Eine solche Linie liefert, wie Poisson vorgeschlagen hat, die Projection der Bewegungsrichtung des Schwerpunktes des Systems auf die invariable Ebene. Wenn der Schwerpunkt des Sonnensystems sich in Ruhe befindet oder sich senkrecht zur invariablen Ebene bewegt, so lässt uns diese Methode im Stich. Jedemfalls reicht unsere Kenntniss der Bewegung des Schwerpunktes gegen-

wärtig nicht aus, uns die volle Benutzung dieser im Raum festen Richtung zu ermöglichen.

§ 304. Wenn man die Planeten und Körper, welche das Sonnensystem bilden, als Kugeln ansehen kann, deren Schichten gleicher Dichtigkeit concentrische Kugelflächen sind, so wirken ihre gegenseitigen Anziehungskräfte längs der Geraden, die ihre Mittelpunkte verbinden. Alsdann bewegen sich ihre Centren ebenso, als ob jede Masse in ihrem Schwerpunkt vereinigt wäre, während die Bewegung eines jeden Körpers um seinen Schwerpunkt immer unverändert bleiben würde. Wir erhalten so eine zweite feste Ebene, indem wir die letzteren Bewegungen überhaupt weglassen. Dies hat Laplace gethan und aus seinen Formeln die in den obigen Werthen von  $h_1, h_2, h_3$  von den Rotationen der Körper herrührenden Glieder ausgeschieden. Man kann diese Ebene die astronomische invariable Ebene zum Unterschied von der wahren dynamischen invariablen Ebene nennen. Die erste steht senkrecht auf der Axe des von den Translationsbewegungen der verschiedenen Körper herrührenden Bewegungsgrössenpaares, die zweite auf der Axe des von den Translations- und Rotationsbewegungen herrührenden Paares.

Die astronomische invariable Ebene liegt nicht genau im Raum fest, weil die gegenseitigen Anziehungen der Körper nicht genau in der Richtung der ihre Mittelpunkte verbindenden Geraden wirken und daher die in den Ausdrücken für  $h_1, h_2, h_3$  ausgelassenen Glieder nicht durchaus constant sind. Die Präcession bewirkt, dass die Rotationsaxe eines jeden Körpers einen Kegel im Raum beschreibt, in Folge dessen die Lage der astronomischen invariablen Ebene im Raum, obgleich die Winkelgeschwindigkeit unverändert bleibt, sich um ein Geringes ändern muss. Eine Collision zwischen zwei Körpern des Systems, wenn dies möglich wäre, oder die Explosion eines Planeten ähnlich derjenigen, durch die nach der Annahme von Olbers (1802) die Planeten Ceres, Pallas, Juno, Vesta etc. entstanden sein sollen, könnte eine beträchtliche Aenderung in der Summe der ausgelassenen Glieder hervorbringen. In diesem Fall würde wohl die Lage der astronomischen invariablen Ebene, nicht aber die der dynamischen afficirt werden. Man könnte versucht sein, anzunehmen, der Gebrauch der wahren invariablen Ebene sei in der Astronomie vorzuziehen. Es braucht dies jedoch nicht nothwendig der Fall zu sein, weil die Winkelgeschwindigkeiten und Trägheitsmomente der Körper, die unser System bilden, nicht sämmtlich bekannt sind und wir mithin die Lage der dynamischen invariablen Ebene nicht bis zu einem sehr grossen Genauigkeitsgrad berechnen können, während wir wissen, dass die Glieder, in welchen diese unbekannten Grössen auftreten, sämmtlich sehr klein oder nahezu constant sind. Da alle Glieder, die weggelassen wurden, im Vergleich zu den beibehaltenen klein sind, so muss die astronomische mit der

dynamischen invariablen Ebene einen nur kleinen Winkel machen. Obgleich nun die Ebene nahezu im Raum festliegt, so kann doch ihr Durchschnitt mit der dynamischen in Folge der geringen Grösse der Neigung beträchtliche Aenderungen der Lage erleiden.

In seiner *Mécanique Céleste*, tome III, p. 188, berechnete Laplace die Lage der astronomischen invariablen Ebene für zwei Epochen 1750 und 1950, indem er annahm, dass für diese Periode seine Formeln für die Variationen der Excentricitäten, Inclinationen und Knotenlinien der Planetenbahnen correct seien. Indem er die Sektorenbewegungsgrössen in Folge der Bewegung der Satelliten um ihre Hauptplaneten, ebenso wie die des Planeten Neptun vernachlässigte, kam er zu dem Resultat, dass zur ersten Epoche die Neigung der Ebene gegen die Ekliptik  $1^{\circ} 35' 31''$  und die Länge des aufsteigenden Knotens  $102^{\circ} 57' 29''$  betrug und dass zur zweiten Epoche die Neigung dieselbe bleibt, wie zuvor, die Länge des Knotens dagegen  $102^{\circ} 57' 14''$  sein wird.

In den *Smithsonian Contributions to Knowledge* Vol. 18, 1873, gibt J. N. Stockwell die Neigung der astronomischen invariablen Ebene gegen die (als festliegend angenommene) Ekliptik von 1850 zu  $1^{\circ} 35' 19''$ , 376 an. Er schliesst Neptun ein, lässt aber die Satelliten aus. Die Neigung ist nicht constant, muss aber innerhalb der Grenzen  $0^{\circ}$  und  $3^{\circ} 6'$  liegen. Er berechnete auch die Neigungen der Bahnen der acht Hauptplaneten gegen die invariable Ebene und ihre Maximal- und Minimalwerthe, ebenso wie die Lagen der Knotenlinien und ihre mittleren Bewegungen für das Julianische Jahr.

Poinsot machte in einer Anmerkung zu seiner Statik darauf aufmerksam, dass die Ebene von Laplace nicht die wahre invariable Ebene sei. Er bemerkt, dass die Sektorenbewegungsgrösse in Folge der Rotation der Sonne mindestens 25 mal so gross als die in Folge der Bewegung der Erde um die Sonne ist. Dieses Weglassen ändert die Neigung der Ebene gegen die Ekliptik um einige Minuten und die Länge des aufsteigenden Knotens um mehrere Grade.

§ 305. Beisp. 1. Man zeige, dass die invariable Ebene für einen beliebigen Punkt des Raumes, welcher in der von dem Schwerpunkt des Sonnensystems beschriebenen Geraden liegt, der für den Schwerpunkt parallel ist.

Beisp. 2. Wenn die invariablen Ebenen für alle Punkte einer gewissen Geraden parallel sind, so ist diese Gerade der von dem Schwerpunkt beschriebenen Geraden parallel.

## Momentankräfte in dem Raum von drei Dimensionen.

§ 306. Der einzelne Körper unter Zwangsbedingungen. *Man soll die allgemeinen Gleichungen der Bewegung eines Körpers um einen festen Punkt unter der Einwirkung gegebener Momentankräfte bestimmen.*

Der feste Punkt sei der Coordinatenanfang und die Axen rechtwinklig zu einander.  $(\Omega_x, \Omega_y, \Omega_z)$ ,  $(\omega_x, \omega_y, \omega_z)$  seien die Winkel-



geschwindigkeiten des Körpers grade vor und grade nach dem Stoss und die Differenzen  $\omega_x - \Omega_x$ ,  $\omega_y - \Omega_y$ ,  $\omega_z - \Omega_z$  mögen  $\omega'_x$ ,  $\omega'_y$ ,  $\omega'_z$  heissen. Dann sind  $\omega'_x$ ,  $\omega'_y$ ,  $\omega'_z$  die durch die Momentankraft erzeugten Winkelgeschwindigkeiten. Nach dem D'Alembert'schen Princip (siehe § 86) ist der Unterschied zwischen den Winkelbewegungsgrössen des Systems grade vor und grade nach der Wirkung der Momentankräfte dem Moment der Momentankräfte gleich. Mithin ist nach § 262

$$\left. \begin{aligned} A\omega'_x - (\Sigma mxy) \omega'_y - (\Sigma mxz) \omega'_z &= L \\ B\omega'_y - (\Sigma myz) \omega'_z - (\Sigma myx) \omega'_x &= M \\ C\omega'_z - (\Sigma mzx) \omega'_x - (\Sigma mzy) \omega'_y &= N \end{aligned} \right\} \quad . \quad . \quad . \quad (1),$$

worin  $L$ ,  $M$ ,  $N$  die Momente der Momentankräfte um die Axen sind. Die drei Gleichungen reichen aus, die Werthe von  $\omega'_x$ ,  $\omega'_y$ ,  $\omega'_z$  zu bestimmen. Addirt man sie zu den Winkelgeschwindigkeiten vor dem Stoss, so findet man die Anfangsbewegung des Körpers nach dem Stoss.

§ 307. Beisp. 1. Man zeige, dass die Gleichungen unabhängig von einander sind und dass keine der Winkelgeschwindigkeiten  $\omega_x$ ,  $\omega_y$ ,  $\omega_z$  unendlich gross ist.

Dies folgt aus § 20, in welchem gezeigt wurde, dass die Determinante der Gleichungen nicht verschwinden kann.

Beisp. 2. Man zeige, dass die schliessliche Bewegung eines Körpers, auf den eine endliche Anzahl gegebener Momentankräfte einwirkt, die einander in unendlich kleinen Zwischenräumen folgen, von ihrer Reihenfolge unabhängig ist.

§ 308. Man beachte, dass in diesen Gleichungen die Bezugsaxen willkürlich sind. Man sollte sie so wählen, dass die Werthe von  $A$ ,  $\Sigma mxy$ , etc. sich möglichst leicht ermitteln lassen. Ist die Lage der Hauptaxen für den festen Punkt bekannt, so wird man im Allgemeinen am besten thun, wenn man sie wählt.

Die Gleichungen erhalten dann die einfache Form

$$A\omega'_x = L, \quad B\omega'_y = M, \quad C\omega'_z = N \quad . \quad . \quad . \quad (2).$$

Sind die Werthe von  $\omega'_x$ ,  $\omega'_y$ ,  $\omega'_z$  bekannt, so lässt sich der Druck auf den festen Punkt finden. Denn nach D'Alembert's Princip ist die Aenderung der Translationsbewegungsgrösse des Körpers in einer beliebigen Richtung der Componenten der Momentankräfte gleich. Sind daher  $F$ ,  $G$ ,  $H$  die Druckkräfte des festen Punktes auf den Körper, so ist

$$\left. \begin{aligned} \Sigma X + F &= M \frac{d\bar{x}}{dt} \text{ nach § 85} \\ &= M (\omega'_y \bar{z} - \omega'_z \bar{y}) \text{ nach § 238} \\ \Sigma Y + G &= M (\omega'_z \bar{x} - \omega'_x \bar{z}) \\ \Sigma Z + H &= M (\omega'_x \bar{y} - \omega'_y \bar{x}) \end{aligned} \right\} \quad . \quad . \quad . \quad (3).$$

§ 309. Beisp. Der Scheitelpunkt  $O$  einer gleichförmigen Scheibe, die von dem Bogen  $OP$  einer Parabel, der Axe  $ON$  und der Ordinate  $PN$  begrenzt wird, liegt fest. Sie erhält senkrecht zu ihrer Ebene auf den Endpunkt  $P$  des gekrümmten Theile ihres Umfanges einen Stoss  $B$ . Man finde die Anfangsbewegung unter der Annahme, die Scheibe habe sich, ehe sie den Stoss erhält, in Ruhe befunden.

Die Gleichung der Parabel sei  $y^2 = 4ax$  und die  $z$ -Axe stehe senkrecht auf ihrer Ebene. Alsdann ist  $\Sigma mxz = 0$ ,  $\Sigma myz = 0$ .  $\mu$  sei die Masse der Flächeneinheit und  $ON = c$ . Man hat

$$\Sigma mxy = \mu \int \int xy \, dx \, dy = \mu \int_0^c x \frac{y^2}{2} \, dx = 2\mu \int_0^c ax^2 \, dx = \frac{2}{3} \mu ac^3,$$

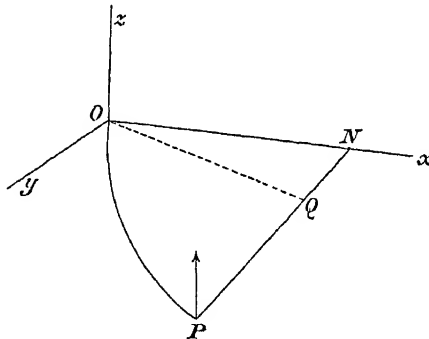
$$A = \frac{1}{3} \mu \int_0^c y^3 \, dx = \frac{15}{16} \mu a^{\frac{3}{2}} c^{\frac{5}{2}}, \quad B = \mu \int_0^c x^2 y \, dx = \frac{4}{7} \mu a^{\frac{1}{2}} c^{\frac{7}{2}}$$

und

$$C = A + B \text{ nach § 7.}$$

Die Momente des Stosses  $B$  um die Axen sind  $L = B\sqrt{4ac}$ ,  $M = -BC$ ,  $N = 0$ . Durch Substitution dieser Werthe erhalten die Gleichungen in § 306 die Gestalt

$$\left. \begin{aligned} \frac{16}{15} \mu a^{\frac{3}{2}} c^{\frac{5}{2}} \omega_x - \frac{2}{3} \mu ac^3 \omega_y \\ = 2Ba^{\frac{1}{2}} c^{\frac{1}{2}}, \\ \frac{4}{7} \mu a^{\frac{1}{2}} c^{\frac{7}{2}} \omega_y - \frac{2}{3} \mu ac^3 \omega_x \\ = -Bc, \quad \omega_z = 0 \end{aligned} \right\}.$$



Diese Gleichungen bestimmen die Anfangsbewegung. Durch Elimination von

$B$  findet man das Verhältniss von  $\omega_y$  zu  $\omega_x$ . Es ergibt sich leicht, dass die Scheibe um  $OQ$  zu rotiren anfängt, wenn man auf der Ordinate in  $N$  die Strecke  $NQ = \frac{7}{25} NP$  abträgt.

§ 310. Eine andre Fassung des Problems. Wenn an einem Körper, der sich um einen festen Punkt frei drehen kann, eine beliebige Anzahl von Momentankräften angreifen, so ist jede Momentankraft einer gleichen und parallelen an dem festen Punkt angreifenden Momentankraft zusammen mit einem Momentanpaar äquivalent. Die Momentankraft an dem festen Punkt kann keine Wirkung auf die Bewegung des Körpers ausüben und kann daher ausser Betracht bleiben, wenn nur die Bewegung gesucht wird. Setzt man alle Paare zusammen, so lässt sich das allgemeine Problem so aussprechen: Auf einen Körper, der sich um einen festen Punkt bewegt, wirkt ein gegebenes Momentankräftepaar; man finde die durch dasselbe bewirkte Aenderung der Bewegung. Die analytische Lösung ist in den im § 306 aufgestellten Gleichungen enthalten. Die folgenden Beispiele drücken das Resultat in geometrischer Form aus.

Beisp. 1. Man weise aus den Gleichungen nach, dass die resultirende Axe der durch das Paar erzeugten Winkelgeschwindigkeit die der Ebene des Paares conjugirte Diametrallinie mit Bezug auf das Trägheitsellipsoid ist. Man sehe auch § 118.

Beisp. 2.  $G$  sei die Grösse des Paares,  $p$  das Loth von dem festen Punkt auf die Berührungsebene an das Trägheitsellipsoid parallel der Ebene des Paares  $G$ .  $\Omega$  sei die erzeugte Winkelgeschwindigkeit,  $r$  der Radiusvector des Ellipsoids welcher die Axe von  $\Omega$  ist. Schliesslich sei  $k$  der Parameter des Ellipsoids wie in § 19. Man beweise, dass  $k\Omega = prG$  ist.

Beisp. 3.  $\Omega_x, \Omega_y, \Omega_z$  seien die Winkelgeschwindigkeiten um drei conjugirte Durchmesser des Trägheitsellipsoids für den festen Punkt derart, dass ihre Resultante die von einem Stosspar  $G$  erzeugte Winkelgeschwindigkeit ist;  $A', B', C'$  die Trägheitsmomente um die conjugirten Durchmesser; man beweise, dass  $A'\Omega_x = G \cos \alpha$ ,  $B'\Omega_y = G \cos \beta$ ,  $C'\Omega_z = G \cos \gamma$  ist, wenn  $\alpha, \beta, \gamma$  die Winkel sind, welche die Axe von  $G$  mit den conjugirten Durchmessern macht.

Beisp. 4. Wenn auf einen Körper, der im Stande ist, sich um einen festen Punkt  $O$  zu drehen, ein Momentanpaar  $G$  einwirkt, dessen Axe der Radiusvector  $r$  des reciproken Trägheitsellipsoids für  $O$  ist und wenn  $p$  das Loth von  $O$  auf die Berührungsebene in dem Endpunkt von  $r$  bedeutet, dann ist das Loth  $p$  die Axe der durch den Stoss erzeugten Winkelgeschwindigkeit und die Grösse  $\Omega$  durch die Gleichung  $G = Mpr\Omega$  gegeben.

Beisp. 5. Man zeige, dass, wenn an einem in Ruhe befindlichen Körper beliebige Momentankräfte wirken, man die Momente um die Anfangsrotationsaxe nach dem in § 89 angegebenen Verfahren so nehmen kann, als wäre sie eine feste Axe.

Beisp. 6. Wenn sich ein Körper um einen festen Punkt dreht, heisst das halbe Product aus dem Trägheitsmoment für die Momentanaxe und dem Quadrat der Winkelgeschwindigkeit die lebendige Kraft. Die von der Ruhe aus durch eine Momentankraft erzeugte lebendige Kraft sei  $T$  und dieselbe Kraft durch denselben Stoss erzeugt  $T'$ , wenn der Körper gezwungen ist, um eine feste durch den festen Punkt gehende Axe zu rotiren. Man beweise, dass  $T' = T \cos^2 \theta$  ist, worin  $\theta$  den Winkel zwischen den excentrischen Linien (§ 40) der beiden Rotationsaxen in Bezug auf das Trägheitsellipsoid für den festen Punkt bedeutet.

Beisp. 7. Man leite daraus das Euler'sche Theorem ab, dass die von der Ruhe aus durch eine Momentankraft erzeugte lebendige Kraft grösser ist, wenn der Körper sich frei um den festen Punkt drehen kann, als wenn er gezwungen ist, um eine durch den festen Punkt gehende Axe zu rotiren. Dieser Satz wurde später durch Lagrange und Bertrand in dem zweiten Theil des ersten Bandes der *Mécanique Analytique* verallgemeinert.

§ 311. Der freie einzelne Körper. Man soll die Bewegung eines freien Körpers bestimmen, auf den eine gegebene Momentankraft wirkt.

Da der Körper frei ist, so bewegt er sich um seinen Schwerpunkt ebenso, als ob dieser Punkt fest läge. Daher findet man auch hier die Winkelgeschwindigkeiten des Körpers nach den Gleichungen (1) und (2) des § 306, wenn man als Axen drei beliebige sich rechtwinklig im Schwerpunkt schneidende Gerade nimmt.

Um die Bewegung des Schwerpunktes zu ermitteln, seien  $(U, V, W)$ ,  $(u, v, w)$  die Componenten der Geschwindigkeit des Schwerpunktes grade

vor und grade nach dem Stoss.  $X, Y, Z$  seien die Componenten des Stosses und  $M$  die ganze Masse. Man hat dann durch Zerlegung parallel zu den Axen

$$M(u - U) = X, \quad M(v - V) = Y, \quad M(w - W) = Z.$$

Die Differenzen  $u - U, v - V, w - W$  kann man, wie in § 306,  $u', v', w'$  nennen.

§ 312. Beisp. 1. Auf einen in Ruhe befindlichen Körper wirkt eine Momentankraft, deren Componenten parallel zu den Hauptaxen für den Schwerpunkt  $X, Y, Z$  sind und deren Angriffspunkt in Bezug auf diese Axen die Coordinaten  $(p, q, r)$  hat. Man beweise, dass, wenn die resultirende Bewegung nur in einer Rotation um irgend eine Axe besteht,

$$A(B - C)pYZ + B(C - A)qZX + C(A - B)rXY = 0$$

ist. Ist diese Bedingung sowohl ausreichend, wie nöthig? Siehe § 241.

Beisp. 2. Einem homogenen Cricketball wird eine Rotation um eine horizontale in der verticalen Wurfebene liegende Axe mit der Winkelgeschwindigkeit  $\Omega$  ertheilt. Wenn er den Boden trifft, der vollkommen rau und unelastisch vorausgesetzt wird, bewegt sich sein Centrum mit der Geschwindigkeit  $V$  in einer Richtung, die den Winkel  $\alpha$  mit dem Horizont macht; man beweise, dass die Richtung der Bewegung des Balls nach dem Aufstossen mit der Wurfebene einen Winkel bildet, dessen Tangente  $\frac{2}{5} \frac{a\Omega}{V \cos \alpha}$  ist, unter  $a$  den Radius des Balls verstanden.

§ 313. Die Bewegung eines Punktes des Körpers. Man beweise, dass die Componenten der Aenderung der Geschwindigkeit eines Punktes des Körpers lineare Functionen der Componenten der Momentankraft sind. Die Gleichungen in § 311 bestimmen die Bewegung eines freien Körpers, auf den eine gegebene Momentankraft wirkt, vollständig und aus ihnen lässt sich nach § 238 die Anfangsbewegung eines jeden Punktes des Körpers ableiten.  $(p, q, r)$  seien die Coordinaten des Angriffspunktes des Stosses; die Momente des Stosses um die Axen sind dann  $qZ - rY, rX - pZ$  bez.  $pY - qX$ . Sie sind auf die rechte Seite der Gleichungen in § 306 zu setzen.  $(p', q', r')$  seien die Coordinaten des Punktes, dessen Anfangsgeschwindigkeiten parallel zu den Axen man finden soll.  $(u_1, v_1, w_1), (u_2, v_2, w_2)$  seien seine Geschwindigkeiten grade vor und grade nach dem Stoss. Die übrige Bezeichnung sei so, wie in § 306. Dann hat man

$$u_2 - u_1 = u' + \omega_y' r' - \omega_z' q'$$

und ähnliche Gleichungen für  $v_2 - v_1, w_2 - w_1$ . Substituirt man in diese Gleichungen die in § 311 gegebenen Werthe von  $u', v', w', \omega_x', \omega_y', \omega_z'$ , so sieht man, dass  $u_2 - u_1, v_2 - v_1, w_2 - w_1$  lineare Functionen von  $X, Y, Z$  sind von der Form

$$u_2 - u_1 = FX + GY + HZ,$$

worin  $F, G, H$  von der Structur des Körpers und den Coordinaten der beiden Punkte abhängen.

$$\begin{aligned} A(\omega_x - \Omega_x) - F(\omega_y - \Omega_y) - E(\omega_z - \Omega_z) - (v - V)z + (w - W)y &= 0, \\ -F(\omega_x - \Omega_x) + B(\omega_y - \Omega_y) - D(\omega_z - \Omega_z) - (w - W)x + (u - U)z &= 0, \\ -E(\omega_x - \Omega_x) - D(\omega_y - \Omega_y) + C(\omega_z - \Omega_z) - (u - U)y + (v - V)x &= 0. \end{aligned}$$

Drei ähnliche Gleichungen gelten für den andern Körper, die sich von den vorstehenden nur dadurch unterscheiden, dass die Buchstaben mit einem Strich versehen sind.

Die Componenten in der Richtung der  $z$ -Axe für beide Körper ergeben

$$M(w - W) + M'(w' - W') = 0.$$

Die relative Compressionsgeschwindigkeit ist für den Moment der grössten Compression Null und daher

$$w - \omega_x y + \omega_y x = w' - \omega'_x y' + \omega'_y x'.$$

Man hat so acht Gleichungen zwischen den zwölf unbekannten Componenten der Translations- und Winkelgeschwindigkeiten.

§ 316. Sind *die Körper glatt*, so erhält man vier weitere Gleichungen, indem man für jeden Körper die Componenten parallel zur  $x$ - und  $y$ -Axe nimmt. Für den einen Körper ist

$$u - U = 0, \quad v - V = 0$$

und ähnliche Gleichungen gelten für den andern.

§ 317. Sind *die Körper vollkommen rauh*, so erhält man zwei der nöthigen vier Gleichungen durch die Componenten der Translationsbewegungsgrösse parallel zur  $x$ - und  $y$ -Axe, nämlich

$$\left. \begin{aligned} M(u - U) + M'(u' - U') &= 0 \\ M(v - V) + M'(v' - V') &= 0 \end{aligned} \right\}.$$

Die beiden andern sind geometrische Gleichungen, die man findet, indem man die Componente der relativen Geschwindigkeit des Gleitens gleich Null setzt, nämlich

$$\left. \begin{aligned} u - \omega_y z + \omega_z y &= u' - \omega'_y z' + \omega'_z y' \\ v - \omega_z x + \omega_x z &= v' - \omega'_z x' + \omega'_x z' \end{aligned} \right\}.$$

§ 318. **Glatte elastische Körper.** Sind die Körper *glatt und unvollkommen elastisch*, so muss man die normale Reaction in die Gleichungen einführen. Das Verfahren ist genau so, wie in dem allgemeinen Fall, wenn die Körper rauh und elastisch sind, den wir in den folgenden Paragraphen besprechen werden. Es wird selbstverständlich dadurch vereinfacht, dass man die Reibungen  $P$  und  $Q$  in den zwölf Bewegungsgleichungen (1), (2), (3), (4) gleich Null setzt. Auch verschwindet die Compressionsgeschwindigkeit  $C$  im Moment der stärksten

Compression. Man erhält daher eine weitere Gleichung, aus welcher die Normalreaction  $R$  abgeleitet werden kann. Multiplicirt man diesen Werth von  $R$  mit  $1 + e$ , wobei  $e$  die ihm in § 179 gegebene Bedeutung hat, so erhält man den vollständigen Werth von  $R$  für den ganzen Zusammenstoss. Substituirt man den letzteren in die zwölf Bewegungsgleichungen (1) und (2), (3) und (4), so findet man die Bewegung der beiden Körper grade nach ihrem Zusammenstoss.

§ 319. *Rauhe elastische Körper.* Das Problem, die Bewegung zweier beliebiger rauher Körper nach ihrer Collision zu bestimmen, erfordert eine ziemlich lange analytische Behandlung und unterscheidet sich in einigen Punkten wesentlich von dem entsprechenden Problem in der Ebene. Wir wollen daher zuerst einen speciellen Fall untersuchen, welcher eine kurze Behandlung erlaubt und dann dieselben Principien auf das allgemeine Problem im Raum von drei Dimensionen anwenden.

§ 320. *Zwei rauhe Ellipsoide, die sich auf beliebige Art bewegen, stossen so wider einander, dass das Ende eines Hauptdurchmessers des einen das Ende eines Hauptdurchmessers des andern in einem Augenblick trifft, in welchem die drei Hauptdurchmesser des einen denen des andern parallel sind. Man finde die Bewegung grade nach dem Stoss.*

Wir wollen die Bewegung auf Coordinatenaxen beziehen, die den Hauptdurchmessern eines jeden Ellipsoids beim Beginn des Zusammenstosses parallel sind. Da nun die Dauer des Zusammenstosses unendlich kurz ist, die Geschwindigkeiten dagegen endlich sind, so haben die Körper keine Zeit, ihre Lage zu ändern, die Hauptdurchmesser bleiben daher während des Zusammenstosses den Coordinatenaxen parallel.

$U, V, W$  seien die Componenten der Geschwindigkeit des Schwerpunktes des einen Körpers grade vor dem Stoss;  $u, v, w$  die Componenten der Geschwindigkeit zu einer beliebigen Zeit  $t$  nach dem Beginn, aber vor Beendigung des Zusammenstosses.  $\Omega_x, \Omega_y, \Omega_z$  seien die Winkelgeschwindigkeiten des Körpers um seine Hauptdurchmesser für den Schwerpunkt grade vor dem Stoss;  $\omega_x, \omega_y, \omega_z$  zur Zeit  $t$ .  $a, b, c$  seien die Halbaxen des Ellipsoids;  $A, B, C$  die Trägheitsmomente für den Schwerpunkt und diese Axen.  $M$  sei die Masse des Körpers. Die Buchstaben mit einem Strich mögen dieselben Grössen für den andern Körper bezeichnen und die Körper mit den Enden der Axen  $c, c'$  aufeinander treffen.

$P, Q, R$  seien die Componenten parallel den Axen der in dem Körper  $M$  durch den Stoss während der Zeit  $t$  erzeugten Bewegungsgrösse. Dann sind  $-P, -Q, -R$  die Componenten der in dem andern Körper in derselben Zeit erzeugten Bewegungsgrösse.

Die Bewegungsgleichungen des Körpers  $M$  sind

$$\left. \begin{aligned} A(\omega_x - \Omega_x) &= Qc \\ B(\omega_y - \Omega_y) &= -Pc \\ C(\omega_z - \Omega_z) &= 0 \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (1),$$

$$\left. \begin{aligned} M(u - U) &= P \\ M(v - V) &= Q \\ M(w - W) &= R \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (2).$$

Sechs entsprechende Gleichungen bestehen für den andern Körper. Man erhält sie, wenn man alle Buchstaben auf der linken Seite der vorstehenden Gleichungen mit einem Strich versieht und statt  $P, Q, R, c$  auf der rechten  $-P, -Q, -R, -c$  schreibt. Diese neuen Gleichungen mögen mit (3) und (4) bezeichnet werden.

$S$  sei die Geschwindigkeit, mit welcher das eine Ellipsoid auf dem andern gleitet und  $\theta$  der Winkel, den die Richtung des Gleitens mit der  $x$ -Axe macht; man hat dann, wie in § 192

$$S \cos \theta = u' + c' \omega_y' - u + c \omega_y \dots \dots \dots (5),$$

$$S \sin \theta = v' - c' \omega_x' - v - c \omega_x \dots \dots \dots (6)$$

und, wenn  $C$  die relative Compressionsgeschwindigkeit ist,

$$C = w' - w \dots \dots \dots (7).$$

Substituirt man in diese Gleichungen aus den dynamischen, so folgt weiter

$$S \cos \theta = S_0 \cos \theta_0 - pP \dots \dots \dots (8),$$

$$S \sin \theta = S_0 \sin \theta_0 - qQ \dots \dots \dots (9),$$

$$C = C_0 - rR \dots \dots \dots (10),$$

worin

$$\left. \begin{aligned} S_0 \cos \theta_0 &= U' + c' \Omega_y' - U + c \Omega_y \\ S_0 \sin \theta_0 &= V' - c' \Omega_x' - V - c \Omega_x \\ C_0 &= W' - W \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (11),$$

$$\left. \begin{aligned} p &= \frac{1}{M} + \frac{1}{M'} + \frac{c^2}{B} + \frac{c'^2}{B'} \\ q &= \frac{1}{M} + \frac{1}{M'} + \frac{c^2}{A} + \frac{c'^2}{A'} \\ r &= \frac{1}{M} + \frac{1}{M'} \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (12).$$

Es sind dies die Constanten des Zusammenstosses.  $S_0, C_0$  sind die Anfangsgeschwindigkeiten des Gleitens und der Compression und  $\theta_0$  der Winkel, den die Richtung des anfänglichen Gleitens mit der  $x$ -Axe macht. Als Normalfall wollen wir den betrachten, in welchem der Körper  $M'$  so auf  $M$  gleitet und ihn so zusammendrückt, dass sowohl  $S_0$  als  $C_0$  positiv sind. Die drei andern Constanten  $p, q, r$  sind von der Anfangsbewegung unabhängig und ihrem Wesen nach positive Grössen.

§ 321. Genau wie in dem entsprechenden Problem für die Ebene wollen wir die graphische Methode anwenden, um die Aenderungen die in der Reibung vorkommen, zu verfolgen. Man trage auf der  $x$ -,  $y$ -,  $z$ -Axe drei Längen  $OP$ ,  $OQ$ ,  $OR$  ab, welche die drei Reactionen  $P$ ,  $Q$ ,  $R$  darstellen sollen. Betrachtet man sie als die Coordinaten eines Punktes  $T$ , so stellt die Bewegung von  $T$  den Wechsel in den Kräften dar. Es wird gut sein, die durch  $S=0$ ,  $C=0$  gegebenen Orte aufzuzeichnen. Der Ort für  $S=0$  ist eine der  $R$ -Axe parallele Gerade, welche man *die Linie keines Gleitens* nennen kann, der für  $C=0$  eine der Ebene  $POQ$  parallele Ebene, welche *die Ebene stärksten Compression* heissen mag. Beim Beginn des Zusammenstosses gleitet ein Ellipsoid auf dem andern so, dass nach § 154 die zur Wirkung kommende Reibung ihren Grenzwert hat. Da  $P$ ,  $Q$ ,  $R$  die ganzen Componenten der in der Zeit  $t$  erzeugten Bewegungsgrösse sind, so stellen  $dP$ ,  $dQ$ ,  $dR$  die Componenten der in der Zeit  $dt$  erzeugten Bewegungsgrösse dar, wovon die beiden ersten von dem Reibungs-, die letzten von dem Normalstoss herrühren. Die Richtung der Resultanten von  $dP$ ,  $dQ$  muss daher der Richtung, in welcher der eine Berührungspunkt über den andern gleitet, entgegengesetzt sein, und die Grösse der Resultanten muss  $\mu dR$  sein, wenn man unter  $\mu$  den Reibungscoefficienten versteht. Man hat daher

$$\frac{dP}{dQ} = \cotg \theta = \frac{S_0 \cos \theta_0 - pP}{S_0 \sin \theta_0 - qQ} \quad . \quad . \quad . \quad (13)$$

$$(dP)^2 + (dQ)^2 = \mu^2 (dR)^2 \quad . \quad . \quad . \quad (14)$$

Durch die Auflösung dieser Gleichungen findet man die Art, wie der darstellende Punkt  $T$  sich der Linie keines Gleitens nähert.

Die Gleichung (13) lässt sich durch Trennung der Variablen auflösen. Man erhält

$$(S_0 \cos \theta_0 - pP)^{\frac{1}{p}} = \alpha (S_0 \sin \theta_0 - qQ)^{\frac{1}{q}},$$

worin  $\alpha$  eine willkürliche Constante ist. Im Anfang der Bewegung sind  $P$  und  $Q$  Null, daher ist

$$\left( \frac{S_0 \cos \theta_0 - pP}{S_0 \cos \theta_0} \right)^{\frac{1}{p}} = \left( \frac{S_0 \sin \theta_0 - qQ}{S_0 \sin \theta_0} \right)^{\frac{1}{q}} \quad . \quad . \quad . \quad (15)$$

wofür man auch schreiben kann

$$\left( \frac{S \cos \theta}{S_0 \cos \theta_0} \right)^{\frac{1}{p}} = \left( \frac{S \sin \theta}{S_0 \sin \theta_0} \right)^{\frac{1}{q}} \quad . \quad . \quad . \quad (16)$$

oder

$$S = S_0 \left( \frac{\sin \theta}{\sin \theta_0} \right)^{\frac{p}{q-p}} \cdot \left( \frac{\cos \theta_0}{\cos \theta} \right)^{\frac{q}{q-p}} \quad . \quad . \quad . \quad (17)$$

Diese Gleichung gibt die Beziehung zwischen der Richtung und der Geschwindigkeit des Gleitens an.



§ 322. Aendert sich die Richtung des Gleitens während des Zusammenstosses nicht, so muss  $\theta$  constant und  $\theta_0$  gleich sein.

Aus (16) ist ersichtlich, dass für  $p = q$ ,  $\theta = \theta_0$  und umgekehrt für  $\theta = \theta_0$ ,  $S$  constant ist, wofern nicht  $p = q$  ist. Ferner muss, wenn  $\sin \theta_0$  oder  $\cos \theta_0$  Null ist,  $S$  Null oder unendlich gross sein, wofern nicht  $\theta = \theta_0$  ist. *Die nothwendige und ausreichende Bedingung dafür, dass sich die Richtung der Reibung während des Zusammenstosses nicht ändert, ist daher  $p = q$  oder  $\sin 2\theta_0 = 0$ .* Aus der ersten dieser beiden Bedingungen und (12) ergibt sich

$$c^2 \left( \frac{1}{A} - \frac{1}{B} \right) + c'^2 \left( \frac{1}{A'} - \frac{1}{B'} \right) = 0 \quad . \quad . \quad . \quad (18).$$

Gilt diese Bedingung, so folgt aus (13),  $P = Q \cotg \theta_0$  und dann aus (14)

$$\left. \begin{aligned} P &= \mu R \cos \theta_0 \\ Q &= \mu R \sin \theta_0 \end{aligned} \right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (19).$$

Diese Gleichungen zeigen, dass der darstellende Punkt  $T$ , wenn die Reibung ihren Grenzwert hat, sich auf einer Geraden, die mit der  $R$ -Axe einen Winkel macht, dessen Tangente  $\mu$  ist, in solcher Richtung bewegt, dass er die Gerade keines Gleitens trifft.

§ 323. Gilt die Bedingung  $p = q$  nicht, so kann man durch Differentiation von (8) und (9) und Elimination von  $P$ ,  $Q$  und  $S$  die Bestimmung von  $R$  als Function von  $\theta$  auf ein Integral reduciren.

Substituirt man den Werth von  $S$  aus (17) in (8) und (9), so erhält man  $P$ ,  $Q$ ,  $R$  als Functionen von  $\theta$ . Es sind dies die Gleichungen für die Curve, auf welcher der darstellende Punkt  $T$  wandert. Passender noch kann man die Curve, auf der sich  $T$  bewegt, durch die Eigenschaft definiren, dass ihre Tangente nach (14) den constanten Winkel  $\text{arc tg } \mu$  mit der  $R$ -Axe macht und dass ihre Projection auf die  $PQ$ -Ebene durch (15) gegeben ist. Die Curve muss die Gerade keines Gleitens treffen, weil der Gleichung (15) durch  $pP = S_0 \cos \theta_0$ ,  $qQ = S_0 \sin \theta_0$  genügt wird.

§ 324. Der ganze Vorgang beim Zusammenstoss kann nun genau so verfolgt werden, wie bei dem entsprechenden Problem in der Ebene. *Der darstellende Punkt  $T$  wandert auf einer gewissen bekannten Curve, bis er die Linie keines Gleitens erreicht. Er geht dann auf der Linie keines Gleitens in solcher Richtung weiter, dass die Abscisse  $R$  wächst. Den vollständigen Werth  $R_2$  von  $R$  für den ganzen Zusammenstoss findet man durch Multiplication der Abscisse  $R_1$  des Punktes, in welchem  $T$  die Ebene der stärksten Compression kreuzt, mit  $1 + e$ , so dass also  $R_2 = R_1 (1 + e)$  ist, wenn man unter  $e$  das Maass der Elasticität der beiden Körper versteht. Die vollständigen Werthe der zur Wirkung kommenden Reibungen sind die Ordinaten der Lage von  $T$ , die der Abscisse  $R = R_2$  entspricht.*

232 *Capitel VII. Die Bewegungsgesetze.*  
 Setzt man sie in die dynamischen Gleichungen (1), (2), (3), (4) ein, so lässt sich die Bewegung der beiden Körper grade nach dem Zusammenstoss finden.

§ 325. Da die Linie keines Gleitens auf der  $PQ$ -Ebene senkrecht steht, so sind  $P$  und  $Q$  constant, wenn  $T$  auf dieser Linie wandert. Daher kommt, wenn einmal die gleitende Reibung aufgehört hat, keine weitere Reibung mehr zur Wirkung. Hört daher das Gleiten in irgend einem Moment vor der Beendigung des Zusammenstosses auf, wie z. B. wenn die Körper entweder sehr oder vollkommen rauh sind, so sind die ganzen Reibungsstösse durch

$$P = \frac{S_0 \cos \theta_0}{p}, \quad Q = \frac{S_0 \sin \theta_0}{q}$$

gegeben.

Wenn  $\sigma$  der Bogen der durch die Gleichung (15) gegebenen Curve vom Coordinatenanfang an bis zu dem Punkt ist, in welchem er die Linie keines Gleitens schneidet, dann trifft der darstellende Punkt  $T$  die Linie keines Gleitens in einem Punkt, dessen Abscisse  $R = \frac{\sigma}{\mu}$  ist. Sind die Körper so rauh, dass  $\frac{\sigma}{\mu} < \frac{C_0}{r}$  ist, so kreuzt der Punkt  $T$  die Ebene stärkster Compression erst, nachdem er die Linie keines Gleitens passiert hat. Der ganze Normalstoss ist daher durch  $R = \frac{C_0}{r} (1 + e)$  gegeben. Durch Substitution dieser Werthe von  $P$ ,  $Q$ ,  $R$  in die dynamischen Gleichungen findet man die Bewegung grade nach dem Stoss.

§ 326. Beisp. 1.  $\theta$  sei der Winkel, welchen die Richtung des Gleitens des einen Ellipsoids auf dem andern mit der  $x$ -Axe macht; man beweise, dass  $\theta$  während des Zusammenstosses entweder beständig zunimmt oder beständig abnimmt. Wenn ferner der Anfangswerth von  $\theta$  zwischen 0 und  $\frac{\pi}{2}$  liegt, dann nähert sich  $\theta$  entweder  $\frac{\pi}{2}$  oder 0, je nachdem  $p$  grösser oder kleiner als  $q$  ist. Man zeige auch, dass der darstellende Punkt die Linie keines Gleitens erreicht, wenn  $\theta$  einen dieser beiden Werthe hat.

Beisp. 2. Wenn das Gleiten während des Zusammenstosses dieselbe Richtung behält und vor der Beendigung des Zusammenstosses aufhört, dann müssen die Körper so rauh sein, dass  $\mu > \frac{S_0 r}{C_0 p (1 + e)}$  ist.

Beisp. 3. Zwei raue Kugeln stossen widereinander; man beweise, dass die Richtung des Gleitens während des Zusammenstosses dieselbe bleibt. Der Satz wurde zuerst von Coriolis aufgestellt. *Jeu de billard*, 1835. Siehe § 322.

Beisp. 4. Wenn zwei unelastische Rotationskörper widereinander stossen und dabei der Scheitel eines jeden der Berührungspunkt ist, zu beweisen, dass die Richtung des Gleitens während des Zusammenstosses dieselbe bleibt. Dieser und der nächste Satz rühren von Phillips her, 14. Band von Liouville's Journal.

Beisp. 5. Wenn zwei Körper, deren Hauptaxen für ihre Schwerpunkte parallel sind, sich so treffen, dass ihre Schwerpunkte in der gemeinschaftlichen

Normalen im Berührungspunkt liegen und wenn die Anfangsrichtung des Gleitens einer Hauptaxe für jeden der beiden Schwerpunkte parallel ist, dann behält das Gleiten während des Zusammenstosses dieselbe Richtung bei.

Beisp. 6. Zwei Ellipsoide von gleicher Masse stossen mit den Enden ihrer Axen  $a, c'$  widereinander und es ist  $aa' = bb', ca' = bc'$ ; man beweise, dass die Richtung der Reibung während des Stosses constant bleibt.

Beisp. 7. Eine Billardkugel rollt auf der Tafel ohne zu gleiten und stösst wider eine Bande; man finde die darauf folgende Bewegung.

Die Ebene der Bande und der Tafel seien die  $xy$ - bez.  $xz$ -Ebene. Die Componenten der Anfangsgeschwindigkeit des Schwerpunktes parallel zur  $x$ - und  $z$ -Axe seien  $-u$  und  $-w$  und die Winkelgeschwindigkeit um die Verticale  $n$ . Nach dem Abprall macht der Ball eine Reihe von sehr kleinen parabolischen Sprüngen, die kaum wahrnehmbar sind. Schliesslich kann man annehmen, der Ball rolle auf der Tafel. Diese Endbewegung ist durch

$$U' = -u + \frac{5}{7} \gamma (u + an),$$

$$W' = -w + \frac{5}{7} (1 + \gamma + e) w$$

gegeben, worin  $\gamma$  die kleinere von den beiden Grössen:  $\frac{2}{7}$  und  $\frac{\mu(1+e)w}{[w^2 + (u+an)^2]^{\frac{1}{2}}}$  ist.

§ 327. *Zwei raue Körper, die sich auf beliebige Art bewegen, stossen widereinander. Man finde die Bewegung grade nach dem Zusammenstoss.*

Wir wollen die Bewegung auf Coordinaten beziehen, deren  $x$ - und  $y$ -Axe in der Berührungsebene im Punkt des Zusammenstosses liegen und deren  $z$ -Axe die Normale ist.  $U, V, W$  seien die Componenten der Geschwindigkeit des Schwerpunktes des einen Körpers grade vor dem Zusammenstoss,  $u, v, w$  die Componenten der Geschwindigkeit zu einer beliebigen Zeit  $t$  nach dem Beginn, aber vor der Beendigung des Zusammenstosses.  $\Omega_x, \Omega_y, \Omega_z$  seien die Winkelgeschwindigkeiten desselben Körpers um den Coordinatenaxen parallele, durch seinen Schwerpunkt gehende Axen grade vor der Collision;  $\omega_x, \omega_y, \omega_z$  die Winkelgeschwindigkeiten zur Zeit  $t$ .  $A, B, C, D, E, F$  seien die Trägheits- und Deviationsmomente um Axen, die den Coordinatenaxen parallel durch den Schwerpunkt gehen.  $M$  sei die Masse des Körpers. Buchstaben mit einem Strich mögen dieselben Grössen für den andern Körper bezeichnen.

$P, Q, R$  seien die den Axen parallelen Componenten der in dem Körper  $M$  vom Beginn des Zusammenstosses bis zur Zeit  $t$  erzeugten Bewegungsgrösse. —  $P, -Q, -R$  sind dann die Componenten der in derselben Zeit in dem andern Körper erzeugten Bewegungsgrösse.

$(x, y, z), (x', y', z')$  seien die Coordinaten der Schwerpunkte der beiden Körper, auf den Berührungspunkt als Coordinatenanfang bezogen. Die Bewegungsgleichungen sind daher

$$\left. \begin{aligned} A(\omega_x - \Omega_x) - F(\omega_y - \Omega_y) - E(\omega_z - \Omega_z) &= -yR + zQ \\ -F(\omega_x - \Omega_x) + B(\omega_y - \Omega_y) - D(\omega_z - \Omega_z) &= -zP + xR \\ -E(\omega_x - \Omega_x) - D(\omega_y - \Omega_y) + C(\omega_z - \Omega_z) &= -xQ + yP \end{aligned} \right\} \quad (1),$$

$$\left. \begin{aligned} M(u - U) &= P \\ M(v - V) &= Q \\ M(w - W) &= R \end{aligned} \right\} \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad (2).$$

Sechs ähnliche Gleichungen bestehen für den andern Körper, die sich von den obigen nur dadurch unterscheiden, dass alle Buchstaben, mit Ausnahme von  $P, Q, R$ , mit einem Strich versehen sind und  $P, Q, R$  andere Vorzeichen haben. Sie sollen die Gleichungen (3) und (4) heissen.  $S$  sei die Geschwindigkeit, mit welcher der eine Körper auf dem andern gleitet und  $\theta$  der Winkel, den die Richtung des Gleitens mit der  $x$ -Axe macht.  $C$  sei ferner die relative Compressionsgeschwindigkeit. Es ist dann

$$\left. \begin{aligned} S \cos \theta &= u' - \omega_y' z' + \omega_z' y' - u + \omega_y z - \omega_z y \\ S \sin \theta &= v' - \omega_x' z' + \omega_z' x' - v + \omega_x z - \omega_z x \\ C &= w' - \omega_x' y' + \omega_y' x' - w + \omega_x y - \omega_y x \end{aligned} \right\} \quad \cdot \quad \cdot \quad (5)$$

und durch Substitution aus (1), (2), (3), (4) in (5) nach § 314

$$\left. \begin{aligned} S_0 \cos \theta - S \cos \theta &= aP + fQ + eR \\ S_0 \sin \theta - S \sin \theta &= fP + bQ + dR \\ C_0 - C &= eP + dQ + cR \end{aligned} \right\} \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad (6),$$

worin  $S_0, \theta_0, C_0$  die Anfangswerthe von  $S, \theta, C$  sind, die sich aus (5) ergeben, wenn man für die Buchstaben ihre Anfangswerthe setzt. Die Ausdrücke für  $a, b, c, d, e, f$  sind etwas complicirt, es ist jedoch nicht nöthig, sie zu berechnen.

§ 328. Wir können nun den ganzen Vorgang beim Zusammenstoss auf graphische Art verfolgen. Man trage vom Berührungspunkt  $O$  aus auf den Coordinatenaxen die drei Längen  $OP, OQ, OR$  ab, welche die drei Reactionen  $P, Q, R$  darstellen sollen. Wenn sie dann, wie früher, als die Coordinaten eines Punktes  $T$  angesehen werden, so stellt dessen Bewegung die Aenderung in den Kräften dar. Die Gleichungen der Linie keines Gleitens findet man dadurch, dass man in den beiden ersten Gleichungen (6)  $S = 0$  setzt. Wie man sieht, ist es eine Gerade.

Die Gleichung der Ebene der stärksten Compression ergibt sich aus der dritten Gleichung (6), indem man  $C = 0$  setzt.

Im Anfang des Zusammenstosses gleitet der eine Körper auf dem andern so, dass die zur Wirkung kommende Reibung ihren Grenz-

werth hat. Die Bahn des darstellenden Punktes von seinem Ausgangspunkt  $O$  aus ist, wie in § 321, durch

$$\frac{dP}{\cos \theta} = \frac{dQ}{\sin \theta} = \mu dR \quad . . . . . (7)$$

gegeben.

Wenn der darstellende Punkt  $T$  die Linie keines Gleitens erreicht, so hört für den Augenblick das Gleiten des einen Körpers auf dem andern auf. Es kommt dann nur so viel Reibung zur Wirkung, als hinreicht um Gleiten zu verhüten, vorausgesetzt, dass dieser Betrag geringer ist als der Grenzwert der Reibung. Wenn daher der Winkel, den die Linie keines Gleitens mit der  $R$ -Axe macht, kleiner als  $\arctg \mu$  ist, so bewegt sich der Punkt  $T$  auf ihr. Ist aber der Winkel grösser als  $\arctg \mu$ , so ist mehr Reibung nöthig, um Gleiten zu verhüten, als zur Wirkung gebracht werden kann. Demgemäss behält die Reibung ihren Grenzwert bei, aber ihre Richtung ändert sich, wenn  $S$  sein Vorzeichen wechselt. Der Punkt  $T$  wandert dann auf einer Curve, die durch die Gleichung (7) gegeben ist, wenn man  $\theta$  um  $\pi$  vergrössert. § 194.

Den vollständigen Werth  $R_2$  von  $R$  für den ganzen Zusammenstoss erhält man durch Multiplication der Abscisse  $R_1$  des Punktes, in welchem  $T$  die Ebene der stärksten Compression kreuzt, mit  $1 + e$ , wo  $e$  das Maass der Elasticität ist, so dass also  $R_2 = R_1(1 + e)$  ist. Die vollständigen Werthe von  $P$  und  $Q$  werden durch die der Abscisse  $R_2$  entsprechenden Ordinaten dargestellt. Durch Substitution in die dynamischen Gleichungen lässt sich die Bewegung grade nach dem Zusammenstoss finden.

§ 329. Die Bahn des darstellenden Punktes, bevor er die Linie keines Gleitens erreicht, wird durch Integration von (7) gefunden. Differenzirt man (6), so erhält man

$$\frac{d(S \cos \theta)}{d(S \sin \theta)} = \frac{a dP + f dQ + e dR}{f dP + b dQ + d dR} = \frac{a\mu \cos \theta + f\mu \sin \theta + e}{f\mu \cos \theta + b\mu \sin \theta + d} \quad . . (8),$$

welches sich auf

$$\frac{1}{S} \frac{dS}{d\theta} = \frac{\frac{a+b}{2} + \frac{a-b}{2} \cos 2\theta + f \sin 2\theta + \frac{e}{\mu} \cos \theta + \frac{d}{\mu} \sin \theta}{-\frac{a-b}{2} \sin 2\theta + f \cos 2\theta + \frac{d}{\mu} \cos \theta - \frac{e}{\mu} \sin \theta} \quad . . (9)$$

reducirt.

Aus dieser Gleichung ergibt sich  $S$  als Function von  $\theta$  in der Form  $S = Af(\theta)$ , worin die Constante  $A$  mit Hülfe der Bedingung bestimmt wird, dass für  $\theta = \theta_0$ ,  $S = S_0$  ist. Differenzirt man die erste der Gl. (6) und substituirt aus (7), so findet man

$$-A d[\cos \theta f(\theta)] = (\mu a \cos \theta + \mu f \sin \theta + e) dR \quad . . (10)$$

und daraus  $R = AF(\theta) + B$ , wobei die Constante  $B$  durch die Bedingung bestimmt ist, dass  $R$  für  $\theta = \theta_0$  verschwindet. Durch

Substitution dieser Werthe von  $S$  und  $R$  in die beiden ersten Gleichungen von (6) erhält man dann  $P$  und  $Q$  durch  $\theta$  ausgedrückt. Die drei Gleichungen, die  $P, Q, R$  als Functionen von  $\theta$  geben, sind die Gleichungen der Bahn des darstellenden Punktes. Man beachte, dass die Tangente an die Bahn in jedem Punkt mit der  $R$ -Axe einen Winkel macht, dessen Tangente  $\mu$  ist.

§ 330. Wenn sich die Richtung der Reibung während des Zusammenstosses nicht ändert, so ist  $\theta$  constant und gleich  $\theta_0$ , so dass man also  $\theta$  nicht zur unabhängigen Variablen wählen kann. In diesem Fall ist  $P = \mu R \cos \theta_0$ ,  $Q = \mu R \sin \theta_0$  und der darstellende Punkt bewegt sich auf einer Geraden, die mit der  $R$ -Axe einen Winkel macht, dessen Tangente  $\mu$  ist. Durch Substitution dieser Werthe von  $P$  und  $Q$  in die beiden ersten Gleichungen (6) erhält man

$$-\frac{a-b}{2} \sin 2\theta_0 + f \cos 2\theta_0 + \frac{d}{\mu} \cos \theta_0 - \frac{e}{\mu} \sin \theta_0 = 0 \quad (11)$$

als nothwendige Bedingung dafür, dass sich die Richtung der Reibung nicht ändert. Ist umgekehrt diese Bedingung erfüllt, so kann man den Gleichungen (6) und (7) dadurch genügen, dass man  $\theta$  constant macht. In diesem Fall ist auch leicht zu sehen, dass die Bahn des darstellenden Punktes die Linie keines Gleitens schneidet.

Ist  $S_0$  Null, so liegt der darstellende Punkt auf der Linie keines Gleitens. Ist der Winkel, den diese Gerade mit der  $R$ -Axe macht, kleiner als  $\arctg \mu$ , so wandert der darstellende Punkt auf ihr; ist er aber grösser, so ist mehr Reibung erforderlich um Gleiten zu verhüten, als zur Wirkung gebracht werden kann. Da  $S_0$  Null ist, so kennt man den Anfangswerth von  $\theta$  nicht. In diesem Fall differenzire man die ersten beiden Gleichungen von (6) und setze  $S = 0$ ; man sieht dann, wenn man dividirt, dass der Anfangswerth von  $\theta$  der Gleichung (11) genügen muss. Die Bedingung dafür, dass die Richtung der Reibung sich nicht ändert, ist daher erfüllt. Dieser Werth von  $\theta$  macht den zu integrierenden Ausdruck in (9) unendlich gross, in Folge dessen man die dortigen Folgerungen modificiren muss. Aus dem eben Gesagten geht aber hervor, dass die Bahn des darstellenden Punktes eine Gerade ist, die mit der  $R$ -Axe den Winkel  $\arctg \mu$  macht und den richtigen Anfangswerth von  $\theta$  hat.

§ 331. Es sei

$$G = \begin{vmatrix} A & -F & -E & yR - zQ \\ -F & B & -D & zP - xR \\ -E & -D & C & xQ - yP \\ yR - zQ & zP - xR & xQ - yP & 0 \end{vmatrix}$$

und  $\Delta$  die Determinante, welche man durch Weglassen der letzten Vertical- und Horizontalreihe erhält.  $G'$  und  $\Delta'$  seien die entsprechenden Ausdrücke für den



Ende ihrer grossen Axe, ihr Brennpunkt, bezüglich das Ende ihrer kleinen Axe festgehalten wird; man beweise, dass  $\frac{7}{\omega_1} = \frac{6}{\omega_2} + \frac{5}{\omega_3}$  ist. Siehe § 308.

5. Ein starrer Körper, der um den festen Punkt  $O$ , für welchen die Hauptträgheitsmomente  $A, B, C$  sind, beweglich ist, wird von einem Schlag von gegebener Grösse in einem gegebenen Punkt getroffen. Die dem Körper so mitgetheilte Winkelgeschwindigkeit sei die grösstmögliche; man beweise, dass, wenn  $(a, b, c)$  die Coordinaten des gegebenen Punktes auf die Hauptachsen für  $O$  bezogen und  $(l, m, n)$  die Richtungs cosinusse des Schlages sind,

$$al + bm + cn = 0,$$

$$\frac{a}{l} \left( \frac{1}{B^2} - \frac{1}{C^2} \right) + \frac{b}{m} \left( \frac{1}{C^2} - \frac{1}{A^2} \right) + \frac{c}{n} \left( \frac{1}{A^2} - \frac{1}{B^2} \right) = 0 \text{ ist.}$$

6. Eine dreieckige Lamelle  $ABC$  kann sich frei um ihren festliegenden Eckpunkt  $C$  bewegen. Ein Stoss trifft  $B$  senkrecht zur Ebene des Dreiecks. Man zeige, dass die Anfangsrotationsaxe von den durch  $C$  gehenden Geraden, welche  $AB$  in drei gleiche Theile zerlegen, die von  $B$  am weitesten abstehende ist.

Ersetzt man die Lamelle durch ihre drei gleichwerthigen Massenpunkte und setzt die Winkelbewegungsgrösse um  $BC$  gleich Null (§ 149), so haben offenbar die Massenpunkte in  $E$  und  $F$  (den Mittelpunkten von  $AC, AB$ ) gleiche und entgegengesetzte Anfangsgeschwindigkeiten. Daraus folgt, dass die Momentanaxe  $EF$  halbt und durch  $C$  geht. Betrachtet man die Axe als Transversale des Dreiecks, so folgt daraus, was zu beweisen war.

7. Ein Kegel, dessen Masse  $m$  und dessen Winkel an der Spitze  $2\alpha$  ist, kann sich um seine Axe frei bewegen. In seine Oberfläche ist eine feine glatte Rinne eingeschnitten, welche den constanten Winkel  $\beta$  mit seinen Erzeugenden bildet. Ein schwerer Punkt von der Masse  $P$  bewegt sich auf der Rinne unter dem Einfluss der Schwere und das System befindet sich im Anfang in Ruhe, wobei der Massenpunkt den Abstand  $c$  von der Spitze hat. Man zeige, dass

$$\frac{mk^2 + Pr^2 \sin^2 \alpha}{mk^2 + Pc^2 \sin^2 \alpha} = \varepsilon^2 \theta \sin \alpha \cotg \beta$$

ist, wenn  $\theta$  den Winkel bedeutet, um welchen der Kegel sich gedreht hat, wenn sich der Massenpunkt in irgend einem Abstand  $r$  von der Spitze befindet, und  $k$  der Trägheitsradius des Kegels für seine Axe ist.

8. Ein Körper befindet sich in Bewegung um eine durch seinen Schwerpunkt  $O$  gehende Axe; plötzlich wird der Punkt  $P$  in ihm festgehalten. Soll die neue Momentanaxe eine Hauptaxe für  $P$  sein, so ist der Ort der Punkte  $P$ , wie man zeigen möge, eine gleichseitige Hyperbel.

Grade ehe  $P$  festgehalten wird, ist die ganze Bewegungsgrösse einem Paar  $G$  äquivalent, das in der zur Momentanaxe conjugirten Diametralebene in Bezug auf das Trägheitsellipsoid für  $O$  liegt (§ 118 oder § 310). Wird  $P$  festgehalten, so kann man annehmen, der Körper befinde sich in Ruhe und das Paar  $G$  wirke auf ihn; er beginnt daher um die zur Ebene von  $G$  conjugirte Diametralinie in Bezug auf das Trägheitsellipsoid für  $P$  zu rotiren, siehe § 297. Nach dem Problem soll diese eine Hauptaxe sein; sie steht daher senkrecht auf der ihr conjugirten Diametralebene. Der Ort der Punkte  $P$  ist demnach derart, dass eine Hauptaxe für  $P$  einer festliegenden Geraden, nämlich dem Loth auf die Ebene von  $G$ , parallel ist. Nach § 51, Beisp. 4 ist der Ort eine gleichseitige Hyperbel.

9. Ein Würfel rotirt mit der Winkelgeschwindigkeit  $\omega$  um eine seiner Diagonalen; eine Kante, welche die Diagonale nicht trifft, wird plötzlich festgehalten. Man zeige, dass die Winkelgeschwindigkeit  $\omega'$  um diese Kante durch  $4\sqrt{3}\omega' = \omega$  gegeben ist.



Ebene in Bewegung befindlichen Massenpunkten greifen keine äusseren Kräfte an; man zeige, dass

$$\frac{d^2 A}{dt^2} = \frac{1}{2} a \left( \frac{1}{m} + \frac{1}{m'} \right) T$$

ist, wenn man unter  $A$  die Summe der absoluten in der Zeit  $t$  von den beiden nicht aufgewickelten Theilen des Fadens beschriebenen Flächen und unter  $T$  die Spannung des Fadens zu irgend einer Zeit versteht.

11. Ein Stück Draht in der Gestalt eines Kreises liegt in Ruhe so auf einem glatten horizontalen Tisch, dass seine Ebene in Berührung mit ihm ist. Plötzlich beginnt ein Insect mit gleichförmiger relativer Geschwindigkeit auf ihm zu wandern. Man zeige, dass sich der Draht um seinen Mittelpunkt mit gleichförmiger Winkelgeschwindigkeit dreht, während der Mittelpunkt selbst im Raum einen Kreis mit gleichförmiger Winkelgeschwindigkeit beschreibt.

12. Ein gleichförmiger Draht von der Gestalt eines Kreises mit dem Radius  $a$ , der um einen festen Punkt seines Umfanges beweglich ist, liegt auf einer glatten, horizontalen Ebene. Ein Insect, dessen Masse der des Drahtes gleich ist, kriecht von dem Ende des Durchmessers aus, welches dem festen Punkt gegenüber liegt, auf dem Draht hin, wobei seine relative Geschwindigkeit in Bezug auf den Draht gleichförmig und gleich  $V$  ist. Man beweise, dass nach der Zeit  $t$  der Draht sich um den Winkel

$$\frac{Vt}{2a} - \frac{1}{\sqrt{3}} \arctan \left( \frac{1}{\sqrt{3}} \tan \frac{Vt}{2a} \right)$$

gedreht hat.

13. Ein kleines Insect bewegt sich auf einem gleichförmigen Stab, der dieselbe Masse wie dieses selbst und die Länge  $2a$  hat und dessen Endpunkte gezwungen sind, auf dem Umfang eines festliegenden Kreises vom Radius  $\frac{2a}{\sqrt{3}}$  zu bleiben.

Man nehme an, das Insect gehe von dem Mittelpunkt des Stabes aus und seine relative Geschwindigkeit in Bezug auf den Stab sei gleichförmig und gleich  $V$  und beweise, dass sich der Stab in der Zeit  $t$  um den Winkel  $\theta$  dreht, der sich aus  $a \tan \theta \sqrt{3} = Vt$  ergibt.

14. Eine rauhe kreisförmige Scheibe kann sich frei in einer horizontalen Ebene um eine verticale durch ihr Centrum gehende Axe drehen. Eine logarithmische Spirale ist auf der Scheibe aufgezeichnet und hat das Centrum zum Pol. Ein Insect, dessen Masse  $n$  mal so gross als die der Scheibe ist, kriecht von dem Punkt aus, in welchem die Curve den Umfang des Kreises schneidet, auf ihr hin. Man zeige, dass sich die Scheibe, wenn das Insect den Mittelpunkt erreicht, um den Winkel  $\frac{1}{2} \tan \alpha \log(1 + 2n)$  gedreht hat, worin  $\alpha$  den Winkel zwischen der Tangente und dem Radiusvector an irgend einem Punkt der Spirale bedeutet.

15. In eine gleichförmige Scheibe von der Gestalt eines Kreises, die um ihren Mittelpunkt in ihrer eigenen Ebene (welche horizontal ist) sich bewegen kann, ist eine feine Rinne längs eines Radius eingeschnitten. Die Scheibe wird mit der Winkelgeschwindigkeit  $\omega$  in Rotation gesetzt. Eine kleine Rakete, deren Gewicht  $\frac{1}{n}$  desjenigen der Scheibe beträgt, wird in das innere Ende der Rinne gelegt und abgefeuert; wenn sie die Rinne verlassen hat, geschieht das Nämliche mit einer andern gleichen Rakete u. s. f. Man finde die Winkelgeschwindigkeit

nach  $n$  solchen Operationen und zeige, dass der Grenzwert derselben, wenn  $n$  unbegrenzt zunimmt,  $\omega e^{-2}$  ist.

16. Ein starrer Körper ist in Rotation um eine Axe durch seinen Schwerpunkt begriffen; plötzlich wird ein gewisser Punkt des Körpers festgehalten und gleichzeitig die Axe freigelassen. Man finde die Gleichungen der neuen Momentanaxe und beweise, dass der Punkt, wenn diese Axe der ursprünglich festliegende Axe parallel sein soll, in einer Linie liegen muss, die durch die Gleichungen

$$a^2lx + b^2my + c^2nz = 0,$$

$$(b^2 - c^2) \frac{x}{l} + (c^2 - a^2) \frac{y}{m} + (a^2 - b^2) \frac{z}{n} = 0$$

dargestellt wird. Dabei sind die Hauptaxen durch den Schwerpunkt die Coordinatenaxen,  $a, b, c$  die Trägheitsradien für diese Axen und  $l, m, n$  die Richtungscosinusse der ursprünglich festen Axe in Bezug auf sie. (§ 296.)

17. Ein fester Körper rotirt mit gleichförmiger Geschwindigkeit  $\omega$  um eine feste Axe und enthält einen geschlossenen röhrenförmigen Kanal von kleinem gleichförmigen Querschnitt, der mit einer nicht zusammendrückbaren Flüssigkeit, die sich in relativem Gleichgewicht befindet, gefüllt ist. Wenn die Rotation des massiven Körpers plötzlich aufhört, bewegt sich die Flüssigkeit in der Röhre mit der Geschwindigkeit  $v$ , die durch  $vl = 2A\omega$  gegeben ist. Dabei ist  $A$  die von der Projection der Axe der Röhre auf eine zur Rotationsaxe senkrechte Ebene beschriebene Fläche und  $l$  die Länge der Röhre.

Jedes Element von der Masse  $m ds$  bewegt sich mit der Geschwindigkeit  $\omega r$  in einer Richtung, die senkrecht auf der Ebene steht, die das Element und die Rotationsaxe enthält. Der Normaldruck der Röhre zerstört jede Bewegung, die senkrecht zur Röhre gerichtet ist, so dass wir nur die Componente  $\omega r \frac{r d\theta}{ds}$  zu betrachten brauchen (§ 307): Jedes Element stösst wider die anliegenden, die Translationsbewegungsgrösse bleibt durch diesen Stoss jedoch unverändert. Integriert man die Bewegungsgrösse längs der ganzen Röhre, so erhält man

$$mlv = \int m \omega r^2 d\theta,$$

woraus sich das Resultat ergibt.

18. Eine Thür ohne Schloss, welche die Gestalt einer rechteckigen Lamelle hat, ist an ihrem oberen Eckpunkt mit einem Universalgelenk versehen, während sich an ihrem unteren ein kurzer Querbalken befindet, der senkrecht zur Ebene der Thür gleichmässig nach beiden Seiten vorsteht. Wenn nun die Thür von ihrer stabilen Ruhelage aus nach der einen und der andern Seite schwingt, wird das eine oder das andere Ende des Balkens ein fester Punkt.  $h$  ist die Höhe der Thür,  $h \operatorname{tg} \alpha$  ihre Länge und  $2\beta$  der Winkel, den die Linien, welche die Enden des Balkens mit dem oberen Eckpunkt verbinden, miteinander bilden; man zeige, dass die Winkelgeschwindigkeit der Thür durch die Stösse bei ihrem

Durchgang durch ihre Ruhelage in dem Verhältniss  $\frac{\sin^2 \alpha - \operatorname{tg}^2 \beta}{\sin^2 \alpha + \operatorname{tg}^2 \beta}$  vermindert wird und dass die Zeit, welche zwischen zwei aufeinanderfolgenden Stössen verfliesst, wenn die Schwingungen klein werden, in demselben Verhältniss abnimmt, wobei die Gewichte des Balkens und des Gelenkes zu vernachlässigen sind.

## Kapitel VII.

### Die lebendige Kraft.

#### Die Kräftefunction und die Arbeit.

§ 332. **Zeit- und Raumintegrale.** Wenn ein Punkt von der Masse  $m$  in der Richtung der  $x$ -Axe mit der Anfangsgeschwindigkeit  $V$  geschleudert wird und eine Kraft  $F$  in derselben Richtung an ihm angreift, so ist die Bewegung durch die Gleichung  $m \frac{d^2x}{dt^2} = F$  gegeben.

Integrirt man sie in Bezug auf  $t$  und ist  $v$  die Geschwindigkeit nach der Zeit  $t$ , so hat man

$$m(v - V) = \int_0^t F dt.$$

Multiplicirt man beide Seiten der Differentialgleichung zweiter Ordnung mit  $\frac{dx}{dt}$  und integrirt, so erhält man<sup>1)</sup>

$$\frac{1}{2} m(v^2 - V^2) = \int_0^x F dx.$$

Das erste Integral zeigt, dass die Aenderung der Bewegungsgrösse dem Antrieb der Kraft gleich ist. Indem wir eine ähnliche Schluss-

---

1) Man wird selten Mathematiker in einen Streit verwickelt finden, wie der war, welcher 40 Jahre hindurch im vorigen Jahrhundert tobte. Es handelte sich darum, zu bestimmen, wie die Kraft eines sich bewegenden Körpers zu messen sei. Bis zum Jahr 1686 war das Maass das Product aus der Masse des Körpers in seine Geschwindigkeit. Leibnitz jedoch glaubte einen Irrthum in der allgemeinen Meinung zu entdecken und wollte zeigen, dass das richtige Maass das Product aus der Masse in das Quadrat der Geschwindigkeit sei. Bald war ganz Europa in zwei Lager getheilt. Deutschland hielt es mit Leibnitz und Bernoulli, während England dem alten Maass treu blieb und ihre Argumente mit Erfolg bestritt. Frankreich war getheilt; eine berühmte Dame, die Marquise du Chatelet war zuerst eine eifrige Anhängerin und dann eine Gegnerin der Leibnitz'schen Ansichten. Holland und Italien waren im Allgemeinen dem deutschen Philosophen günstig gesinnt. Das Seltsamste bei diesem grossen Streit aber war, dass dasselbe Problem, von den Geometern entgegengesetzter Meinung gelöst, dasselbe Resultat ergab; wie man auch die Kraft messen mochte mit der ersten oder der zweiten Potenz der Geschwindigkeit, die Antwort blieb die nämliche. Die Argumente und Erwiderungen, die von beiden Seiten vorgebracht

weise auf die Bewegung der dynamischen Systeme anwandten, kamen wir im letzten Kapitel zu dem allgemeinen Princip in § 283 und später zu seiner Anwendung auf die Bestimmung der Aenderungen welche sehr grosse Kräfte hervorbringen, die sehr kurze Zeit wirken. Das zweite Integral zeigt, dass die Aenderung der lebendigen Kraft dem Raumintegral der Kraft gleich ist. In diesem Kapitel ist es unsere Aufgabe, auch dieses Resultat auszudehnen und auf die allgemeine Bewegung der Systeme von Körpern anzuwenden.

§ 333. Die lebendige Kraft. Der bequemen Darstellung wegen hat man den beiden Seiten unsrer Gleichung Namen gegeben. Die linke Seite heisst gewöhnlich *die lebendige Kraft* des Massenpunktes eine Bezeichnung, die Leibnitz um das Jahr 1695 eingeführt hat. Die lebendige Kraft wird auch *die kinetische Energie* des Massenpunktes genannt. Die rechte Seite hat zu verschiedenen Zeiten verschiedene Namen geführt. Sie wird jetzt allgemein *die Arbeit der Kraft*  $F$  genannt. Wenn die Kraft nicht in der Richtung der Bewegung ihres Angriffspunktes wirkt, bedarf der Ausdruck „Arbeit“ einer umfassenderen Definition, die wir im nächsten Paragraphen besprechen.

§ 334. Die Arbeit. Eine Kraft  $F$  wirke an einem Punkt  $A$  eines Körpers in der Richtung  $AB$  und der Punkt  $A$  bewege sich in eine andere Lage  $A'$ , die sehr nahe bei  $A$  liegt. Wenn  $\varphi$  der Winkel ist, den die Richtung  $AB$  der Kraft mit der Richtung  $AA'$  der Verschiebung des Angriffspunktes macht, so heisst das Product  $F \cdot AA' \cdot \cos \varphi$  die von der Kraft verrichtete Arbeit. Wenn wir an die Stelle von  $\varphi$  den Winkel setzen, den die Richtung  $AB$  der Kraft mit der der Verschiebung entgegengesetzten Richtung  $A'A$  macht, so heisst das Pro-

wurden, findet man in Montucla's *Histoire*; sie sind von grossem Interesse. Hier jedoch würde dies zu weit führen. Der Kampf nahm schliesslich ein Ende als D'Alembert in seiner Abhandlung über Dynamik zeigte, dass es sich nur um einen Wortstreit handelte. Er sagt: Wenn wir von der Kraft eines in Bewegung befindlichen Körpers sprechen, so verbinden wir mit dem Wort entweder keinen klaren Sinn oder wir verstehen darunter weiter nichts als die Eigenschaft, dass gewisse Widerstände von dem sich bewegenden Körper überwunden werden können. Wir müssen daher diese Kraft nicht einfach nur nach der Masse und Geschwindigkeit des Körpers schätzen, sondern nach der Beschaffenheit der überwältigten Hindernisse. Wir können sagen, dass die Kraft um so grösser ist, je grösser der überwundene Widerstand ist, wenn wir unter diesem Wort nicht ein dem Körper anhaftendes angebliches Leben verstehen, sondern es einfach nur als eine abgekürzte Art betrachten, eine Thatsache auszudrücken. D'Alembert weist dann darauf hin, dass es verschiedene Arten von Hindernissen gibt und untersucht, wie sich ihre verschiedenen Arten von Widerständen als Maass benützen lassen. Es reicht wohl hin, wenn wir bemerken, dass der Widerstand in manchen Fällen besser durch das Raumintegral, die Arbeit, in anderen besser durch das Zeitintegral, den Antrieb, gemessen wird. Siehe Montucla's *Histoire* Vol. III und Whewell's *History*, Vol. II.

dukt die gegen die Kraft verrichtete Arbeit. Fällt man das Loth  $AM$  auf  $AB$ , so ist die von der Kraft verrichtete Arbeit auch dem Product  $F \cdot AM$  gleich, worin  $AM$  als positiv angesehen wird, wenn es in die Richtung der Kraft fällt. Ist  $F''$  die Componente von  $F$  in der Richtung der Verschiebung, so ist die Arbeit auch gleich  $F'' \cdot AA'$ . Wirken mehrere Kräfte, so kann man auf diese Art die Arbeit jeder einzelnen finden. Die Summe aller ist die Arbeit des ganzen Kräftesystems.

So definirt ist die einer unbegrenzt kleinen Verschiebung entsprechende Arbeit einer Kraft dasselbe, wie das virtuelle Moment der Kraft. In der Statik haben wir es nur mit den kleinen hypothetischen Verschiebungen zu thun, die dem System bei der Anwendung des Principes der virtuellen Arbeit gegeben werden und reicht diese Definition daher hin. In der Dynamik dagegen sind die Körper in Bewegung, und wir müssen mithin unsere Definition der Arbeit so ausdehnen, dass auch der Fall einer Verschiebung von beliebiger Grösse einbegriffen ist. Wenn die Angriffspunkte der Kräfte endliche Verschiebungen erleiden, müssen wir die Bahn eines jeden in Elemente zerlegen. Die an jedem Element verrichtete Arbeit lässt sich nach der obigen Definition ermitteln. Die Summe aller ist die ganze Arbeit.

Man beachte, dass die Arbeit gegebener Kräfte bei der Bewegung des Körpers von einer Lage in eine andere von der Zeit des Ueberganges unabhängig ist. Wie in § 332 festgestellt wurde, ist die Arbeit ein Raum- und kein Zeitintegral.

§ 335. *Wenn zwei Kräftesysteme äquivalent sind, so ist die bei einer kleinen Verschiebung von dem einen verrichtete Arbeit der von dem andern verrichteten gleich.* Dies folgt sofort aus dem Princip der virtuellen Arbeit in der Statik. Denn wenn jede Kraft in dem einen System die umgekehrte Richtung erhält, ohne dass ihr Angriffspunkt oder ihre Grösse geändert wird, so halten sich die beiden Systeme Gleichgewicht und die Summe ihrer virtuellen Momente ist daher Null. Bringt man das Kräftesystem in seinen ursprünglichen Zustand zurück, so müssen, wie man sieht, die virtuellen Momente der beiden Systeme gleich sein. Sind die Verschiebungen endlich, so gilt dasselbe für alle aufeinander folgenden Elemente der Verschiebung und daher für die ganze Verschiebung.

§ 336. Wir können jetzt einen analytischen Ausdruck für die Arbeit der Kräftesysteme finden.  $(x, y, z)$  seien die rechtwinkligen Coordinaten eines Massenpunktes des Systems und die Masse des Punktes sei  $m$ .  $(X, Y, Z)$  seien die Componenten parallel den Coordinatenachsen der an dem Massenpunkt angreifenden beschleunigenden Kräfte.  $mX, mY, mZ$  sind dann die dynamischen Maasse der wirkenden Kräfte. Wir wollen annehmen, der Massenpunkt bewege sich in die

Lage  $x + dx$ ,  $y + dy$ ,  $z + dz$ , dann ist die Arbeit der Kräfte der Definition zufolge

$$\Sigma(mX dx + mY dy + mZ dz) \dots \dots \dots (1),$$

wobei sich die Summe über alle Kräfte des Systems erstreckt. Sind die Verschiebungen der Körper endlich, so ist die ganze Arbeit

$$\Sigma m \int (X dx + Y dy + Z dz) \dots \dots \dots (2),$$

worin die Grenzen des Integrals durch die äussersten Lagen des Systems bestimmt werden.

§ 337. **Die Kräftefunction.** Wenn die Kräfte derart sind, wie sie allgemein in der Natur auftreten, so lässt sich beweisen, dass die Summe (1) in dem vorigen Paragraphen ein vollständiges Differential ist, d. h. dass man sie unabhängig von jeder Beziehung zwischen den Coordinaten  $x$ ,  $y$ ,  $z$  integriren kann. Die Summe (2) lässt sich daher als eine Function der Coordinaten des Systems ausdrücken. *Ist dies der Fall, so heisst das unbestimmte Integral der Summe (2) die Kräftefunction.* Der Name wurde der Function von Sir W. R. Hamilton und Jacobi unabhängig von einander gegeben.

Nennt man die Kräftefunction  $U$ , so ist die Arbeit der Kräfte bei der Bewegung der Körper von einer gegebenen Lage in eine andere das bestimmte Integral  $U_2 - U_1$ , worin  $U_1$  und  $U_2$  die Werthe von  $U$  sind, welche den gegebenen beiden Lagen der Körper entsprechen. Daraus folgt, dass die Arbeit von der Art, wie das System sich aus der ersten gegebenen Lage in die zweite bewegt, unabhängig ist. *Mit andern Worten, die Arbeit hängt von den Coordinaten der beiden gegebenen äussersten Lagen und nicht von denen einer mittleren Lage ab.* Wenn die Kräfte derart sind, dass sie diese Eigenschaft haben, d. h. wenn sie eine Kräftefunction besitzen, hat man sie nach dem Vorgang von Sir W. Thomson, jetzt Lord Kelvin, auch wohl ein *conservatives Kräftesystem* genannt.

§ 338. *Eine Kräftefunction existirt erstens, wenn die äusseren Kräfte nach festen Centren in endlichen Abständen gerichtet und Functionen der Abstände von diesen Centren sind und zweitens, wenn die Kräfte gegenseitige Anziehungen oder Abstossungen der Massenpunkte des Systems und Functionen der Abstände zwischen den sich anziehenden oder abstossenden Massenpunkten sind.*

$m\phi(r)$  sei die Wirkung eines festliegenden Kraftcentrums auf einen Massenpunkt  $m$  in der Entfernung  $r$ , die positiv gerechnet wird in der Richtung von  $r$ , d. h. von dem Kraftcentrum weg. Die Summe (1) in § 336 ist offenbar  $\Sigma m\phi(r) dr$ . Sie ist ein vollständiges Differential. Die Kräftefunction existirt daher und ist gleich  $\Sigma m \int \phi(r) dr$ .

deren Abstand  $r$  ist und wie zuvor möge diese Kraft positiv genommen werden, wenn sie abstösst. Die Summe (1) wird dann  $\Sigma m' \varphi(r) dr$ . Die Kräftefunction existirt mithin und ist gleich  $\Sigma m' \int \varphi(r) dr$ .

Ist die Anziehung dem reciproken Quadrat des Abstandes proportional, so wird  $\varphi(r) = -\frac{1}{r^2}$  und das Integral  $\frac{1}{r}$ . Die Kräftefunction unterscheidet sich also von dem Potential durch eine constante Grösse.

§ 339. Offenbar enthält die Definition der Kräftefunction Nichts, was uns dazu zwänge, Cartesische Coordinaten zu gebrauchen. Wenn  $P, Q$ , etc. Kräfte sind, die an einem Massenpunkt angreifen,  $Pdp, Qdq$ , etc. ihre virtuellen Momente,  $m$  die Masse des Punktes, dann ist die Kräftefunction

$$U = \Sigma m \int (Pdp + Qdq + \text{etc.}),$$

wobei sich die Summirung über alle Kräfte des Systems erstreckt.

Beisp. 1. Sind  $(\varrho, \varphi, z)$  die Cylinder- oder halbpolaren Coordinaten des Massenpunktes  $m$ ;  $P, Q, Z$  die Componenten der Kräfte in der Richtung und senkrecht zu  $\varrho$  und in der Richtung von  $z$ , zu beweisen, dass

$$dU = \Sigma m (P d\varrho + Q \varrho d\varphi + Z dz) \text{ ist.}$$

Beisp. 2.  $(r, \theta, \varphi)$  seien die Polarcoordinaten des Massenpunktes  $m$ ;  $P, Q, R$  die Componenten der Kräfte längs des Radiusvectors, senkrecht zu ihm in der Ebene von  $\theta$  und senkrecht zu dieser Ebene; man beweise, dass

$$dU = \Sigma m (P dr + Q r d\theta + R r \sin \theta d\varphi)$$

ist.

Beisp. 3.  $(x, y, z)$  seien die schiefwinkligen Cartesischen Coordinaten von  $m$ ;  $X, Y, Z$  die Componenten längs der Axen; man beweise, dass

$$dU = \Sigma m [X(dx + \nu dy + \mu dz) + Y(\nu dx + dy + \lambda dz) + Z(\mu dx + \lambda dy + dz)]$$

ist, wo  $(\lambda, \mu, \nu)$  die Cosinuse der Winkel zwischen den Axen  $yz, zx$  bez.  $xy$  bedeuten. Der Satz ist von Poinsot.

§ 340. Wenn ein System eine kleine Verschiebung  $ds$  parallel einer gegebenen Geraden und eine Drehung  $d\theta$  um diese Linie erleidet, stellen die partiellen Differentialquotienten  $\frac{\partial U}{\partial s}$  und  $\frac{\partial U}{\partial \theta}$  die Componenten aller Kräfte in der Richtung der Linie und das Moment der Kräfte um sie dar.

Da  $dU$  die Summe der virtuellen Momente aller Kräfte in Bezug auf eine beliebige Verrückung ist, so hängt es von irgend welchen speciellen Coordinatenaxen nicht ab. Die Gerade, auf welcher  $ds$  gemessen wird, sei die  $z$ -Axe. Behält man die frühere Bezeichnung bei, so ist

$$dU = \Sigma m (X dx + Y dy + Z dz).$$

Es ist aber  $dx = 0$ ,  $dy = 0$  und  $dz = ds$ , daher

$$\partial U = ds \cdot \Sigma m Z, \text{ also } \frac{\partial U}{\partial s} = \Sigma m Z.$$

Darin bedeutet  $\partial U$  die Veränderung von  $U$ , die durch die alleinige Verschiebung des als ein Körper betrachteten Systems um die Strecke  $ds$  parallel einer gegebenen Geraden hervorgebracht wird.

Das Moment aller Kräfte um die  $z$ -Axe ist ferner  $\Sigma m (xY - yX)$  aber  $dx = -y d\theta$ ,  $dy = x d\theta$  und  $dz = 0$ . Daher wird dieses Moment

$$= \Sigma m \frac{Y dy + X dx + Z dz}{d\theta} = \frac{\partial U}{\partial \theta}.$$

Hier wird  $\partial U$  als die Aenderung angesehen, die an  $U$  durch die alleinige Rotation von der Amplitude  $d\theta$  des als ein Körper betrachteten Systems um die gegebene Axe hervorgebracht wird. (§ 342—349.)

§ 341. Da die Kräftefunction viel gebraucht werden wird, so ist es vortheilhaft, sich Fertigkeit in dem Niederschreiben ihrer verschiedenen Formen zu erwerben. Die folgenden Beispiele sind als die zu diesem Zweck geeignetsten ausgewählt worden.

§ 342. **Die Arbeit der Schwere.** *Ein System von Körpern steht unter der Wirkung der Schwere. Ist  $M$  die ganze Masse,  $h$  die von dem Schwerpunkt des ganzen Systems durchfallene Strecke, so ist  $Mgh$  die von der Schwere verrichtete Arbeit.* Siehe § 140.

Die  $z$ -Axe sei vertical und ihre positive Richtung gehe abwärts. In der Summe (1) des § 336 ist dann  $X = 0$ ,  $Y = 0$ ,  $Z = g$ . Daher  $dU = \Sigma mg dz$ . Bedeutet  $\bar{z}$  die Tiefe des Schwerpunktes unter der  $xy$ -Ebene und  $C$  eine Constante, so findet man  $U = Mg\bar{z} + C$  und wenn man die Grenzen nimmt, ohne Mühe die gesuchte Antwort.

**Arbeitseinheiten.** Die theoretische Einheit der Arbeit ist die von der dynamischen Krafteinheit längs der Raumeinheit verrichtete Arbeit. Eine praktische Einheit kann das Resultat unseres Beispiels liefern. Man kann die Arbeit, welche dazu nöthig ist, den Schwerpunkt einer gegebenen Masse an einer gegebenen Stelle auf eine gegebene Höhe zu heben, zur Arbeitseinheit nehmen. Als Krafteinheit wird das Gewicht eines Cubikdecimeters chemisch reinen Wassers im Zustand der grössten Dichtigkeit ( $4^{\circ},1$  C.) benutzt; sie heisst Kilogramm. Die Längeneinheit ist das Meter und die Arbeitseinheit daher das Meterkilogramm. Der Ausdruck Pferdekraft bezeichnet die in der Zeiteinheit geleistete Arbeit. Die Einheit der Pferdekraft nimmt man zu 75 Meterkilogrammen in der Secunde an. Die Nutzleistung einer Dampfmaschine ist die durch den Verbrauch eines Kilogramms Kohlen geleistete thatsächliche Arbeit.

Beisp. 1. Eine Kraft theilt einem Punkt, dessen Masse so gross, wie die eines Kubikmeters Wasser ist, eine Geschwindigkeit von einem Meter in der Minute mit. Man finde die Arbeit in Meterkilogrammen und Pferdekraften.



(à 1000 kg), wenn 2000 effective Pferdekkräfte erforderlich sind, ihn  $17\frac{1}{4}$  Knoten (à 1850 m) oder 32 Kilometer in der Stunde vorwärts zu bewegen.

[Londoner Universität, 1886.]

Beisp. 3. Ein Radfahrer auf einem Dreirad, der 90 kg mit Einschluss des Rades wiegt, fährt mit der gleichförmigen Geschwindigkeit von 13 Kilometern in der Stunde eine Strasse hinab, die eine Neigung von 1 : 100 hat, muss dabei den Widerstand der Luft und Strasse überwinden und gebraucht die Pedale nicht. Man beweise, dass er, um eine Steigung von 1 : 200 mit derselben Geschwindigkeit hinaufzukommen, an den Pedalen mit etwa 0,064 Pferdekkräften arbeiten muss und dass der mittlere Druck auf jedes Pedal dann etwa 5,748 kg beträgt, wenn man annimmt, dass die Kurbeln 12,7 cm lang sind und 100 Umdrehungen in der Minute machen.

[Londoner Universität, 1886.]

Beisp. 4. Man beweise, dass der Betrag an Arbeit, der dazu erforderlich ist, den homogenen Inhalt einer sehr kleinen konischen Höhlung, deren Spitze im Erdmittelpunkt liegt, auf die Oberfläche der Erde zu heben, der Arbeit gleich ist, die dazu nöthig ist, die ganze Masse des Inhalts von der Oberfläche aus um eine Strecke in die Höhe zu heben, die einem Fünftel des Erdradius gleichkommt, vorausgesetzt, dass die Schwerkraft als constant angesehen wird. [Coll. Exam.]

§ 343. Die Arbeit eines elastischen Fadens. Beisp. Wenn die Länge eines elastischen Fadens oder Stabes, *der gleichmässig ausgedehnt ist*, sich ändert, *so ist die durch die Spannung verrichtete Arbeit das Product aus der Compression der Länge und dem arithmetischen Mittel der Anfangs- und Endspannung.*

Die Länge ändere sich von  $r$  auf  $r'$ .  $q$  sei eine Länge, die zwischen beiden liegt,  $l$  die Länge des unausgedehnten Fadens und  $E$  die Elasticitätsconstante. Die Spannung ist  $T = E \frac{q - l}{l}$  und wirkt entgegengesetzt zu der Richtung, in welcher  $q$  gerechnet wird. Die Arbeit, welche verrichtet wird, während sich  $q$  auf  $q + dq$  ausdehnt, ist daher  $-Tdq$ . Integriert man von  $q = r$  bis  $q = r'$ , so findet man die erforderliche Arbeit  $= -\frac{E}{2l} [r' - l]^2 - (r - l)^2$ , woraus sich das gesuchte Resultat ohne Weiteres ergibt.

Wenn der Faden schlaff wird, so verschwindet die Spannung und keine Arbeit wird verrichtet, ehe nicht der Faden wieder straff wird. *Wendet man nun unsere Regel an, so ist die Compression der Unterschied zwischen den beiden Endlängen, wenn der Faden in beiden straff ist*, ohne Rücksicht darauf, ob er während der verschiedenen Aenderungen der Länge, die bei dem Vorgang vorgekommen sein mögen, zeitweise schlaff gewesen ist oder nicht. Ist der Faden in einem der beiden Endzustände schlaff, so muss man bei der Berechnung der Compression annehmen, der Faden habe in ihm seine Länge in unausgedehntem Zustand.

Handelt es sich um einen Stab, so wird die Spannung negativ, wenn der Stab zusammengedrückt wird und die Regel ist gültig, so lange der Stab grad bleibt und man annehmen kann, dass das Hooke'sche Gesetz gelte. (Die Verkürzung soll dem Druck proportional sein.)

Auch wenn der Faden nicht grade, sondern gleichmässig über eine Fläche oder in einer dünnen Röhre gespannt ist, ermittelt man die Arbeit auf dieselbe Art. Um dies zu beweisen, theile man den Faden in Elemente, von denen jedes als grade betrachtet werden kann. Ist nun der ganze Faden gleichförmig ausgedehnt, so ist die verrichtete Arbeit das Mittel der Spannungen mit der Summe der Contractionen aller Elemente multiplicirt. Die letztere ist aber offenbar die Contraction des ganzen Fadens.

Wenn die Fläche festliegt, so kann sich der Faden nicht zusammenziehen ohne dass sich wenigstens ein Ende bewegt; die Arbeit wird alsdann an diesem Ende verrichtet.

Bewegt sich die Fläche und liegen die Enden des Fadens im Raum fest, so wird die Arbeit mittelst der Reactionen auf die Fläche übertragen. Hat der Faden keine Effectivkräfte, so sind diese Reactionen an den Punkten  $A, B$ , an welchen der Faden die Fläche verlässt, mit den Spannungen im Gleichgewicht. Die Fläche möge nun eine kleine Verrückung erfahren. Nach dem Princip der virtuellen Arbeit ist dann die von den Reactionen auf der Fläche verrichtete Arbeit der von den beiden gleichen Spannungen an den Punkten  $A$  und  $B$  verrichteten gleich. Diese Arbeit ist aber das Product aus der momentanen Spannung und der Contraction des Fadens, d. h. —  $Td\varrho$ . Erhält die Fläche eine endliche Verrückung so ist die Arbeit das Integral dieses Ausdrucks und die Regel bleibt dieselbe wie zuvor.

Sowohl wenn der Faden Masse, als wenn er keine hat, kann man jedes einzelne seiner Elemente als einen sich bewegenden Körper betrachten, für dessen Bewegung die Gleichung der lebendigen Kraft gilt. Die durch das Zusammenziehen aller Elemente verrichtete Arbeit ist so anzusehen, als ob sie über alle Körper vertheilt sei. Die durch die gleichen und entgegengesetzten Reactionen zwischen dem Faden und der Fläche verrichtete Arbeit ist dann Null.

§ 344. Die bei der Vereinigung von Körpern verrichtete Arbeit. Beisp. 1.  $m, m'$  seien die Massen zweier Punkte, die einander mit der Kraft  $\frac{mm'}{r^2}$  anziehen, unter  $r$  ihren Abstand verstanden. Man zeige, dass die Arbeit der gegenseitigen Kraft, wenn sie sich aus unendlicher grosser Entfernung bis zu dem Abstand  $r$  von einander bewegt haben,  $\frac{mm'}{r}$  ist. Dies ergibt sich aus § 338. Stossen sich die Massenpunkte

ab, so betrachte man entweder  $m$  oder  $m'$  als negativ. ( $\frac{m}{r}$  nennt man das Potential von  $m$ .)

Beisp. 2. Zwei endliche Massen  $M, M'$  mögen einander anziehen und gegebene Lagen einnehmen. Man beweise, dass die Arbeit, welche die Anziehung der einen in ihrer gegebenen Lage festliegenden Masse verrichten muss, um die Massenpunkte der andern aus unendlich grossen Entfernungen in ihre gegebenen Lagen zu bringen, dieselbe ist, wie die, welche die Anziehung der zweiten verrichten muss, um die Massenpunkte der ersten aus der Unendlichkeit in ihre Lagen zu bringen. Man beweise ferner, dass man diese Arbeit findet, wenn man beide Körper in ihren Endlagen nimmt und die Masse eines jeden Elementes des einen mit dem Potential des andern für dieses Element multiplicirt und dann über das Volumen des ersten Körpers integrirt.

Dieses Integral nennt man auch die gegenseitige Arbeit oder das gegenseitige Potential der beiden Körper.

Wir wollen annehmen, man habe zwei Systeme sich anziehender Massenpunkte, die wir durch  $m_1, m_2$ , etc.,  $m_1', m_2'$ , etc. darstellen und die Massenpunkte des einen Systems zögen die des andern, aber nicht die des eigenen Systems an. Die Punkte  $m_1, m_2$ , etc. mögen gegebene Lagen einnehmen und ein Punkt  $m'$  des zweiten Systems werde aus unendlich grosser Entfernung in eine gegebene Lage, z. B. diejenige gebracht, die die Abstände  $r_1, r_2$ , etc. von den Punkten  $m_1, m_2$ ,

etc. hat. Die verrichtete Arbeit ist  $m' \left( \frac{m_1}{r_1} + \frac{m_2}{r_2} + \text{etc.} \right) = m' V$ , worin  $V$  das Potential der anziehenden Massen für die gegebene Lage von  $m'$  ist.

Wir wollen nun nacheinander alle Massenpunkte  $m_1', m_2', \text{etc.}$  aus unendlich grossen Abständen in ihre gegebenen Endpositionen durch die ausschliessliche Anziehung der Massen  $m_1, m_2, \text{etc.}$  bringen. Die ganze Arbeit ist  $\sum m' V$ , welcher man auch die symmetrische Gestalt  $\sum \frac{m m'}{r}$  geben kann, wenn  $r$  der Abstand zwischen den Massenpunkten  $m, m'$  ist und  $\sum$  die Summirung für alle Combinationen eines jeden Punktes des einen Systems mit jedem Punkt des andern angibt. Aus dieser symmetrischen Form folgt der erste Theil des Satzes.

Wenn die Massenpunkte Elemente sind, so ist, wie man sieht, die Arbeit, eine Masse  $M'$  durch die Anziehung der in gegebener Lage befindlichen Masse  $M$  in einer gegebenen Position zu sammeln,  $= \int V dm'$ , worin  $V$  das Potential der Masse  $M$  für die Endlage von  $dm'$  ist und die Integration sich über die ganze Masse von  $M'$  erstreckt.

Beisp. 3. Wenn die materiellen Punkte, die irgend einen Körper zusammensetzen, von einander getrennt waren, so kann man dadurch, dass man sie sich nähern lässt, durch ihre gegenseitigen Attractionen Arbeit verrichten lassen. Die so erhaltene Arbeit ist am grössten, wenn die Punkte sich aus unendlich grossen Abständen vereinigen. Es sei nun  $dv$  ein Volumenelement eines festen Körpers, welches nach dem Newton'sche Gesetz anzieht,  $\rho$  die Dichtigkeit des Elementes,  $V$  das Potential des festen Körpers für das Element  $dv$ ; man beweise, dass die Arbeit, die geleistet werden muss, um die materiellen Punkte, welche die Masse zusammensetzen, aus unendlich grossen Abständen zu sammeln,  $\frac{1}{2} \int V \rho dv$  ist.

Das Problem, die Arbeit zu bestimmen, welche die Körper, die das Sonnensystem bilden, durch ihre Zusammenziehung in eine feste Masse leisten können, ist von verschiedenen Naturforschern untersucht worden. Sir W. Thomson hat berechnet, dass die potentielle Energie oder die Arbeit, welche das heutige Sonnensystem durch Vereinigung der Planeten mit der Sonne leisten kann,  $53 \times 10^{36}$  Meterkilogramm beträgt.

Edin. Trans. 1854.

Indem wir die Massenpunkte einen nach dem andern an ihren richtigen Platz bringen, finden wir die ganze Arbeit durch Multiplication der Masse eines jeden mit dem Potential der bereits vereinigten Masse für ihn und Addition der Producte. Wir werden beweisen, dass man dasselbe Resultat erhält, wenn man die Masse eines jeden mit dem Potential der ganzen schliesslich vereinigten Masse für ihn multiplicirt und nur die Hälfte der Summe nimmt.

$m_1, m_2, \text{etc.}$  seien die Massen der Punkte; (1, 2); (2, 3); etc. seien bei der schliesslichen Anordnung die Abstände zwischen den Massen  $m_1, m_2$  bez.  $m_2, m_3$ ; etc. Nehmen wir an, die Punkte  $m_1, m_2, \dots, m_{n-1}$  seien an ihre richtige Stelle bereits gebracht worden und bringen wir  $m_n$  aus der Unendlichkeit her durch die Anziehung von  $m_1, m_2, \dots, m_{n-1}$  an seinen Platz. Die Arbeit ist

$$m_n \left[ \frac{m_1}{(1, n)} + \frac{m_2}{(2, n)} + \dots + \frac{m_{n-1}}{(n-1, n)} \right].$$

Dabei wird  $m_n$  einmal mit jeder der Massen  $m_1, m_2, \dots, m_{n-1}$  zusammen-  
genommen. Bringt man nun nacheinander  $m_{n+1}, m_{n+2},$  etc. aus der Unend-  
lichkeit heran, so erhält man für jedes eine ähnliche Reihe und mithin wird  $m_n$   
einmal mit jeder dieser Massen bei ihrem Einbringen zusammengenommen. Daher  
wird  $m_n$  mit jeder Masse mit Ausnahme von sich selbst einmal zusammengenommen.  
Sind  $m, m'$  die Massen zweier beliebiger Punkte,  $r$  ihr Abstand bei der schliess-  
lichen Anordnung, so lässt sich die Arbeit in der Form  $V = \sum \frac{mm'}{r}$  schreiben.

In der gegebenen schliesslichen Anordnung ist das Potential für den Massen-  
punkt  $m_1$  aller Massenpunkte mit Ausnahme des Punktes selbst

$$V_1 = \frac{m_2}{(1, 2)} + \frac{m_3}{(1, 3)} + \text{etc.}$$

$V_2, V_3$  mögen ähnliche Bedeutung haben. Wir wollen nun untersuchen, wie oft  
die Masse  $m_n$  in dem Ausdruck  $V_1 m_1 + V_2 m_2 + \text{etc.}$  vorkommt. In  $V_1 m_1$  tritt  
sie einmal auf mit  $m_1$  combinirt, einmal in  $V_2 m_2$  mit  $m_2$  combinirt u. s. f.  
Schliesslich kommt sie in  $V_n m_n$  wieder mit jeder andern Masse combinirt vor.  
Im Ganzen ist daher  $m_n$  *zweimal* mit jeder andern Masse combinirt. Daraus folgt,  
dass die Arbeit, den Körper in die gegebene Anordnung zu vereinigen,

$$U = \frac{1}{2} (V_1 m_1 + V_2 m_2 + \dots) = \frac{1}{2} \Sigma V m$$

ist.

Bei der Ermittlung des Potentials eines festen Körpers für einen Punkt  $P$   
kann man die Materie innerhalb eines den Punkt  $P$  einschliessenden unbegrenzt  
kleinen Elementes vernachlässigen, wenn seine Dichtigkeit endlich ist. Denn da  
das Potential „die Masse durch den Abstand dividirt“ ist und die Masse wie die  
dritte Potenz der linearen Dimensionen variiert, so folgt daraus, dass das Potential  
ähnlicher Figuren für ähnlich gelegene Punkte wie das Quadrat der linearen Di-  
mensionen variiert und verschwinden muss, wenn die Masse elementar und der  
Abstand unbegrenzt klein wird. Wendet man daher die Form  $U = \frac{1}{2} \Sigma V m$  auf  
einen festen Körper an, so kann man  $\rho dv$  für  $m$  schreiben und von  $V$  annehmen,  
dass es das Potential der ganzen Masse für das Element  $dv$  sei.

Beisp. 4. Die Massenpunkte, welche eine homogene Kugel von der Masse  $M$   
und dem Radius  $r$  zusammensetzen, waren ursprünglich unendlich weit von ein-  
ander entfernt. Man beweise, dass die durch ihre gegenseitigen Anziehungen ver-  
richtete Arbeit  $\frac{3}{5} \frac{M^2}{r}$  ist.

Beisp. 5. Die Massenpunkte eines homogenen Ellipsoids, dessen Masse  $M$   
ist und dessen Halbaxen  $a, b, c$  sind, werden aus unendlich grossen Abständen  
gesammelt; man beweise, dass die Arbeit

$$\frac{3}{10} M^2 \int_0^\infty \frac{d\lambda}{\sqrt{(a^2 + \lambda)(b^2 + \lambda)(c^2 + \lambda)}}$$

ist.

Beisp. 6. Die Arbeit, die Massenpunkte zweier Massen, von denen  
die eine vollständig ausserhalb der andern liegt, von unendlich weiten  
Abständen her zu sammeln, ist die Summe der Arbeiten, jede für sich  
zu sammeln, plus ihrem gegenseitigen Potential.

Liegt die eine Masse vollständig innerhalb der andern, so ist die  
Arbeit, ihre Differenz zu sammeln, die Summe der Arbeiten, jede für  
sich zu sammeln, minus ihrem gegenseitigen Potential.

Der erste Satz ist leicht einzusehen.  $M, M'$  seien die bereits versammelten Massen, und man bringe einen neuen Massenpunkt aus der unendlich grossen Entfernung zur Masse  $M$  heran. Die an diesem Massenpunkt verrichtete Arbeit ist offenbar die Summe 1) der Arbeit der Anziehung von  $M$  und 2) der Anziehung von  $M'$ . Die erste ist ein Zusatz zu der Arbeit  $M$  zu sammeln und die zweite ein Zusatz zu dem gegenseitigen Potential von  $M$  und  $M'$ .

Aus dem ersten Satz folgt durch Umstellung, dass die Arbeit  $M$  zu sammeln der Arbeit  $(M + M')$  zu sammeln gleichkommt minus der Arbeit  $M'$  zu sammeln minus dem gegenseitigen Potential von  $M$  und  $M'$ . Nun ist das gegenseitige Potential von  $M$  und  $M'$  dem gegenseitigen Potential von  $(M + M')$  und  $M'$  gleich, wenn man zweimal die Arbeit,  $M'$  zu sammeln, abzieht. Daraus ergibt sich der zweite Satz.

Beisp. 7. Eine Quantität homogener Materie wird durch zwei Kugeloberflächen begrenzt, welche sich nicht schneiden und von denen die eine vollständig innerhalb der andern liegt. Die Radien der Kugeln seien  $a$  und  $b$ , der Abstand ihrer Mittelpunkte  $c$ . Man beweise, dass die Arbeit, diese Materie aus unendlich weiter Ferne zu sammeln,

$$\frac{(4\pi\varrho)^2}{3} \left[ \frac{a^5}{5} - \frac{a^2 b^3}{2} + \frac{3b^5}{10} + \frac{b^3 c^2}{6} \right] \text{ ist.}$$

§ 345. Arbeit des Druckes gasförmiger Körper. Beisp. 1. Eine Umhüllung von beliebiger Gestalt, deren Volumen  $v$  ist, enthält Gas unter dem gleichförmigen Druck  $p$ . Der Druck des Gases pro Flächeneinheit sei eine Function des von ihm eingenommenen Volumens; man

beweise, dass die durch die Druckkräfte verrichtete Arbeit  $\int_a^b p dv$  ist, wenn das Volumen von  $v = a$  bis  $v = b$  wächst.

Man theile die Oberfläche in Flächenelemente, von denen jedes  $= d\sigma$  ist,  $p d\sigma$  stellt dann den Druck auf  $d\sigma$  dar. Hat sich das Volumen auf  $v + dv$  vergrössert, so möge ein Element  $d\sigma$  die Lage  $d\sigma'$  einnehmen und  $dn$  sei die Länge des von dem Mittelpunkt von  $d\sigma'$  auf die Ebene von  $d\sigma$  gefällten Lothes.  $p d\sigma dn$  ist alsdann die durch den Druck auf  $d\sigma$  verrichtete Arbeit und  $p \int d\sigma dn$  die auf der ganzen Fläche verrichtete Arbeit.  $d\sigma dn$  ist aber das Volumen des schiefen Cylinders, dessen Basis  $d\sigma$  und gegenüberliegende Fläche  $d\sigma'$  ist, so dass also  $\int d\sigma dn$  den ganzen Zuwachs des Volumens bedeutet. Die ganze Arbeit bei einer Zunahme des Volumens um  $dv$  ist daher  $p dv$ .

Beisp. 2. Eine Umhüllung in der Gestalt einer Kugel vom Radius  $a$  enthält Gas von dem Druck  $P$ . Man nehme an, der Druck des Gases pro Flächeneinheit sei dem von ihm eingenommenen Volumen umgekehrt proportional und beweise, dass die Arbeit, welche erforderlich ist, um die Umhüllung in eine Kugel vom Radius  $b$  zusammenzudrücken,  $\frac{4\pi a^3 P a}{b}$  ist.

Beisp. 3. Eine Hülle von beliebiger Gestalt enthält Gas; die Gestalt ändert sich, aber das Volumen bleibt dasselbe. Man zeige, dass die auf der ganzen Oberfläche verrichtete Arbeit Null ist.

Beisp. 4. Ein hohler Cylinder enthält gleiche Massen zweier verschiedener elastischer Flüssigkeiten unter demselben Druck  $P$ , die durch einen Kolben ohne Gewicht von einander getrennt sind. Man zeige, dass die Arbeit, welche dadurch

verrichtet wird, dass man den Kolben bewegt, bis die Dichtigkeiten der beiden Flüssigkeiten vertauscht sind,  $PA(a-b)\log\frac{a}{b}$  ist, worin  $A$  den Flächeninhalt des Kolbens,  $a, b$  die Längen der von den beiden Flüssigkeiten eingenommenen Theile des Cylinders sind. [Pembroke College, 1868.]

Beisp. 5. Eine Luftmasse von der gleichförmigen Dichtigkeit  $\rho(1+s)$  ist in eine Umhüllung eingeschlossen und von Luft umgeben, welche die Dichtigkeit der Atmosphäre  $\rho$  hat. Wenn sich die Masse ausdehnt, bis ihre Dichtigkeit derjenigen der Atmosphäre gleichkommt, zu beweisen, dass die verrichtete Arbeit  $k\left(\log(1+s) - \frac{s}{1+s}\right)$  ist, unter  $k$  das Product aus dem Druck und dem Volumen verstanden. Wenn  $s$  klein ist, so wird die Arbeit nahezu  $\frac{1}{2}ks^2$ . In der Lehre vom Schall wird davon Anwendung gemacht.

§ 346. Die Arbeit der Momentankräfte. Beisp. 1. Eine Momentankraft wirkt auf einen Körper in einer im Raum festliegenden Richtung.  $F$  sei die ganze durch die Kraft erzeugte Bewegungsgrösse,  $u_0, u_1$  die Componenten der Geschwindigkeit des Angriffspunktes in der Richtung der Kraft grade vor und grade nach dem Stoss; man zeige, dass die durch die Momentankraft verrichtete Arbeit  $\frac{u_0 + u_1}{2} F$  ist. Den Satz findet man in Thomson und Tait's *Natural Philosophy*. (Art. 309.)

Wenn eine Kraft auf die gewöhnliche Art durch die in der Zeiteinheit erzeugte Beschleunigung multiplicirt mit der Masse gemessen wird, so wird die Arbeit durch das Product aus dieser Kraft und der Componente der Verschiebung gemessen. Momentankräfte jedoch werden nicht so gemessen, man kann diese Regel daher nicht direct anwenden, um die Arbeit einer Momentankraft zu finden.

Man betrachte die Stosskraft als die Grenze einer endlichen Kraft, die während sehr kurzer Zeit  $T$  in der festliegenden Richtung wirkt. Die Richtung der  $x$ -Axe sei der festen Richtung parallel und  $X$  sei die ganze während der Zeit  $t$ , vom Beginn des Stosses an, mitgetheilte Bewegungsgrösse. Hier ist  $t$  irgend eine Zeit, die kleiner als  $T$  ist und  $X$  variirt von 0 bis  $F$ , wenn  $t$  von 0 bis  $T$  variirt.

Da ferner  $X$  die ganze Bewegungsgrösse bis zur Zeit  $t$  dargestellt, so ist  $\frac{dX}{dt}$  die auf den Körper wirkende bewegende Kraft zur Zeit  $t$ .  $u$  sei die Componente der Geschwindigkeit des Angriffspunktes zur Zeit  $t$ ,  $u_0$  und  $u_1$  die Werthe von  $u$ , wenn  $t = 0$  und  $t = T$  ist. Da  $u dt$  die in der Zeit  $dt$  von dem Angriffspunkt der Kraft  $X$  beschriebene Strecke ist, so beträgt die in der Zeit  $T$  verrichtete Arbeit  $\int_0^T u dX$ . Um integriren zu können, müssen wir wissen, was für eine Function von  $X, u$  ist.

Ist der Körper ein materieller Punkt von der Masse  $m$ , so wissen wir, dass, wenn die Wirkung sehr kurze Zeit dauert,  $m(u - u_0) = X$  ist; substituirt man daher für  $u$  und integrirt, so findet man  $u_0 F + \frac{1}{2} \frac{F^2}{m}$ . Wenn  $X = F$  wird, so ist nach der Definition  $u = u_1$ , daher  $m(u_1 - u_0) = F$ . Durch Elimination von  $m$  ergibt sich alsdann die Arbeit  $= \frac{1}{2} F(u_0 + u_1)$ .

Bewegt sich der Körper in der Ebene und ist  $\bar{u}$  die Componente der Geschwindigkeit des Schwerpunktes parallel der Richtung der Momentankraft zur Zeit  $t$  und  $\omega$  die Winkelgeschwindigkeit, dann ist nach §§ 168 und 137

$$m(\bar{u} - \bar{u}_0) = X, \quad mk^2(\omega - \omega_0) = Xp, \quad u = \bar{u} + \omega p.$$

Daher ist  $u = u_0 + LX$ , worin  $L$  eine von  $X$  unabhängige Grösse bedeutet, die daher während der Integration constant bleibt. Substituirt man für  $u$ , so nimmt das Integral die Form  $F(u_0 + \frac{1}{2}LF)$  an. Wie früher ist  $u_1 = u_0 + LF$ ; durch Elimination von  $L$  erhält man dann wieder das obige Resultat.

Bewegt sich der Körper in einem Raum von drei Dimensionen, so ist die Geschwindigkeit  $u$ , wie man aus § 313 weiss, eine lineare Function von  $X$ , so dass man  $u = u_0 + LX$  setzen kann, unter  $L$  eine von der Beschaffenheit des Körpers abhängige Constante verstanden. Substituirt man den Werth von  $u$ , so

erhält man die Arbeit  $= \int_0^F (u_0 + LX) dX = u_0 F + L \frac{F^2}{2}$ . Es ist aber  $u_1 = u_0 + LF$ ;

durch Elimination von  $L$  ergibt sich die Arbeit wieder  $= \frac{1}{2}(u_0 + u_1)F$ .

Beisp. 2. Einem Schlag  $F_1$  folgt unmittelbar ein zweiter  $F_2$  auf denselben Punkt in derselben Geraden und  $u_0, u_1, u_2$  sind die Componenten der Geschwindigkeit des Angriffspunktes vor und nach den Schlägen; man stelle fest, dass die Arbeit  $\frac{1}{2}(u_0 + u_2)(F_1 + F_2)$  des ganzen Schlages den Summen der Arbeiten der einzelnen Schläge  $\frac{1}{2}(u_0 + u_1)F_1$  und  $\frac{1}{2}(u_1 + u_2)F_2$  gleichkommt.

Dies ergibt sich sofort, da  $u_1 = u_0 + LF_1$  und  $u_2 = u_1 + LF_2$  ist. Die Lösung von Beisp. 3 kann man auf dieselbe Art aus Beisp. 1 ableiten.

Beisp. 3. Man finde die durch die Momentankraft verrichtete Arbeit, wenn ihre Richtung während ihrer unbegrenzt kurzen Dauer nicht nothwendig dieselbe bleibt.

$X, Y, Z$  seien die Componenten der ganzen dem Körper in der Zeit  $t$  vom Beginn des Stosses an mitgetheilten Bewegungsgrösse;  $u, v, w$  die Componenten der Geschwindigkeit des Angriffspunktes zur Zeit  $t$ . Auf dieselbe Art, wie zuvor,

erhält man die Arbeit  $= \int_0^T \left( \frac{dX}{dt} u + \frac{dY}{dt} v + \frac{dZ}{dt} w \right) dt$ . Nach § 314 ist aber,

falls  $T$  unbegrenzt klein ist,  $u = u_0 + \frac{\partial E}{\partial X}$ ,  $v = v_0 + \frac{\partial E}{\partial Y}$ ,  $w = w_0 + \frac{\partial E}{\partial Z}$ ,

worin  $E$  eine bekannte quadratische Function von  $X, Y, Z$  ist, welche von der Beschaffenheit des Körpers abhängt. Durch Substitution erhält man

$$\begin{aligned} \text{die Arbeit} &= u_0 X_1 + v_0 Y_1 + w_0 Z_1 + \int \left( \frac{\partial E}{\partial X} dX + \frac{\partial E}{\partial Y} dY + \frac{\partial E}{\partial Z} dZ \right) \\ &= u_0 X_1 + v_0 Y_1 + w_0 Z_1 + E_1, \end{aligned}$$

worin  $X_1, Y_1, Z_1, E_1$  die Werthe von  $X, Y, Z, E$  für  $t = T$  sind.

Man kann die Form des Körpers eliminiren und die Arbeit durch die Componenten der Geschwindigkeit des Angriffspunktes grade nach der Beendigung des Stosses ausdrücken. Da  $E_1$  eine homogene quadratische Function von  $X_1, Y_1, Z_1$  ist, so hat man

$$2E_1 = \frac{\partial E_1}{\partial X_1} X_1 + \frac{\partial E_1}{\partial Y_1} Y_1 + \frac{\partial E_1}{\partial Z_1} Z_1 = (u_1 - u_0) X_1 + (v_1 - v_0) Y_1 + (w_1 - w_0) Z_1$$

und durch Substitution

$$\text{die Arbeit} = \frac{u_0 + u_1}{2} X_1 + \frac{v_0 + v_1}{2} Y_1 + \frac{w_0 + w_1}{2} Z_1.$$

§ 347. Die Arbeit einer nach allen Richtungen gleichmässig ausgedehnten Membrane. Man nehme ein Rechteck, dessen Seiten  $a$  und  $b$  sind und welches

man als Element betrachten kann.  $T$  sei die Spannung rechtwinklig zu einer beliebigen Linie, wie gewöhnlich auf die Längeneinheit bezogen. Die Spannung rechtwinklig zur Seite  $a$  ist  $Ta$ , und wenn die Seite  $b$  auf  $b'$  angewachsen ist, die durch sie verrichtete Arbeit  $Ta(b' - b)$ . Nimmt man an, die Spannung rechtwinklig zur Seite  $b'$  sei ebenfalls  $T$ , was für den Fall richtig ist, in welchem das Rechteck ein Element ist, so beträgt die Spannung rechtwinklig zur ganzen Länge  $Tb'$  und die Arbeit, wenn die Seite  $a$  auf  $a'$  anwächst,  $Tb'(a' - a)$ .

Die ganze Arbeit ist daher  $T(a'b' - ab)$ , d. h. die Arbeit ist das Product aus der Spannung und der Aenderung der Fläche.

Für eine kugelförmige Membrane ist der Flächeninhalt  $4\pi r^2$ . Der Zuwachs an Fläche beträgt daher  $8\pi r dr$ . Die durch die Spannungen verrichtete Arbeit

wenn sich der Radius von  $r = a$  auf  $r = b$  vergrößert, ist mithin  $8\pi \int_a^b T r dr$ .

Ist die Membrane derart, dass man das Hooke'sche Gesetz auf die Spannung  $T$  anwenden kann, so hat man  $T = E \frac{r - a}{a}$ , worin  $a$  der ursprüngliche Radius der Membrane und  $E$  der Elasticitätscoefficient ist. Substituirt man diesen Werth von  $T$ , so findet man die durch die Spannungen verrichtete Arbeit, wenn sich der Radius von  $a$  auf  $b$  vergrößert, gleich  $\frac{4}{3} \frac{E}{a} (b - a)^2 (2b + a)$ .

Nimmt man an,  $T$  bleibe bei einer Seifenblase constant, so beträgt die Arbeit, bei einer Vergrößerung des Radius von  $a$  auf  $b$ ,  $4\pi T(b^2 - a^2)$ .

Wird die kugelförmige Membrane langsam ausgedehnt, indem man sie mit Gas, das den Druck  $p$  hat, füllt, so ist nach einem Satz der Hydrostatik  $pr = 2T$ . Die erforderliche Arbeit ist alsdann, wie schon gezeigt wurde,  $\int p dv$  und da  $v = \frac{4}{3} \pi r^3$  ist, so kommt man wieder zu demselben Resultat, wie oben.

§ 348. Die Arbeit eines Paares. Beisp. Ein gegebenes Paar wird in seiner Ebene von einer Lage in eine andere bewegt. Man zeige, dass die Arbeit das Product aus seinem Moment und dem Winkel, um den es gedreht wurde, ist.

Jede Verlegung eines Paares ist einer Rotation um das eine Ende seines Armes und einer Translation des ganzen Paares parallel zu sich selbst äquivalent. Die von den beiden Kräften während der Translation verrichtete Arbeit ist offenbar Null; wir brauchen daher nur die während der Rotation verrichtete Arbeit zu betrachten.

$F$  sei die Kraft,  $a$  die Länge des Armes und das Paar werde um das eine Ende  $A$  seines Armes gedreht und beschreibe dabei den Winkel  $d\theta$ . Die Kraft bei  $A$  verrichtet keine Arbeit und die von der andern verrichtete Arbeit ist  $F \cdot a d\theta$ . Durch Integration findet man die durch das Paar verrichtete Arbeit, wenn es sich um einen endlichen Winkel dreht.

§ 349. Die Arbeit beim Biegen eines Stabes. Beisp. 1. Ein ursprünglich grader Stab wird in einer Ebene gebogen. Ist  $L$  das Biegemoment für irgend einen Punkt,  $\rho$  der Krümmungsradius, so ist, wie die Erfahrung und die Theorie lehren,  $L = \frac{E}{\rho}$ , worin  $E$  eine von der Natur des Materials und der Form des Querschnittes des Stabes abhängige Constante bedeutet. Unter dieser Voraussetzung



so dass  $Q$  als Function von  $s$  bekannt ist, während die Kräfte bekannt sein können oder nicht, so ist die Arbeit  $\frac{1}{2} \int \frac{E}{Q^2} ds$ . (2) Wenn der Stab durch bekannte Kräfte gebogen wird, so dass  $L$  als Function von  $s$  bekannt ist, während die Form des Stabes bekannt sein kann oder unbekannt, so ist die Arbeit  $\frac{1}{2} \int \frac{L^2}{E} ds$ . Das Integral ist von dem einen Ende des Stabes bis zum andern zu erstrecken.

$PQ$  sei ein Element des Stabes und  $ds$  seine Länge. Ist  $\psi$  der unbegrenzt kleine Winkel, den die Tangenten an die Enden des Elementes  $PQ$  mit einander machen, so ist das Biegemoment  $E \frac{\psi}{ds}$ . Bei der Vergrößerung des  $\psi$  von 0 bis  $\frac{ds}{Q}$  beträgt die verrichtete Arbeit  $\frac{E}{ds} \int \psi d\psi = \frac{E ds}{2 Q^2}$ . Die an dem ganzen Stab verrichtete Arbeit ist daher  $\frac{1}{2} \int \frac{E}{Q^2} ds$ .

Beisp. 2. Ein gleichförmiger schwerer Stab von der Länge  $l$  und dem Gewicht  $w$  ist an seinen beiden Enden so unterstützt, dass er horizontal liegt. Man zeige, dass die durch die Schwere beim Biegen verrichtete Arbeit  $\frac{w^2 l^3}{240 E}$  ist.

Beisp. 3. Ein gleichförmiger leichter Stab ist an seinen Enden  $A$  und  $B$  unterstützt und trägt an irgend einem Punkt  $C$  ein Gewicht  $w$ . Es sei  $AC = a$ ,  $BC = b$  und  $l = a + b$ ; die Arbeit, welche die Schwere durch das Biegen des Stabes verrichtet, ist  $\frac{w^2 a^2 b^2}{6 E l}$ .

## Erhaltung der lebendigen Kraft und Energie.

§ 350. *Definition.* Die *lebendige Kraft* des Massenpunktes ist das halbe Product aus seiner Masse und dem Quadrat seiner Geschwindigkeit<sup>1)</sup>.

**Das Princip der lebendigen Kraft.** Wenn ein System sich unter der Einwirkung endlicher Kräfte bewegt und wenn die geometrischen Beziehungen der Theile des Systems durch Gleichungen ausgedrückt sind, welche die Zeit nicht explicite enthalten, so ist die Aenderung der lebendigen Kraft des Systems bei dem Uebergang von der einen Lage in die andere der entsprechenden Arbeit der Kräfte gleich.

Bei der Bestimmung der Kräftefunction kann man alle Kräfte weglassen, die in der Gleichung der virtuellen Arbeit nicht auftreten.

---

1) Der Verfasser nennt, wie auch Despeyrous und Appell, sowie bei uns Schell, das Product aus der Masse und dem Quadrat der Geschwindigkeit die lebendige Kraft. Im Allgemeinen ist es bei uns jedoch gebräuchlich, nach dem Vorgang von Coriolis, Helmholtz und Anderen, dem halben Product diesen Namen zu geben.

$x, y, z$  seien die Coordinaten eines Massenpunktes  $m$  und  $X, Y, Z$  die Componenten der gegebenen beschleunigenden Kräfte, welche an dem Punkt angreifen, in der Richtung der Axen.

Die an dem Punkt  $m$  zur Zeit  $t$  angreifenden Effectivkräfte sind

$$m \frac{d^2x}{dt^2}, \quad m \frac{d^2y}{dt^2}, \quad m \frac{d^2z}{dt^2}.$$

Werden die Effectivkräfte an allen Massenpunkten umgekehrt, so halten sie der ganzen Gruppe der gegebenen Kräfte nach § 67 das Gleichgewicht. Daher ist nach dem Princip der virtuellen Arbeit

$$\Sigma m \left[ \left( X - \frac{d^2x}{dt^2} \right) \delta x + \left( Y - \frac{d^2y}{dt^2} \right) \delta y + \left( Z - \frac{d^2z}{dt^2} \right) \delta z \right] = 0,$$

worin  $\delta x, \delta y, \delta z$  kleine willkürliche Verschiebungen des Massenpunktes  $m$  sind, die mit den geometrischen Beziehungen zur Zeit  $t$  sich vereinigen lassen.

Wenn nun die geometrischen Beziehungen durch Gleichungen ausgedrückt sind, welche die Zeit nicht explicite erhalten, so gelten sie, wenn sie zur Zeit  $t$  gelten, auch während der Zeit  $\delta t$ , und wir können daher annehmen, die *willkürlichen* Verschiebungen  $\delta x, \delta y, \delta z$  seien den *thatsächlichen*  $\frac{dx}{dt} \delta t, \frac{dy}{dt} \delta t$  bez.  $\frac{dz}{dt} \delta t$  des Massenpunktes in der Zeit  $\delta t$  gleich.

Macht man diese Substitution, so wird die Gleichung

$$\Sigma m \left( \frac{d^2x}{dt^2} \frac{dx}{dt} + \frac{d^2y}{dt^2} \frac{dy}{dt} + \frac{d^2z}{dt^2} \frac{dz}{dt} \right) = \Sigma m \left( X \frac{dx}{dt} + Y \frac{dy}{dt} + Z \frac{dz}{dt} \right).$$

Integriert man, so folgt

$$\Sigma m \left[ \left( \frac{dx}{dt} \right)^2 + \left( \frac{dy}{dt} \right)^2 + \left( \frac{dz}{dt} \right)^2 \right] = C + 2 \Sigma m \int (X dx + Y dy + Z dz),$$

worin die Constante  $C$  durch die Anfangsbedingungen der Bewegung zu bestimmen ist.

$v, v'$  seien die Geschwindigkeiten des Massenpunktes  $m$  zu den Zeiten  $t$  und  $t'$ ;  $U_1, U_2$  die Werthe der Kräftefunction des Systems in seinen beiden Lagen zur Zeit  $t$  und  $t'$ . Alsdann ist

$$\frac{1}{2} (\Sigma m v'^2 - \Sigma m v^2) = U_2 - U_1.$$

§ 351. Die folgende Erläuterung, welche Poisson entnommen ist, soll klarer darthun, warum die geometrischen Beziehungen die Zeit nicht explicite enthalten dürfen. Es sei z. B.

$$\varphi(x, y, z, t) = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

eine geometrische Beziehung, welche die Coordinaten des Massenpunktes  $m$  verbindet. Man kann sie als die Gleichung einer sich bewegenden Fläche betrachten, auf welcher der Massenpunkt bleiben muss. Die

Grössen  $\delta x$ ,  $\delta y$ ,  $\delta z$  sind die Projectionen einer willkürlichen mit den geometrischen Beziehungen, die zur Zeit  $t$  gelten, vereinbaren Verschiebung des Massenpunktes  $m$  auf die Axen. Sie müssen daher der Gleichung genügen

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} \delta x + \frac{\partial \varphi}{\partial y} \delta y + \frac{\partial \varphi}{\partial z} \delta z = 0.$$

Die Grössen  $\frac{dx}{dt} \delta t$ ,  $\frac{dy}{dt} \delta t$ ,  $\frac{dz}{dt} \delta t$  sind die Projectionen der Verschiebung des Massenpunktes in Folge seiner Bewegung in der Zeit  $\delta t$  auf die Axen. Sie müssen daher die Gleichung erfüllen

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} \frac{dx}{dt} \delta t + \frac{\partial \varphi}{\partial y} \frac{dy}{dt} \delta t + \frac{\partial \varphi}{\partial z} \frac{dz}{dt} \delta t + \frac{\partial \varphi}{\partial t} \delta t = 0.$$

Wenn folglich  $\frac{\partial \varphi}{\partial t}$  nicht während der ganzen Bewegung Null ist, so kann man nicht annehmen,  $\delta x$ ,  $\delta y$ ,  $\delta z$  seien  $\frac{dx}{dt} \delta t$ ,  $\frac{dy}{dt} \delta t$  bez.  $\frac{dz}{dt} \delta t$  gleich. Die Gleichung  $\frac{\partial \varphi}{\partial t} = 0$  drückt die Bedingung aus, dass die geometrische Gleichung (1) die Zeit nicht explicite enthält.

§ 352. Der grosse Vorthail dieses Principis liegt darin, dass es sofort eine Beziehung zwischen den Geschwindigkeiten der betrachteten Körper und den Variablen oder Coordinaten gibt, welche ihre Lage im Raum bestimmen, so dass z. B., wenn das Problem so beschaffen ist, dass die Lage aller Körper von einer einzigen Variablen abhängig gemacht werden kann, die Gleichung der lebendigen Kraft zur Bestimmung der Bewegung ausreicht. Im Allgemeinen gibt das Princip ein erstes Integral der Bewegungsdifferentialgleichungen zweiter Ordnung. Wenn zugleich einige der andern in § 282 formulirten Sätze auf die betrachteten Körper angewandt werden können, so dass die ganze Anzahl der so erhaltenen Gleichungen der Zahl der unabhängigen Coordinaten des Systems gleichkommt, so ist die Aufstellung der Bewegungsdifferentialgleichungen zweiter Ordnung überhaupt nicht nöthig. Siehe § 143.

Das Princip der lebendigen Kraft wurde zuerst von Huyghens bei seiner Bestimmung des Schwingungscentrums eines Körpers benutzt, aber in anderer Form als es jetzt gebräuchlich ist. *Siehe die Anmerkung zu S. 75.* Der Satz wurde von Johann Bernoulli ausgedehnt und von seinem Sohn, Daniel Bernoulli, auf die Lösung vieler Probleme, wie der Bewegung von Flüssigkeiten in Gefässen und der Bewegung von starren Körpern unter gewissen gegebenen Bedingungen benutzt. Siehe Montucla, *Histoire des Mathématiques*, Tome III.

§ 353. Anfangsbewegung. Man nehme an, das System bewege sich vom Zustand der Ruhe aus unter der Einwirkung der Kräfte  $X$ ,  $Y$ ,  $Z$  etc. Nach der Zeit  $dt$  ist die lebendige Kraft durch

$$\frac{1}{2} \Sigma m v'^2 = \Sigma m (X dx + Y dy + Z dz)$$

gegeben. Die linke Seite der Gleichung ist nothwendiger Weise positiv. Daraus geht hervor, dass die Anfangsbewegung eines Systems, welches vom Zustand der Ruhe ausgeht, derart sein muss, dass die virtuelle Arbeit der Kräfte für die Bewegung positiv ist.

Es sind, geometrisch betrachtet, mehrere verschiedene Bahnen möglich, auf welchen das System von seinem Anfangszustand der Ruhe aus seine Bewegung beginnen kann. Es möge gezwungen werden irgend einen dieser Wege einzuschlagen, dadurch, dass man eine hinreichende Anzahl seiner Punkte nöthigt, gewisse glatte Curven zu beschreiben oder dadurch, dass man irgend welche Kräfte einführt, die keine virtuelle Arbeit für diese specielle Art der Verrückung verrichten. Das System ist jetzt nur ein Weg offen gelassen. Es gibt zwei Richtungen, welche es auf diesem Weg einschlagen kann. Die Frage ist: in welcher Richtung wird es sich zu bewegen beginnen? Da die virtuelle Arbeit der Kräfte im Allgemeinen für die eine dieser Richtungen positiv und für die andere negativ ist, so muss es in der ersteren seine Bewegung beginnen.

§ 354. Beispiele zu dem Princip. Wenn ein System unter der Wirkung keiner äusseren Kräfte steht, so ist  $X = 0$ ,  $Y = 0$ ,  $Z = 0$  und daher die lebendige Kraft des Systems constant.

Sind dagegen die gegenseitigen Reactionen zwischen den Massenpunkten des Systems derart, dass sie in der Gleichung der virtuellen Arbeit auftreten, dann ist die lebendige Kraft des Systems nicht constant. So würde die lebendige Kraft des Sonnensystems, auch wenn keine äusseren Kräfte an ihm angriffen, nicht constant sein. Denn die gegenseitigen Anziehungen zwischen den verschiedenen Planeten sind Reactionen zwischen Massenpunkten, deren Abstände nicht dieselben bleiben, mithin ist die Summe der virtuellen Arbeiten nicht Null. Ferner; wenn man die Erde als einen um eine Axe rotirenden Körper ansieht, der sich im Laufe der Zeit des Wärmeverlustes wegen langsam zusammenzieht, so bleibt aus demselben Grund, wie vorher, die lebendige Kraft nicht constant. Der Zuwachs an Winkelgeschwindigkeit, der durch diese Contraction bewirkt wird, lässt sich nach dem Princip der Flächen leicht ermitteln. Siehe § 299.

§ 355. Beispiel. Die Schwere greife allein an dem System an. Die  $z$ -Axe sei vertical. Man hat dann  $X = 0$ ,  $Y = 0$ ,  $Z = -g$ . Die Gleichung der lebendigen Kraft wird daher

$$\frac{1}{2}(\Sigma m v'^2 - \Sigma m v^2) = -Mg(z' - z).$$

Die lebendige Kraft hängt daher nur von der Höhe des Schwerpunktes ab. Zieht man eine horizontale Ebene, so ist die lebendige Kraft dieselbe, so oft der Schwerpunkt des Systems durch diese Ebene geht. Siehe § 142.

§ 356. Beisp. Ein in Bewegung befindliches System geht durch eine Gleichgewichtslage, d. h. eine Lage, in welcher es, wenn es sich in Ruhe befände, unter der Einwirkung der Kräfte im Gleichgewicht bleiben würde; man beweise, dass die lebendige Kraft des Systems ein

Maximum oder ein Maximum ist. De Courtivron's Theorem. *Mém. de l'Acad.*, 1748 und 1749.

§ 357. Wie bekannt, enthält die Gleichung der virtuellen Arbeit in der Statik in einer Formel alle Bedingungen des Gleichgewichtes. Auf dieselbe Art kann man aus der allgemeinen Gleichung

$$\sum m \left( \frac{d^2 x}{dt^2} \delta x + \frac{d^2 y}{dt^2} \delta y + \frac{d^2 z}{dt^2} \delta z \right) = \sum m (X \delta x + Y \delta y + Z \delta z)$$

alle Bewegungsgleichungen durch geeignete Wahl der willkürlichen Verschiebungen  $\delta x$ ,  $\delta y$ ,  $\delta z$  ableiten. In § 350 trafen wir eine bestimmte Wahl für die Verschiebungen und erhielten so eine Gleichung, die sich integrieren liess.

Geben wir dem ganzen System eine Verschiebung parallel zur  $z$ -Axe, so ist  $\delta x = 0$ ,  $\delta y = 0$  und  $\delta z$  willkürlich. Die Gleichung wird dann  $\sum m \frac{d^2 z}{dt^2} = \sum m Z$ , welche eine der drei ersten allgemeinen Bewegungsgleichungen in § 71 ist.

Geben wir dem ganzen System eine Drehung um die  $z$ -Axe von der Amplitude  $\delta \theta$ , so ist  $\delta x = -y \delta \theta$ ,  $\delta y = x \delta \theta$ ,  $\delta z = 0$ . Die Gleichung wird dann  $\sum m \left( x \frac{d^2 y}{dt^2} - y \frac{d^2 x}{dt^2} \right) = \sum m (x Y - y X)$ , welche eine der letzten drei allgemeinen Bewegungsgleichungen in § 71 ist.

§ 358. Potentielle und kinetische Energie. Ein Gewicht  $mg$  möge in eine Höhe  $h$  über die Oberfläche der Erde gebracht werden. Fällt es die Höhe  $z$  hinab, so verrichtet die Schwerkraft eine Arbeit, die durch  $mgz$  gemessen wird. Das Gewicht erlangt die Geschwindigkeit  $v$ , seine lebendige Kraft ist  $\frac{1}{2}mv^2$ , welche, wie bekannt, gleich  $mgz$  ist. Fällt das Gewicht auch noch den Rest der Höhe  $h$  hinab, so verrichtet die Schwere noch mehr Arbeit, deren Maass  $mg(h - z)$  ist. Hat nun das Gewicht den Boden erreicht, so ist es so weit gefallen, als es die Umstände erlauben und die Schwere kann erst dann wieder Arbeit verrichten, wenn es wieder in die Höhe gehoben wird. Daraus ergibt sich, dass die lebendige Kraft des Gewichtes, wenn es eine Strecke  $z$  durchfallen hat, zusammen mit der Arbeit, die während des Restes des Falles verrichtet werden kann, von  $z$  unabhängig und der Arbeit der Schwere während der ganzen Fallhöhe  $h$  gleich ist.

Dies gilt auch dann noch, wenn man die Bewegung complicirt und das Gewicht während seines Abstieges irgend eine Maschine treiben lässt. Nach dem in § 350 bewiesenen Princip der lebendigen Kraft ist die lebendige Kraft des Massenpunktes, wenn er eine Strecke  $z$  durchfallen hat, der von der Schwere während dieses Falles verrichteten Arbeit  $mgz$ , vermindert um die an der Maschine geleistete, gleich. Daher ist, wie zuvor, die lebendige Kraft zusammen mit dem Unter-

schied zwischen der von der Schwere und der an der Maschine während des Restes des Fallens verrichteten Arbeit constant und dem Ueberschuss der von der Schwere verrichteten Arbeit über die an der Maschine geleistete während des ganzen Abstieges gleich.

Wir wollen dieses Princip jetzt auf den allgemeinen Fall ausdehnen, in dem ein System von Körpern vorliegt, an welchen ein beliebiges conservatives Kräftesystem angreift.

§ 359. Man wähle irgend eine Lage des sich bewegenden Systems von Körpern als Bezugslage aus. Es kann dies die thatsächliche Endlage, in welche das System bei seiner Bewegung kommt, oder eine beliebige andere geeignete Lage sein, in welche das System gebracht werden kann. Man nehme an, das System gehe von einer Lage, die wir  $A$  nennen können, aus und es nehme zur Zeit  $t$  die Lage  $P$  ein. Alsdann ist zur Zeit  $t$  die erzeugte lebendige Kraft der von  $A$  bis  $P$  verrichteten Arbeit gleich. Daher ist die lebendige Kraft bei  $P$  zusammen mit der Arbeit, die von  $P$  bis zur Bezugslage verrichtet werden kann, für alle Lagen von  $P$  constant.

Um dies auszudrücken, gebraucht man das Wort *Energie*. Die lebendige Kraft heisst in diesem Fall die *kinetische (Bewegungs-) Energie* des Systems. Die Arbeit, welche die Kräfte bei der Bewegung des Systems von seiner augenblicklichen in seine Bezugslage noch verrichten können, heisst die *potentielle (Kräfte-) Energie* des Systems. Das Princip der Erhaltung der Energie kann man so aussprechen:

*Wenn sich ein System unter der Einwirkung conservativer Kräfte bewegt, so ist die Summe der kinetischen und potentiellen Energien während der Bewegung constant.*

§ 360. Den Unterschied zwischen verrichteter Arbeit und potentieller Energie kann man analytisch folgendermassen feststellen. (Die Kräftefunction ist in § 337 als das unbestimmte Integral der virtuellen Arbeit der Kräfte definirt worden.) Bei der Bewegung des Systems ist die verrichtete Arbeit das bestimmte Integral, dessen untere Grenze durch eine Normalbezugslage, die wir  $C$  nennen wollen, und dessen obere durch die augenblickliche Lage des Systems bestimmt wird. Die potentielle Energie ist das bestimmte Integral, dessen obere Grenze durch eine festliegende Bezugslage, die wir  $D$  nennen wollen, und dessen untere durch die augenblickliche Lage des Systems bestimmt wird. Wenn die beiden festen Bezugslagen, die wir mit  $C$  und  $D$  bezeichnet haben, identisch sind, so ist das Integral der Arbeit dasselbe wie das des Potentials und hat nur ein andres Vorzeichen. Dies ist aber im Allgemeinen nicht der Fall; jede Bezugslage wählt man so, dass sie für das specielle Integral, mit welchem sie in Verbindung steht, am besten passt.

§ 361. Beispiele zur potentiellen Energie. Beisp. 1. Ein Massenpunkt beschreibt frei eine Ellipse um ein in ihrem Mittelpunkt liegendes Kraftcentrum; man finde die ganze Energie seiner Bewegung.

$m$  sei die Masse des Punktes,  $r$  sein Abstand vom Centrum zu einer beliebigen Zeit,  $\mu r$  die an dem Punkt angreifende beschleunigende Kraft. Wenn das Zusammenfallen des Massenpunktes mit dem Kraftcentrum als Bezugslage genommen wird, so ist die potentielle Energie nach § 360,  $\int (-m\mu r) dr = \frac{1}{2} m\mu r^2$ , wenn man die Grenzen von  $r$  bis 0 nimmt. Bedeutet  $r'$  den halben zu  $r$  conjugirten Durchmesser, so ist die Geschwindigkeit des Massenpunktes  $r'\sqrt{m}$  und die kinetische Energie daher  $\frac{1}{2} m\mu r'^2$ . Wenn der Punkt eine Ellipse um das Kräftecentrum beschreibt, ist die Summe der potentiellen und kinetischen Energie  $\frac{1}{2} m\mu(a^2 + b^2)$ , unter  $a$  und  $b$  die Halbachsen der Ellipse verstanden.

Beisp. 2. Ein Massenpunkt beschreibt frei eine Ellipse um ein in ihrem Mittelpunkt liegendes Kraftcentrum. Man zeige, dass die mittlere kinetische Energie während einer vollständigen Umdrehung der mittleren potentiellen gleich ist, wenn die Mittel in Bezug auf die Zeit genommen werden.

Beisp. 3. Wenn in dem vorigen Beispiel die Mittel in Bezug auf den um das Centrum beschriebenen Winkel genommen werden, so beträgt der Unterschied der Mittel  $\frac{1}{2} m\mu(a - b)^2$ .

Beisp. 4. Eine Flüssigkeitsmasse  $M$  fliesst in einer kreisförmigen Rinne vom Radius  $a$  mit der Geschwindigkeit  $u$ , eine andre gleiche Flüssigkeitsmasse in einer Rinne vom Radius  $b$  mit der Geschwindigkeit  $v$ ; man lässt den Radius der einen Rinne so lange wachsen und den der andern abnehmen, bis jeder die ursprüngliche Grösse des andern hat; man zeige, dass die Arbeit, welche dazu gehört, die Aenderung hervorzubringen,  $\frac{1}{3} \left( \frac{v^2}{a^2} - \frac{u^2}{b^2} \right) (b^2 - a^2) M$  ist.

[Math. Tripos, 1866.]

§ 362. Verzeichniss der Kräfte, welche zu vernachlässigen sind. Bei der Anwendung des Principes der lebendigen Kraft auf thatsächliche Fälle ist es wichtig, von vornherein zu wissen, welche Kräfte und inneren Reactionen man bei der Aufstellung der Gleichung vernachlässigen kann. Die allgemeine Regel lautet, dass alle Kräfte ausser Acht zu lassen sind, die in der Gleichung der virtuellen Arbeit nicht auftreten. Diese Kräfte lassen sich so zusammenstellen:

A. Reactionen, deren virtuelle Verschiebungen Null sind.

1. Jede Kraft, deren Richtungslinie durch die Momentanaxe geht, wie z. B. rollende Reibung, nicht aber gleitende Reibung oder der Widerstand eines Mittels.

2. Jede Kraft, deren Richtungslinie senkrecht auf der Bewegungsrichtung des Angriffspunktes steht, wie z. B. die Reaction einer glatten festen Fläche, nicht aber die einer Fläche, welche sich bewegt.

B. Solche Reactionen, deren virtuelle Verschiebungen nicht Null sind und die deshalb in der Gleichung auftreten würden, wenn sie, mit andern Reactionen verbunden, nicht verschwänden.

1. Die Reaction zwischen zwei Massenpunkten, deren Abstand derselbe bleibt, wie die Spannung eines unausdehnbaren Fadens, nicht aber die eines elastischen Fadens.

2. Die Reaction zwischen zwei starren Körpern, Theilen desselben Systems, welche aufeinander rollen. Es ist jedoch nöthig, beide Körper in dieselbe Gleichung der lebendigen Kraft einzuschliessen.

C. Alle Spannungen, welche längs unausdehnbarer Fäden wirken, auch wenn die Fäden dadurch, dass sie durch glatte feste Ringe gehen, gebogen werden.

Denn es möge ein Faden, dessen Spannung  $T$  ist, die Massenpunkte  $m, m'$  verbinden und durch einen Ring gehen, der von den Punkten um  $r$  bez.  $r'$  absteht. Die virtuelle Arbeit ist offenbar  $-T\delta r - T\delta r'$ , weil die Spannung längs des Fadens wirkt. Da aber der Faden unausdehnbar ist, so muss  $\delta r + \delta r' = 0$  sein; die virtuelle Arbeit ist mithin Null.

§ 363. Ausdrücke für die lebendige Kraft eines in Bewegung befindlichen starren Körpers. Wenn sich ein Körper auf irgend eine Art bewegt, so ist seine lebendige Kraft in jedem Augenblick der lebendigen Kraft der ganzen in seinem Schwerpunkt vereinigten Masse gleich, zusammen mit der lebendigen Kraft, welche die Folge der Bewegung um den als festen Punkt betrachteten Schwerpunkt ist; oder

die lebendige Kraft des Körpers = der lebendigen Kraft in Folge der Translation  
+ der lebendigen Kraft in Folge der Rotation.

$x, y, z$  seien die Coordinaten eines Punktes, dessen Masse  $m$  und Geschwindigkeit  $v$  ist und  $\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}$  die Coordinaten des Schwerpunktes  $G$  des Körpers. Es sei  $x = \bar{x} + \xi, y = \bar{y} + \eta, z = \bar{z} + \zeta$ , dann sind nach einer Eigenschaft des Schwerpunktes  $\Sigma m\xi = 0, \Sigma m\eta = 0, \Sigma m\zeta = 0$ . Daher  $\Sigma m \frac{d\xi}{dt} = 0, \Sigma m \frac{d\eta}{dt} = 0, \Sigma m \frac{d\zeta}{dt} = 0$ . Die lebendige Kraft eines Körpers ist nun

$$\frac{1}{2} \Sigma m v^2 = \frac{1}{2} \Sigma m \left[ \left( \frac{dx}{dt} \right)^2 + \left( \frac{dy}{dt} \right)^2 + \left( \frac{dz}{dt} \right)^2 \right].$$

Setzt man für  $x, y, z$  ihre Werthe, so wird sie

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \Sigma m \left[ \left( \frac{d\bar{x}}{dt} \right)^2 + \left( \frac{d\bar{y}}{dt} \right)^2 + \left( \frac{d\bar{z}}{dt} \right)^2 \right] + \frac{1}{2} \Sigma m \left[ \left( \frac{d\xi}{dt} \right)^2 + \left( \frac{d\eta}{dt} \right)^2 + \left( \frac{d\zeta}{dt} \right)^2 \right] + \\ \frac{d\bar{x}}{dt} \Sigma m \frac{d\xi}{dt} + \frac{d\bar{y}}{dt} \Sigma m \frac{d\eta}{dt} + \frac{d\bar{z}}{dt} \Sigma m \frac{d\zeta}{dt}. \end{aligned}$$

Die sämtlichen Ausdrücke in der letzten Zeile verschwinden, wie es nach § 14 der Fall sein muss. Das erste Glied der ersten Zeile ist die lebendige Kraft der ganzen im Schwerpunkt vereinigten Masse  $\Sigma m$ . Das zweite ist die Folge der Rotation um den Schwerpunkt.

Man kann diesem Ausdruck für die lebendige Kraft eine bequemere Gestalt geben.

§ 364. Umformung des Ausdrucks für die lebendige Kraft. Erstens: die Bewegung finde in der Ebene statt. Siehe § 139.  $\bar{v}$  sei die Geschwindigkeit des Schwerpunktes,  $\bar{r}, \bar{\theta}$  seine Polarcoordinaten auf irgend einen Anfang in der Bewegungsebene bezogen.  $r_1$  sei der Abstand eines Punktes, dessen Masse  $m$  ist, vom Schwerpunkt,  $v_1$



seine Geschwindigkeit in Bezug auf den Schwerpunkt. Ferner möge  $\omega$  die Winkelgeschwindigkeit des ganzen Körpers um den Schwerpunkt und  $Mk^2$  das Trägheitsmoment für denselben Punkt sein.

Die lebendige Kraft der ganzen in  $G$  vereinigten Masse ist  $\frac{1}{2} M\bar{v}^2$ , der man auch die beiden anderen Formen

$$\frac{1}{2} Mv^2 = \frac{1}{2} M \left[ \left( \frac{d\bar{x}}{dt} \right)^2 + \left( \frac{d\bar{y}}{dt} \right)^2 \right] = \frac{1}{2} M \left[ \left( \frac{d\bar{r}}{dt} \right)^2 + \bar{r}^2 \left( \frac{d\bar{\theta}}{dt} \right)^2 \right]$$

geben kann.

Die lebendige Kraft um  $G$  ist  $\frac{1}{2} \Sigma m v_1^2$ . Da sich aber der Körper um  $G$  dreht, so hat man  $v_1 = r_1 \omega$ . Daher

$$\Sigma m v_1^2 = \omega^2 \cdot \Sigma m r_1^2 = \omega^2 \cdot Mk^2.$$

Die ganze lebendige Kraft des Körpers ist daher

$$\frac{1}{2} \Sigma m v^2 = \frac{1}{2} M\bar{v}^2 + \frac{1}{2} Mk^2 \omega^2.$$

Dreht sich der Körper um eine Momentanaxe, deren Abstand vom Schwerpunkt  $r$  ist, so hat man  $\bar{v} = r\omega$ . Daher

$$\frac{1}{2} \Sigma m v^2 = \frac{1}{2} M\omega^2 (r^2 + k^2) = \frac{1}{2} Mk'^2 \omega^2,$$

wo  $Mk'^2$  das Trägheitsmoment für die Momentanaxe ist.

*Zweitens: die Bewegung gehe in einem Raum von drei Dimensionen vor sich.*

$\bar{v}$  sei die Geschwindigkeit von  $G$ ;  $\bar{r}$ ,  $\bar{\theta}$ ,  $\bar{\varphi}$  seine Polarcoordinaten auf irgend einen Anfangspunkt bezogen.  $\omega_x$ ,  $\omega_y$ ,  $\omega_z$  seien die Winkelgeschwindigkeiten des Körpers um beliebige drei sich in  $G$  rechtwinklig schneidende Axen,  $A$ ,  $B$ ,  $C$  die Trägheitsmomente des Körpers für die Axen und  $\xi$ ,  $\eta$ ,  $\zeta$  die Coordinaten eines Massenpunktes  $m$  in Bezug auf diese Axen.

Die lebendige Kraft der ganzen in  $G$  vereinigten Masse ist  $\frac{1}{2} M\bar{v}^2$ , die man entweder

$$\frac{1}{2} M \left[ \left( \frac{d\bar{x}}{dt} \right)^2 + \left( \frac{d\bar{y}}{dt} \right)^2 + \left( \frac{d\bar{z}}{dt} \right)^2 \right]$$

oder

$$\frac{1}{2} M \left[ \left( \frac{d\bar{r}}{dt} \right)^2 + \bar{r}^2 \sin^2 \bar{\theta} \left( \frac{d\bar{\varphi}}{dt} \right)^2 + \bar{r}^2 \left( \frac{d\bar{\theta}}{dt} \right)^2 \right]$$

gleichsetzen kann, je nachdem man Cartesische oder Polarcoordinaten benutzen will.

Die lebendige Kraft in Folge der Bewegung um  $G$  ist

$$\frac{1}{2} \Sigma m v_1^2 = \frac{1}{2} \Sigma m \left[ \left( \frac{d\xi}{dt} \right)^2 + \left( \frac{d\eta}{dt} \right)^2 + \left( \frac{d\zeta}{dt} \right)^2 \right].$$

Es ist aber

$$\frac{d\xi}{dt} = \omega_y \xi - \omega_z \eta, \quad \frac{d\eta}{dt} = \omega_z \xi - \omega_x \xi, \quad \frac{d\xi}{dt} = \omega_x \eta - \omega_y \xi.$$

Setzt man diese Werthe ein und bedenkt, dass

$$A = \Sigma m(\eta^2 + \xi^2), \quad B = \Sigma m(\xi^2 + \xi^2), \quad C = \Sigma m(\xi^2 + \eta^2)$$

ist, so hat man

$$\frac{1}{2} \Sigma m v_1^2 = \frac{1}{2} [A \omega_x^2 + B \omega_y^2 + C \omega_z^2] -$$

$$(\Sigma m \xi \eta) \omega_x \omega_y - (\Sigma m \eta \xi) \omega_y \omega_z - (\Sigma m \xi \xi) \omega_x \omega_x.$$

Die lebendige Kraft der Bewegung um  $G$  lässt sich auch auf andre Weise ermitteln.  $\Omega$  sei die Winkelgeschwindigkeit um die Momentanaxe,  $I$  das Trägheitsmoment für sie. Die lebendige Kraft ist dann offenbar  $\frac{1}{2} I \Omega^2$ .  $I$  wurde nun in § 15 gefunden und in unsrem Fall ist  $\omega_1 = \Omega \alpha$ ,  $\omega_2 = \Omega \beta$ ,  $\omega_3 = \Omega \gamma$ , wenn man die Bezeichnung dieses Paragraphen beibehält. Durch Elimination von  $\alpha, \beta, \gamma$  kommt man zu demselben Resultat wie zuvor.

Sind die Coordinatenaxen die Hauptaxen für  $G$ , so reducirt sich der Ausdruck auf

$$\frac{1}{2} \Sigma m v_1^2 = \frac{1}{2} [A \omega_x^2 + B \omega_y^2 + C \omega_z^2].$$

Rotirt der Körper um einen Punkt  $O$ , welcher für den Augenblick fest liegt, so lässt sich auf dieselbe Art beweisen, dass die lebendige Kraft

$$\frac{1}{2} \Sigma m v^2 = \frac{1}{2} [A' \omega_x^2 + B' \omega_y^2 + C' \omega_z^2]$$

ist, wo  $A', B', C'$  die Hauptträgheitsmomente für den Punkt  $O$  und  $\omega_x, \omega_y, \omega_z$  die Winkelgeschwindigkeiten des Körpers um die Hauptaxen für  $O$  sind.

§ 365. Beispiele zur lebendigen Kraft. Beisp. 1. Ein starrer Körper von der Masse  $M$  bewegt sich auf beliebige Art im Raum und seine Lage wird durch die Coordinaten seines Schwerpunktes und die Winkel  $\theta, \varphi, \psi$  bestimmt, welche die Hauptaxen für den Schwerpunkt auf die in § 256 erklärte Art mit irgend welchen festliegenden Axen machen. Man zeige, dass seine doppelte lebendige Kraft durch

$$2T = M \left[ \left( \frac{dx}{dt} \right)^2 + \left( \frac{dy}{dt} \right)^2 + \left( \frac{dz}{dt} \right)^2 \right] + C \left( \frac{d\varphi}{dt} + \frac{d\psi}{dt} \cos \theta \right)^2 +$$

$$(A \sin^2 \varphi + B \cos^2 \varphi) \left( \frac{d\theta}{dt} \right)^2 + \sin^2 \theta (A \cos^2 \varphi + B \sin^2 \varphi) \left( \frac{d\psi}{dt} \right)^2 +$$

$$2(B - A) \sin \theta \sin \varphi \cos \psi \frac{d\theta}{dt} \frac{d\psi}{dt}$$

gegeben ist.

Man zeige auch, dass, wenn zwei Hauptmomente  $A$  und  $B$  gleich sind, der Ausdruck die einfachere Gestalt

$$2T = M \left[ \left( \frac{dx}{dt} \right)^2 + \left( \frac{dy}{dt} \right)^2 + \left( \frac{dz}{dt} \right)^2 \right] + C \left( \frac{d\varphi}{dt} + \frac{d\psi}{dt} \cos \theta \right)^2 + A \left[ \left( \frac{d\theta}{dt} \right)^2 + \sin^2 \theta \left( \frac{d\psi}{dt} \right)^2 \right]$$

annimmt. Man wird später öfter Gelegenheit haben, von diesen Formeln Gebrauch zu machen.

Beisp. 2. Ein Körper, welcher sich frei um einen festen Punkt bewegt, dehnt sich unter dem Einfluss der Wärme so aus, dass er seiner Structur und Gestalt nach immer sich selbst ähnlich bleibt. Wenn für die Ausdehnung das Gesetz gilt, dass der Abstand zwischen zwei beliebigen Massenpunkten bei der Temperatur  $\theta$  ihrem Abstand bei der Temperatur Null mit  $f(\theta)$  multiplicirt gleich sei, zu zeigen, dass die doppelte lebendige Kraft des Körpers

$$= A\omega_x^2 + B\omega_y^2 + C\omega_z^2 + \frac{1}{2}(A+B+C) \left[ \frac{d \log f(\theta)}{dt} \right]^2$$

ist, worin  $A, B, C$  die Hauptmomente für den festen Punkt bedeuten.

Beisp. 3. Ein Körper bewegt sich um einen festen Punkt und seine lebendige Kraft ist durch die Gleichung gegeben

$$T = \frac{1}{2} A \omega_x^2 + \frac{1}{2} B \omega_y^2 + \frac{1}{2} C \omega_z^2 - D \omega_y \omega_z - E \omega_z \omega_x - F \omega_x \omega_y.$$

Man zeige, dass die Winkelbewegungsgrößen um die Axen

$$\frac{\partial T}{\partial \omega_x}, \quad \frac{\partial T}{\partial \omega_y}, \quad \frac{\partial T}{\partial \omega_z}$$

sind.

Der Körper bewege sich frei, und  $T_0$  sei die lebendige Kraft der Translation.  $x, y, z$  seien die Coordinaten des Schwerpunktes in Bezug auf beliebige, rechtwinklige festliegende oder sich um einen festen Punkt bewegende Axen; man beweise, wenn Accente die Differentialquotienten nach der Zeit bezeichnen, dass

$$\frac{\partial T_0}{\partial x'}, \quad \frac{\partial T_0}{\partial y'}, \quad \frac{\partial T_0}{\partial z'}$$

die linearen Bewegungsgrößen parallel zu den Axen sind.

Beisp. 4. Die elliptischen Coordinaten eines Massenpunktes sind  $\lambda, \mu, \nu$  und  $h, k$  die Halbaxen der beiden focalen Kegelschnitte; man beweise, dass

$$2T = \frac{(\lambda^2 - \mu^2)(\lambda^2 - \nu^2)\lambda'^2}{(\lambda^2 - h^2)(\lambda^2 - k^2)} + \frac{(\mu^2 - \lambda^2)(\mu^2 - \nu^2)\mu'^2}{(\mu^2 - h^2)(\mu^2 - k^2)} + \frac{(\nu^2 - \lambda^2)(\nu^2 - \mu^2)\nu'^2}{(\nu^2 - h^2)(\nu^2 - k^2)}$$

die doppelte lebendige Kraft ist.

Man beachte, dass die Glieder mit den Producten von  $\lambda', \mu', \nu'$  fehlen. Das Resultat ergibt sich aus dem in Salmon's *Solid Geometry*, Art. 410 in elliptischen Coordinaten gegebenen Ausdruck für  $(ds)^2$ .

§ 366. Probleme zum Princip der lebendigen Kraft. Beisp. 1. Ein kreisförmiger Draht kann sich frei um einen verticalen Durchmesser als feste Axe drehen und ein Kügelchen kann unter der Wirkung der Schwere frei auf ihm gleiten. Das ganze System wird um die verticale Axe in Rotation gesetzt; man finde die nachfolgende Bewegung.

$M$  und  $m$  seien die Massen des Drahtes und des Kügelchens,  $\omega$  ihre gemeinschaftliche Winkelgeschwindigkeit um die Verticale.  $a$  sei der Radius des Drahtes,  $Mk^2$  sein Trägheitsmoment für den Durchmesser. Der Mittelpunkt des Drahtes werde zum Coordinatenanfang genommen und die  $y$ -Axe sei vertical abwärts

gerichtet.  $\theta$  sei der Winkel, den die  $y$ -Axe mit dem vom Centrum des Drahtes nach dem Kügelchen gezogenen Radius macht.

Da die Schwere in verticaler Richtung wirkt und alle Reactionen an der festen Axe durch die Axe gehen müssen, so ist offenbar das Moment aller Kräfte um den verticalen Durchmesser Null. Man hat daher, wenn man die Momente um die Verticale nimmt,

$$Mk^2\omega + ma^2\omega \sin^2\theta = h$$

und nach dem Princip der lebendigen Kraft

$$Mk^2\omega^2 + m \left[ a^2 \left( \frac{d\theta}{dt} \right)^2 + a^2 \sin^2\theta \omega^2 \right] = C + 2mga \cos\theta.$$

Diese beiden Gleichungen reichen zur Bestimmung von  $\frac{d\theta}{dt}$  und  $\omega$  hin. Löst man sie auf, so erhält man

$$\frac{h^2}{Mk^2 + ma^2 \sin^2\theta} + ma^2 \left( \frac{d\theta}{dt} \right)^2 = C + 2mga \cos\theta.$$

Diese Gleichung lässt sich nicht integrieren und  $\theta$  kann daher nicht durch  $t$  ausgedrückt werden. Zur Bestimmung der Constanten  $h$  und  $C$  muss man die Anfangsbedingungen der Bewegung zu Hilfe nehmen. Nimmt man an,  $\theta$  sei anfänglich  $= \pi$  und  $\frac{d\theta}{dt} = 0$  und  $\omega = \alpha$ , so ist  $h = Mk^2\alpha$  und  $C = 2mga + Mk^2\alpha^2$ . Siehe § 352.

Beisp. 2. Eine Lamelle von beliebiger Gestalt rollt auf einer vollkommen rauhen Geraden unter dem Einfluss keiner Kräfte; man beweise, dass die Geschwindigkeit  $v$  des Schwerpunktes  $G$  durch  $v^2 = c^2 \frac{r^2}{r^2 + k^2}$  gegeben ist, worin  $r$  den Abstand des Berührungspunktes von  $G$ ,  $k$  den Trägheitsradius der Lamelle für eine durch  $G$  gehende und auf ihrer Ebene senkrechte Axe und  $c$  eine Constante bedeutet.

Beisp. 3. Zwei gleiche Balken, die sich um einen durch ihre Schwerpunkte gehenden glatten Bolzen drehen können und die Gestalt eines X haben, werden symmetrisch auf zwei glatte Pföcke gesetzt, welche in derselben horizontalen Linie liegen und deren Abstand  $b$  ist. Im Anfang der Bewegung sind die Balken senkrecht zu einander; man zeige, dass die Geschwindigkeit ihres Schwerpunktes, wenn er die Verbindungslinie der Pföcke erreicht,  $\sqrt{\frac{b^2 g}{b^2 + 4k^2}}$  ist, worin  $k$  den Trägheitsradius eines jeden Balkens für eine durch seinen Schwerpunkt gehende auf ihm senkrechte Linie bedeutet.

Beisp. 4. Ein gleichförmiger Stab bewegt sich auf einem horizontalen Tisch um sein eines Ende und treibt einen Massenpunkt vor sich her, dessen Masse seiner eigenen gleich ist und der vom Zustand der Ruhe und von einer Lage, die dem festliegenden Ende unbegrenzt nahe ist, ausgeht. Man zeige, dass, wenn der Punkt die Strecke  $r$  längs des Stabes durchlaufen hat, seine Bewegungsrichtung mit dem Stab einen Winkel macht, dessen Tangente  $\sqrt{\frac{k}{r^2 + k^2}}$  ist.

[Christ's Coll.]

Beisp. 5. Eine dünne gleichförmige glatte Röhre balancirt horizontal um ihren Mittelpunkt, welcher festliegt; ein gleichförmiger Stab, welcher grade in die Höhlung der Röhre passt, wird in eine grade Linie mit der Röhre gebracht, so dass die beiden Enden widereinander liegen und alsdann mit solcher horizontaler Geschwindigkeit in sie gestossen, dass sein Mittelpunkt nur grade den Mittelpunkt

der Röhre erreicht; man finde unter der Annahme, die Wurfgeschwindigkeit sei bekannt, die Winkelgeschwindigkeit der Röhre und des Stabes in dem Moment, in welchem ihre Mittelpunkte zusammenfallen. [Math. Tripos.]

Resultat. Ist  $m$  die Masse des Stabes,  $m'$  der Röhre,  $2a$  bez.  $2a'$  ihre Längen,  $v$  die Geschwindigkeit, mit welcher der Stab geworfen wird,  $\omega$  die gesuchte Winkelgeschwindigkeit, so ist  $\omega^2 = \frac{3mv^2}{ma^2 + m'a'^2}$ .

Beisp. 6. Ein elastischer Faden, der in seinem natürlichen Zustand ebenso lang wie ein gleichförmiger Stab ist, wird mit seinen beiden Enden an die Enden des Stabes befestigt und in seinem Mittelpunkt aufgehängt; man beweise mit Hilfe der lebendigen Kraft, dass der Stab so lange sinkt, bis die beiden Theile des Fadens mit dem Horizont einen Winkel  $\theta$  machen, welcher der Gleichung  $\cotg^3 \frac{\theta}{2} - \cotg \frac{\theta}{2} - 2n = 0$  genügt, wobei die Spannung des Fadens, wenn er auf das Doppelte seiner Länge ausgedehnt wird,  $n$  mal so gross, als das Gewicht ist. [Math. Tripos.]

Beisp. 7. Der Mittelpunkt  $C$  eines kreisförmigen Rades liegt fest und der Rand wird gezwungen, gleichförmig auf einer vollkommen rauhen horizontalen Ebene so zu rollen, dass die Ebene des Rades mit der Verticalen den constanten Winkel  $\alpha$  macht. Längs des Umfangs ist ein gleichförmiger glatter Kanal von sehr kleinem Querschnitt eingeschnitten und ein schwerer Massenpunkt, welcher genau in den Kanal passt, kann unter der Wirkung der Schwere frei in ihm gleiten.  $m$  sei der Massenpunkt,  $B$  der Berührungspunkt des Rades und der Ebene;  $\theta = \angle B C m$ ;  $n$  die Winkelgeschwindigkeit, mit welcher  $B$  die Kreislinie auf der horizontalen Ebene beschreibt; man beweise, dass

$$\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 = \frac{2g}{a} \cos \alpha \cos \theta - n^2 \cos^2 \alpha \cos^2 \theta + \text{Const.}$$

ist, worin  $a$  den Radius des Rades bezeichnet. *Annales de Gergonne*, Tome XIX, 1860.

Beisp. 8. Ein regelmässiges homogenes Prisma, dessen Normalschnitt ein regelmässiges Polygon von  $n$  Seiten ist, rollt eine vollkommen rauhe schiefe Ebene hinab, die mit dem Horizont den Winkel  $\alpha$  macht. Wird der Radius des dem Polygon umschriebenen Kreises mit  $a$  und die Winkelgeschwindigkeit, grade ehe die  $n^{\text{te}}$  Kante zur Momentanaxe wird, mit  $\omega_n$  bezeichnet, so ist

$$\omega_n^2 - \frac{g \sin \alpha}{a \sin \frac{\pi}{n}} \frac{8 + \cos \frac{2\pi}{n}}{5 + 4 \cos \frac{2\pi}{n}} = \left( \frac{2 + 7 \cos \frac{2\pi}{n}}{8 + \cos \frac{2\pi}{n}} \right)^2 \left( \omega_{n-1}^2 - \frac{g \sin \alpha}{a \sin \frac{\pi}{n}} \frac{8 + \cos \frac{2\pi}{n}}{5 + 4 \cos \frac{2\pi}{n}} \right).$$

## Das Princip der Aehnlichkeit.

§ 367. Unter welchen Bedingungen sind zwei Systeme von Massenpunkten, welche Anfangs geometrisch ähnlich sind, einander auch mechanisch ähnlich, d. h. unter welchen Bedingungen sind die relativen Lagen der Massenpunkte in dem einen System nach der Zeit  $t$  den relativen Lagen in dem andern System nach einer anderen Zeit  $t'$  stets ähnlich, wenn  $t'$  zu  $t$  in constantem Verhältniss steht?

Mit andern Worten: man macht ein Modell von einer Maschine und findet, dass es zur Zufriedenheit arbeitet; unter welchen Be-

dingungen wird eine nach dem Modell ausgeführte Maschine ebens zufriedenstellend arbeiten?

Das Princip der Aehnlichkeit wurde zuerst von Newton in Prop. 32 Sect. VII des zweiten Buches seiner *Principia* aufgestellt<sup>1)</sup>. Der Beweis wurde jedoch durch Bertrand in Cahier XXXII des *Journal de l'Ecole polytechnique*, 1848 wesentlich verbessert. Er leitet das Theorem aus dem Princip der virtuellen Arbeit ab und vermeidet so die Einführung der unbekannten Reactionen, mit welchen andre Arten der Beweisführung beschwert sind. Da alle Bewegungsgleichungen sich aus dem allgemeinen Princip der virtuellen Arbeit ableiten lassen, scheint es am einfachsten, mit seiner Hülfe jedes allgemeine Theorem in der Dynamik zu behandeln.

§ 368.  $(x, y, z)$  seien die Coordinaten eines Punktes von der Masse  $m$  in einem System, welches auf beliebige rechtwinklige im Raum festliegende Axen bezogen wird, und  $(X, Y, Z)$  die Componenten der gegebenen *bewegenden* Kräfte, die an diesem Massenpunkte angreifen. Die entsprechenden Grössen in dem andern System seien durch dieselben Buchstaben mit einem Strich bezeichnet.

Das Princip der virtuellen Arbeit liefert dann die folgenden beiden Gleichungen

$$\sum \left[ \left( X - m \frac{d^2 x}{dt^2} \right) \delta x + \text{etc.} \right] = 0,$$

$$\sum \left[ \left( X' - m' \frac{d^2 x'}{dt'^2} \right) \delta x' + \text{etc.} \right] = 0.$$

Offenbar geht die eine dieser Gleichungen in die andre über, wenn man  $X' = FX$ ,  $Y' = FY$ , etc.,  $x' = lx$ ,  $y' = ly$ , etc.,  $m' = \mu m$ , etc.,  $t' = \tau t$ , etc. setzt, unter  $F$ ,  $l$ ,  $\mu$ ,  $\tau$  Constante versteht und voraussetzt, dass  $\mu l = F\tau^2$  ist. In zwei geometrisch ähnlichen Systemen haben wir nur ein Aehnlichkeitsverhältniss, nämlich das der linearen Dimensionen, in zwei mechanisch ähnlichen dagegen noch drei weitere Verhältnisse, nämlich das der Massen der Punkte, das der Kräfte, welche an ihnen angreifen und das der Zeiten, zu welchen die Systeme verglichen werden. Es leuchtet ein, dass, wenn die eben angegebenen Beziehungen zwischen den vier Aehnlichkeitsverhältnissen besteht, die Bewegungen der beiden Systeme ähnlich sein müssen.

Nimmt man also an, die beiden Systeme seien Anfangs einander geometrisch ähnlich, die Massen der entsprechenden Punkte seien

1) Schon Galilei wirft in seinen Dialogen die Frage auf, wie es kommt, dass zwei ähnlich construirte Maschinen nicht auch immer ähnliche Bewegungen zeigen, dass oft eine Maschine im Modell sehr gut ist, während sie im grossen Massstab ausgeführt, nicht das Gewünschte leistet. Er findet die Schwierigkeit in der Verschiedenheit der Widerstände, welche in beiden Maschinen auftreten. (Schell, Mechanik 1870, S. 883.)

einander proportional und sie begannen sich in parallelen Richtungen mit ähnlichen Bewegungen und in proportionalen Zeiten zu bewegen, so werden sie fortfahren, sich mit ähnlichen Bewegungen und in proportionalen Zeiten zu bewegen, wenn die äusseren bewegenden Kräfte in jedem System sich verhalten wie

das Verhältniss der Massen  $\propto$  dem Verhältniss der linearen Dimensionen  
 (Verhältniss der Zeiten)<sup>2</sup>

Da die Componenten der Geschwindigkeit eines jeden Punktes  $\frac{dx}{dt}$ , etc. sind, so müssen offenbar in zwei ähnlichen Systemen die Geschwindigkeiten der entsprechenden Punkte in den entsprechenden Zeiten sich verhalten wie  $\frac{\text{das Verhältniss der linearen Dimensionen}}{\text{Verhältniss der Zeiten}}$ . Eliminirt man

die Zeit aus diesen beiden Beziehungen, so findet man als Bedingung der Aehnlichkeit zweier Systeme, dass die bewegenden Kräfte sich verhalten müssen, wie

$\frac{\text{das Verhältniss der Massen} \propto (\text{dem Verh. der Geschwindigk.})^2}{\text{Verhältniss der linearen Dimensionen}}$ .

§ 369. Ueber Modelle. Bertrand bemerkt, dass man beim Vergleichen der Arbeit eines Modells mit der einer grossen Maschine dafür sorgen muss, dass alle Kräfte im richtigen Verhältniss stehen. Die Gewichte der verschiedenen Theile variiren wie ihre Massen. Daraus folgt, dass die Geschwindigkeit, mit der man das Modell gehen lässt, der Quadratwurzel aus seinen linearen Dimensionen proportional sein muss. Auch die Zeiten, in denen entsprechende Bogen beschrieben werden, müssen in demselben Verhältniss stehen.

Stehen der Gang des Modells und der grossen Maschine in einer solchen Beziehung, so gebraucht man auch wohl den Ausdruck „*entsprechende Geschwindigkeiten*“.

Wirken auch noch andre Kräfte ausser der Schwere auf das Modell, so müssen sie zu den entsprechenden Kräften der Maschine in demselben Verhältniss stehen, wenn das Modell der Maschine ähnlich sein soll. Wenn das Modell aus demselben Material wie die Maschine hergestellt wird, so variiren die Gewichte der verschiedenen Theile, wie die dritten Potenzen der linearen Dimensionen. Die gegebenen Kräfte müssen daher in demselben Verhältniss wie die Kuben der linearen Dimensionen stehen. Liegt z. B. das Modell einer Dampfmaschine vor, so variirt der Dampfdruck auf den Kolben wie das Product aus dem Flächeninhalt des Kolbens und dem Dampfdruck. Der Dampfdruck muss daher bei beiden in demselben Verhältniss stehen, wie die linearen Dimensionen des Modells zu dem der Maschine.

Wenn nun die gegebenen Kräfte in den beiden Systemen in dem richtigen Verhältniss zu einander stehen, so nehmen die gegenseitigen Reactionen zwischen den Theilen der Systeme von selbst das nämliche

Verhältniss an. Denn gibt man dem Princip der virtuellen Arbeit gemäss die geeigneten Verschiebungen und bildet auf diese Art die Bewegungsgleichungen zur Ermittlung dieser Reactionen, so sieht man leicht, dass sie sich wie die Kräfte zu einander verhalten. Da die gleitende Reibung wie der Normaldruck variirt und von den sich berührenden Flächen unabhängig ist, so stehen diese Reibungskräfte an der Maschine und dem Modell im richtigen Verhältniss. Nicht so verhält es sich mit der rollenden Reibung. Nach § 164 variirt die rollende Reibung umgekehrt wie der Durchmesser des Rades und steht daher bei dem Modell in einem grösseren Verhältniss zu den andern Kräften, als bei der Maschine. Wenn der Widerstand der Luft dem Product aus dem Inhalt der ihm ausgesetzten Fläche und dem Quadrat der Geschwindigkeit proportional ist, so stehen diese Widerstände bei dem Modell und der Maschine im richtigen Verhältniss.

§ 370. Beispiele. Als Beispiel wollen wir das Princip auf den Fall eines starren Körpers anwenden, welcher unter dem Einfluss der Schwere um eine feste Axe schwingt. Sollen die Bewegungen zweier Pendel ähnlich sein, so müssen sie gleiche Winkel beschreiben; die entsprechenden Zeiten sind daher den Schwingungszeiten proportional. Da die Kräfte wie das Product aus Masse und Schwere variiren, so folgt, dass das Quadrat der Schwingungszeit, wenn ein Pendel einen gegebenen Winkel durchschwingt, variiren muss, wie das Verhältniss der linearen Dimensionen zur Schwere.

Ferner nehme man den Fall eines Massenpunktes, der eine Bahn um ein Attractionscentrum beschreibt, dessen Kraft dem Product aus dem reciproken Quadrat seines Abstandes und einer Constanten  $\mu$  gleich ist. Aus dem Princip geht sofort hervor, dass das Quadrat der Zeitperiode direct wie der Kubus des Abstandes und umgekehrt wie  $\mu$  variiren muss. Es ist dies das dritte Kepler'sche Gesetz.

Beisp. Man soll die Durchbiegung einer Brücke von 15 m Länge und 100 Tonnen (à 1000 kg) Gewicht, wenn eine Maschine, die 20 Tonnen wiegt, mit der Geschwindigkeit von 64 km in der Stunde über sie fährt, durch Experiment feststellen, welche an einem Modell der Brücke gemacht werden, das 1,5 m lang ist und 2,8 kg wiegt. Man finde das Gewicht des Modells der Maschine und nehme an, das Modell der Brücke sei so steif, dass die statische Durchbiegung in der Mitte unter dem Modell der Maschine ein Zehntel derjenigen der Brücke unter der Maschine selbst beträgt und zeige, dass dann die Geschwindigkeit des Modells der Maschine etwa 5,6 m in der Secunde sein muss. [Coll. Exam. 1887.]

§ 371. Froude's Theorem. Froude benutzte bei seinen Versuchen zur Bestimmung des Widerstandes, den die Schiffe finden, kleine Modelle und bediente sich dabei der folgenden Regel: *Wenn die linearen Dimensionen eines Schiffes  $n$ -mal so gross als die des Modells sind, die mittleren Dichtigkeiten dagegen gleich sind und der bei der Geschwindigkeit  $V$  gemessene, dem Modell geleistete Widerstand  $R$  ist, dann findet bei der entsprechenden Geschwindigkeit, nämlich  $V\sqrt{n}$ , das Schiff den Widerstand  $Rn^3$ .*

Da Schiff und Modell ähnlich und von gleicher mittlerer Dichtigkeit sind, so sind die linearen Dimensionen der untergetauchten Theile wie  $n$  zu 1. Die Widerstände, welche ähnliche Körper in tiefem Wasser finden, variiren, wie man gefunden hat, nahezu wie die Quadrate der Geschwindigkeiten, multiplicirt mit dem Inhalt der benetzten Flächen, d. h. wenn die Geschwindigkeit des Schiffes  $n'$ -mal



so gross als die des Modells ist, so stehen die Widerstände in dem Verhältniss  $n^2 n'^2 : 1$ . Die Widerstände müssen nun in demselben Verhältniss stehen, wie die übrigen sich entsprechenden Kräfte, d. h. es muss  $n^2 n'^2 = n^3$  sein nach § 369. Mithin ist  $n' = \sqrt{n}$  und verhalten sich die Widerstände wie  $n^3$  zu 1.

Der Widerstand wird hauptsächlich dadurch hervorgerufen, dass das Schiff Wellen erzeugt, die sich beständig von dem Schiff wegbewegen. Weniger Widerstand erzeugt die Reibung zwischen Schiff und Wasser. Beide sind hier in grober Annäherung zusammengefasst, indem das Gesetz benutzt wurde, wie es sich aus den Versuchen ergibt. Vergl. White, *Manual of Nau. Architecture*, III. Aufl., London 1894; übersetzt von Schlick und von Hüllen, Leipzig, 1879.

§ 372. *Savart's Theorem.* In dem 29. Band der *Annales de Chimie* (Paris, 1825) beschreibt Savart zahlreiche Versuche, die er mit ähnlichen, Luft enthaltenden Gefässen anstellte, die Töne von verschiedener Höhenlage erzeugten. Er leitete aus ihnen das folgende allgemeine Gesetz ab:

*Wenn Luftmassen in zwei ähnlichen Gefässen enthalten sind, so ist die Anzahl der Schwingungen in einer gegebenen Zeit (d. h. die Höhe des erzeugten Tones) den linearen Dimensionen des Gefässes umgekehrt proportional.*

Dieses Savart'sche Theorem ergibt sich unmittelbar aus dem Princip der Aehnlichkeit. Theilt man die ähnlichen Gefässe in sich entsprechende Elemente, so sind die Bewegungen dieser Elemente einander ähnlich, wenn die Kräfte variiren wie  $\frac{\text{Verhältniss der Masse} \propto \text{Verhältnisse der linearen Dimensionen}}{(\text{Verhältnisse der Zeiten})^2}$ .

Nach dem Mariotte'schen Gesetz variirt aber die Kraft zwischen zwei Elementen, wie das Product aus der Berührungsfläche und der Dichtigkeit. Die Schwingungszeiten der entsprechenden Luftmassenpunkte müssen daher variiren wie die linearen Dimensionen des Gefässes.

Der Erste, der eine Erklärung des Savart'schen Gesetzes gab, war Cauchy. Er zeigte in einem an die Academie der Wissenschaften im Jahre 1829 gerichteten Mémoire, dass es sich aus der linearen Eigenschaft der Bewegungsgleichungen ergebe. Er verweist auf die allgemeinen Bewegungsgleichungen der elastischen Körper, deren Massenpunkte nur wenig verrückt werden, auch wenn die Elasticität in verschiedenen Richtungen verschieden ist. Diese Gleichungen, die dazu dienen, die Verrückungen ( $\xi, \eta, \zeta$ ) eines Massenpunktes durch die Zeit  $t$  und die Coordinaten ( $x, y, z$ ) auszudrücken, sind von zweierlei Art. Die eine bezieht sich auf alle Punkte im Innern des elastischen Körpers, die andre auf alle Punkte seiner Oberfläche. Man findet sie in jedem Lehrbuch der Elasticitätstheorie. Aus den Gleichungen ergibt sich, dass sie auch dann noch gelten, wenn man  $\xi, \eta, \zeta, x, y, z, t$  durch  $k\xi, k\eta, k\zeta, kx, ky, kz, kt$  ersetzt, unter  $k$  eine Constante verstanden, vorausgesetzt, dass man auch die beschleunigenden Kräfte im Verhältniss von  $k$  zu 1 verändert. Sind daher die beschleunigenden Kräfte Null, so reicht es aus, die Dimensionen des elastischen Körpers und die Anfangswerthe der Verrückungen in dem Verhältniss von 1 :  $k$  zu vergrössern, damit auch die allgemeinen Werthe von  $\xi, \eta, \zeta$  und die Schwingungszeiten in demselben Verhältniss variiren. Daraus leiten wir Cauchy's Verallgemeinerung des Savart'schen Gesetzes ab, nämlich:

*Wenn wir die Höhe des von einem Körper, einer Platte oder einem elastischen Stab ausgehenden Tones durch die Anzahl der in der Zeiteinheit hervorgebrachten Schwingungen messen, so variirt die Höhe umgekehrt wie die linearen Dimensionen des Körpers, der Platte oder des Stabes, vorausgesetzt, dass seine sämtlichen Dimensionen in einem gegebenen Verhältniss geändert werden.*

§ 373. *Imaginäre Zeit.* Die Bewegungsgleichungen eines Systems werden in die eines ähnlichen Systems durch Multiplication der Kräfte, Längen, Massen und Zeiten mit den Constanten  $F, l, \mu, \tau$  und dadurch übergeführt, dass man  $\mu l = F\tau^2$  setzt. Es ist jedoch möglich, dass die Systeme nur eine analytische

Aehnlichkeit bieten, denn ist  $F$  negativ und  $\mu, l$  positiv, so wird das Verhältniss der entsprechenden Zeiten imaginär. Der Wechsel des Vorzeichens von  $F$  ist selbstverständlich der Umkehrung der Richtung aller gegebenen Kräfte äquivalent.

Man nehme zum Beispiel die Bewegung eines einfachen Pendels, welches von der Ruhe ausgeht. Der Winkel, den der Faden zur Zeit  $t$  mit der Verticalen macht, kann durch ein elliptisches Integral ausgedrückt werden, welches zwei Perioden  $4k$  und  $4k'\sqrt{-1}$  hat, von denen die zweite während der Bewegung keine Bedeutung hat. Setzt man  $t' = t\sqrt{-1}$ , so gibt die letztere die Periode von  $t'$  an, nämlich die des Pendels, wenn die Schwere aufwärts gerichtet an ihm angriffe. Appell, *über eine Interpretation der imaginären Werthe der Zeit*, *Comptes Rendus*, 1878, Bd. 87, S. 1074. Painlevé, *Leçons etc., éq. diff. de la Mécanique*, 1895, S. 226.

§ 374. Die Theorie der Dimensionen. Man kann diese Resultate auch aus der Theorie der Dimensionen ableiten. Legt man die Bezeichnung des § 332 zu Grunde, so wird die Kraft  $F$  durch  $m \frac{d^2 x}{dt^2}$  gemessen. Wir können daher den allgemeinen Satz aufstellen, dass alle dynamischen Gleichungen derart sein müssen, dass in allen Gliedern der Raum in derselben Potenz auftreten muss, ebenso die Zeit und die Masse, wenn man annimmt, die Dimensionen der Kraft seien

$$\frac{\text{Masse} \times \text{Raum}}{(\text{Zeit})^2}.$$

Um zu zeigen, wie sich der Satz gebrauchen lässt, wollen wir ihn auf ein einfaches Pendel von der Länge  $l$  anwenden, das unter dem Einfluss der Schwere steht und dessen Schwingungen die Amplitude  $\alpha$  haben.  $m$  sei die Masse des Massenpunktes,  $F$  die bewegende Kraft der Schwere; dann kann die Schwingungsdauer  $\tau$  nur eine Function von  $F, l, m$  und  $\alpha$  sein. Diese Function werde in eine Reihe von Potenzen von  $F, l$  und  $m$  entwickelt, so dass

$$\tau = \Sigma A F^p l^q m^r$$

ist, worin  $A$ , als eine Function von  $\alpha$  allein, eine Zahl bedeutet. Da  $\tau$  im Raum keine Dimensionen hat, so ist  $p + q = 0$ ;  $\tau$  ist ferner in der Zeit von einer Dimension, daher  $-2p = 1$ ; schliesslich ist  $\tau$  von keiner Dimension in der Masse, also  $p + r = 0$ . Daraus folgt  $p = -\frac{1}{2}$ ,  $q = r = \frac{1}{2}$  und da sowohl  $p$  als  $q$  als  $r$  nur einen Werth haben, so hat die Reihe nur ein Glied. Daraus folgt, dass bei einem einfachen Pendel  $\tau = A \sqrt{\frac{m l}{F}}$  ist, worin  $A$  eine unbestimmte Zahl bedeutet. Siehe auch § 370.

Beisp. 1. Ein Massenpunkt bewegt sich in einem Mittel, dessen Widerstand wie die Geschwindigkeit variirt, vom Zustand der Ruhe aus nach einem Kraftcentrum hin, dessen Anziehung dem Abstand proportional ist; man zeige mit Hilfe der Theorie der Dimensionen, dass die Zeit, die er gebraucht, um das Kraftcentrum zu erreichen, von seiner Anfangslage unabhängig ist.

Raum nach einem Kraftcentrum hin, dessen Anziehung umgekehrt wie die  $n^{\text{te}}$  Potenz des Abstandes variirt; man zeige, dass die Zeit, die er gebraucht, um das Kraftcentrum zu erreichen, wie die  $\frac{n+1}{2}$ -te Potenz des Anfangsabstandes des Massenpunktes variirt.

## Die Clausius'sche Theorie der stationären Bewegung.

§ 375. *Man bestimme die mittlere lebendige Kraft eines Systems materieller Punkte, das sich in stationärer Bewegung befindet. Clausius, Pogg. Annalen, 141, 1870.*

Stationär wird hier jede Bewegung genannt, bei welcher sich nicht die Punkte von ihrer ursprünglichen Lage immer weiter entfernen und die Geschwindigkeiten sich nicht beständig in derselben Richtung ändern, sondern bei der sich die Punkte in einem begrenzten Raum bewegen und die Geschwindigkeiten nur innerhalb bestimmter Grenzen fluctuiren. Von dieser Art sind alle periodischen Bewegungen, wie die der Planeten um die Sonne, die Schwingungen elastischer Körper und ferner jene unregelmässigen Bewegungen, wie sie den Atomen und Molekülen eines Körpers zur Erklärung seiner Wärme zugeschrieben werden.

$x, y, z$  seien die Coordinaten eines Punktes in dem System und seine Masse sei  $m$ ;  $X, Y, Z$  seien die Componenten der an dem Punkt angreifenden Kräfte.

Es ist dann  $m \frac{d^2 x}{dt^2} = X$ . Durch einfache Differentiation erhält man (§ 286, Beisp. 4)

$$\frac{d^2(x^2)}{dt^2} = 2 \frac{d}{dt} \left( x \frac{dx}{dt} \right) = 2 \left( \frac{dx}{dt} \right)^2 + 2x \frac{d^2 x}{dt^2}$$

und daher

$$\frac{m}{2} \left( \frac{dx}{dt} \right)^2 = -\frac{1}{2} x X + \frac{m}{4} \frac{d^2(x^2)}{dt^2}.$$

Man integriere diese Gleichung in Bezug auf die Zeit von 0 bis  $t$  und dividire das Integral durch  $t$ , es wird dann

$$\frac{m}{2t} \int_0^t \left( \frac{dx}{dt} \right)^2 dt = -\frac{1}{2t} \int_0^t x X dt + \frac{m}{4t} \left\{ \frac{d(x^2)}{dt} - \left[ \frac{d(x^2)}{dt} \right]_0 \right\},$$

wobei der Index 0 an einer Grösse bedeutet, dass ihr Anfangswerth zu nehmen ist.

Die linke Seite und das erste Glied auf der rechten Seite der Gleichung sind offenbar die mittleren Werthe von  $\frac{m}{2} \left( \frac{dx}{dt} \right)^2$  und  $-\frac{1}{2} x X$  während der Zeit  $t$ .

Bei periodischen Bewegungen kann die Zeit  $t$  als Dauer einer Periode angenommen werden, bei unregelmässigen Bewegungen dagegen (und wenn man will auch bei periodischen) hat man nur zu beachten, dass die Zeit  $t$  im Verhältniss zu den Zeiten, während welcher sich der Punkt in derselben Richtung in Bezug auf irgend eine der Richtungen der Coordinaten bewegt, sehr gross ist, so dass im Verlauf der Zeit  $t$  viele Aenderungen der Bewegung vorgekommen und die obigen Ausdrücke für die mittleren Werthe hinreichend constant geworden sind. Das letzte Glied auf der rechten Seite wird, wenn die Bewegung periodisch ist, am Ende jeder Periode Null. Ist dagegen die Bewegung nicht periodisch, sondern ändert sich unregelmässig, so wird der in der Klammer eingeschlossene Factor nicht so regelmässig Null; jedoch kann sein Werth mit der Zeit nicht beständig wachsen, sondern nur zwischen gewissen Grenzen fluctuiren und der Divisor  $t$ , mit dem das Glied behaftet ist, muss es dementsprechend für sehr grosse Werthe von  $t$  verschwindend klein machen. Dasselbe gilt für Bewegungen, die den andern

Coordinaten parallel sind. Addirt man daher die Resultate für jeden Punkt, so erhält man, wenn  $v$  die Geschwindigkeit des Massenpunktes  $m$  bedeutet,

der mittlere Werth von  $\frac{1}{2} \Sigma m v^2 = -$  mittlerem Werth von  $\frac{1}{2} \Sigma (Xx + Yy + Zz)$ .

Der Mittelwerth von  $-\frac{1}{2} \Sigma (Xx + Yy + Zz)$  ist von Clausius *das Virial* des Systems genannt worden. Danach lässt sich sein Theorem so aussprechen: *Die mittlere lebendige Kraft des Systems ist seinem Virial gleich.*

§ 376. Der Anwendung des Satzes auf die mechanische Wärmetheorie schicken wir voraus, dass jeder Körper als ein System sich bewegender Massenpunkte anzusehen ist. So weit es unsern Satz angeht, können die Massenpunkte durchaus beliebige Bahnen beschreiben und jeder kann an dem andern beliebig nahe vorbeigehen. Da aber *hier* Zusammenstösse nicht in Rechnung gezogen sind, so muss man entweder annehmen, die Punkte würden von einer thatsächlichen Berührung durch starke Abstossungskräfte bei grosser Annäherung zurückgehalten, oder, was auf dasselbe hinauskommt, sie seien vollständig elastisch, so dass die gesammte lebendige Kraft durch Zusammenstösse nicht alterirt wird.

Die an dem System angreifenden Kräfte bestehen im Allgemeinen aus zwei Theilen. An erster Stelle üben die Elemente des Körpers Anziehungs- oder Abstossungskräfte aufeinander aus und dann können auch Kräfte von aussen her angreifen. Das Virial besteht daher aus zwei Theilen, welche *das innere* und *äussere Virial* heissen. Eben ist gezeigt worden, dass *die mittlere lebendige Kraft der Summe der beiden Theile gleich ist.*

Ist  $\varphi(r)$  das Abstossungsgesetz zwischen zwei Punkten, deren Massen  $m$  und  $m'$  sind, so hat man

$$Xx + X'x' = -\varphi(r) \frac{x' - x}{r} x - \varphi(r) \frac{x - x'}{r} x' = \varphi(r) \frac{(x' - x)^2}{r}$$

und, wenn man für die beiden andern Coordinaten die entsprechenden Gleichungen bildet, so wird das innere Virial  $-\frac{1}{2} \Sigma (Xx + Yy + Zz) = -\Sigma \frac{1}{2} r \varphi(r)$ , worin  $\Sigma$  die Summirung für die zu je zweien zusammengenommenen Massenpunkte angibt.

Das Volumen vergrössere sich und das System bleibe dabei sich selbst ähnlich. Jedes  $r$  wird jetzt so vergrössert, dass  $dr = \beta r$  ist, wobei  $\beta$  eine unendlich kleine Grösse bedeutet. Ist  $W$  die Arbeit der inneren Abstossungen, so hat man  $dW = \Sigma \varphi(r) \beta r$ . Ist  $V$  das Volumen des Körpers, so wird  $dV = 3\beta V$ . Daher  $-\Sigma \frac{1}{2} r \varphi(r) = -\frac{2}{3} V \frac{dW}{dV}$ . Dies liefert einen andern Ausdruck für das innere Virial, wenn man unter  $W$  die *mittlere* Arbeit versteht.

Was die äusseren Kräfte angeht, so kommt am häufigsten der Fall vor, dass auf den Körper ein gleichmässiger Druck normal zu seiner Oberfläche wirkt. Bedeutet  $p$  diesen Druck,  $d\sigma$  ein Element der Oberfläche,  $l$  den Cosinus des Winkels, den die Normale mit der  $x$ -Axe macht, so ist

$$-\frac{1}{2} \Sigma Xx = \frac{1}{2} \int x p l d\sigma = \frac{p}{2} \int x dy dz.$$

Versteht man unter  $V$  das Volumen des Körpers, so ist dies dasselbe wie  $\frac{1}{2} p V$  und daher das ganze äussere Virial  $\frac{3}{2} p V$ .

Nehmen wir an, ein Gas sei aus Massenpunkten zusammengesetzt, wie wir sie hier beschrieben haben, von denen sich jeder in Bewegung befindet, die aber nicht auf einander einwirken und die in dem umschliessenden Gefäss gleichmässig

vertheilt sind. Aus unserm Satz folgt  $\frac{1}{2} \Sigma m v^2 = \frac{3}{2} p V$ . Der resultirende stetige Druck  $p$ , welcher durch den Anstoss der Moleküle an die umschliessende Oberfläche hervorgebracht wird, ist daher, auf die Flächeneinheit bezogen, ein Drittel der lebendigen Kraft der Massenpunkte, welche eine Volumeneinheit einnehmen.

Der Leser, welcher sich für den Gegenstand interessirt, wird auf die *Applications of dynamics to physics and chemistry* von Prof. J. J. Thomson, 1888 verwiesen. (Deutsch erschienen im Jahr 1890, Leipzig.)

Beisp. 1. Man zeige, dass das Virial eines Kräftesystems von dem Coordinatenanfang und der Richtung der Axen, die rechtwinklig vorausgesetzt werden, unabhängig ist.

Der Beweis der ersten Behauptung ergibt sich daraus, dass bei stationärer Bewegung  $\Sigma X = 0$ , etc. Der für die zweite folgt aus der Gleichung

$$Xx + Yy + Zz = R\rho,$$

worin  $R$  die Resultante von  $X$ ,  $Y$ ,  $Z$  und  $\rho$  die Projection des Radiusvector auf die Richtung von  $R$  bedeutet.

## Allgemeine Sätze über Momentankräfte.

§ 377. Die allgemeine Gleichung der virtuellen Arbeit.  $(x, y, z)$  seien die Coordinaten eines Massenpunktes  $m$  und  $(X, Y, Z)$  die Componenten der auf ihn einwirkenden Momentankräfte in der Richtung der Axen.  $(u, v, w)$ ,  $(u', v', w')$  seien die Componenten der Geschwindigkeit des Massenpunktes in denselben Richtungen grade vor und grade nach dem Stoss.

Werden die Bewegungsgrössen  $m(u' - u)$ ,  $m(v' - v)$ ,  $m(w' - w)$  für jeden Massenpunkt umgekehrt, so stehen sie im Gleichgewicht mit den Momentankräften. Mithin erhält man nach dem Princip der virtuellen Arbeit

$$\Sigma m[(u' - u)\delta x + (v' - v)\delta y + (w' - w)\delta z] = \Sigma(X\delta x + Y\delta y + Z\delta z),$$

worin  $\delta x$ ,  $\delta y$ ,  $\delta z$  kleine willkürliche Verschiebungen des Massenpunktes  $m$  sind, die sich mit den geometrischen Bedingungen des Systems vereinigen lassen.

Dies ist die allgemeine Gleichung der virtuellen Arbeit; wir werden weiter unten sehen, dass sich die auf den Stoss folgende Bewegung des Systems aus ihr ableiten lässt. Für den Augenblick beschäftigen wir uns nur mit solchen allgemeinen Eigenschaften der Bewegung, die sich aus dieser Gleichung durch geeignete Wahl der willkürlichen Verschiebung ergeben.

§ 378. Carnot's erstes Theorem<sup>1)</sup>. Wir wollen zuerst annehmen, es seien nur solche Momentankräfte vorhanden, die durch die Actionen und Reactionen der Körper, welche das System bilden, hervorgerufen werden. (Es mögen z. B. zwei Körper widereinander stossen oder zwei Punkte plötzlich durch einen unelastischen Faden verbunden werden.) Dann befinden sich diese gegenseitigen Actionen und Reactionen im

1) Carnot, *Principes fondamentaux de l'équilibre et du mouvement*. Paris, 1803.

Gleichgewicht und die Summe ihrer virtuellen Arbeiten ist für alle Verrückungen, welche den Abstand zwischen den Massenpunkten, die aufeinander wirken, nicht ändern, gleich Null. Nimmt man an, die aufeinanderstossenden Körper seien unelastisch, so haben *grade nach dem Zusammenstoss* die Punkte der beiden Körper, die aufeinander treffen, keine Trennungsgeschwindigkeit normal zur gemeinschaftlichen Fläche der Körper. Nehmen wir daher als willkürliche Verrückung die thatsächliche Verrückung des Systems während der Zeit  $dt$  *grade nach dem Zusammenstoss*, so wird die Summe der virtuellen Arbeiten der Momentankräfte Null. Setzt man daher  $\delta x = u' \delta t$ ,  $\delta y = v' \delta t$ ,  $\delta z = w' \delta t$ , so ist

$$\Sigma m[(u' - u)u' + (v' - v)v' + (w' - w)w'] = 0.$$

Daher

$$\Sigma m(u'^2 + v'^2 + w'^2) = \Sigma m(uu' + vv' + ww'),$$

oder in anderer Gestalt

$$\begin{aligned} \Sigma m(u'^2 + v'^2 + w'^2) - \Sigma m(u^2 + v^2 + w^2) = \\ = - \Sigma m[(u' - u)^2 + (v' - v)^2 + (w' - w)^2]. \end{aligned}$$

*Mithin geht bei dem Zusammenstoss unelastischer Körper stets lebendige Kraft verloren.* Dies ist der erste Theil von Carnot's allgemeinem Theorem.

§ 379. Verallgemeinerung des Carnot'schen Theorems. Man beachte, dass Carnot's Beweis nicht ausschliesslich für Zusammenstösse gilt, sondern für alle Momentankräfte, die in der Gleichung der virtuellen Arbeit, als auf die folgende Verrückung verwendet, nicht auftreten. *Ein System kann sich auf beliebige Art bewegen und man kann plötzlich neue Zwangsbedingungen oder geometrische Beziehungen einführen, durch welche einige Massenpunkte gezwungen werden, eine neue Bahn einzuschlagen.* Die Momentankräfte, welche diese Aenderung der Bewegung hervorrufen, besitzen die Natur von Reactionen und bei der folgenden Bewegung sind ihre virtuellen Arbeiten Null. Es ergibt sich daher, *dass lebendige Kraft verloren geht und dass der Betrag der verlorenen lebendigen Kraft der lebendigen Kraft der relativen Bewegung gleichkommt.* Dies wird auch zuweilen das Bertrand'sche Theorem genannt.

§ 380. Carnot's zweites Theorem. Wir wollen weiter annehmen, eine Explosion fände in einem Körper des Systems statt. Dann bewegen sich irgend zwei Massenpunkte, welche im Begriff sind sich zu trennen, *grade vor dem Stoss* so, dass die virtuellen Arbeiten ihrer gegenseitigen Actionen gleich und entgegengesetzt sind, *grade nach der Explosion* braucht dies aber nicht der Fall zu sein. Wir setzen daher

jetzt  $\delta x = u \delta t$ ,  $\delta y = v \delta t$ ,  $\delta z = w \delta t$  und erhalten aus der Gleichung der virtuellen Momente

$$\Sigma m[(u' - u)u + (v' - v)v + (w' - w)w] = 0,$$

oder in anderer Form

$$\begin{aligned} \Sigma m(u'^2 + v'^2 + w'^2) - \Sigma m(u^2 + v^2 + w^2) = \\ \Sigma m[(u' - u)^2 + (v' - v)^2 + (w' - w)^2]. \end{aligned}$$

Daher wird im Fall einer Explosion stets lebendige Kraft gewonnen. Dies ist der zweite Theil des Carnot'schen Theorems.

**Carnot's drittes Theorem.** Die Körper des Systems sind vollkommen elastisch. Stossen zwei elastische Körper aufeinander, so besteht die ganze Wirkung aus zwei Theilen, einer Compressionskraft, als ob die Körper unelastisch wären, und einer Restitutionskraft von der Natur einer Explosion. Die Umstände der beiden Kräfte sind gleich und einander entgegengesetzt. Daher wird die bei der Compression verlorene lebendige Kraft genau durch die bei der Restitution gewonnene aufgewogen. Dies ist der letzte Theil des Carnot'schen Theorems.

§ 381. Als ein Beispiel zu dem Carnot'schen Theorem wollen wir das Problem des ballistischen Pendels, das schon in § 124 besprochen wurde, anführen.

Vor dem Zusammenstoss ist das Pendel in Ruhe und hat die Kugel die Geschwindigkeit  $v$ ; die lebendige Kraft ist daher  $\frac{1}{2}mv^2$ . Nach dem Zusammenstoss bewegen sich Kugel und Pendel zusammen und ist die lebendige Kraft  $\frac{1}{2}(Mk'^2 + mi^2)\omega^2$ . Um die lebendige Kraft der relativen Bewegung zu finden, bemerke man, dass (1) die Geschwindigkeit der Kugel von  $v$  in  $i\omega$  übergegangen ist und ihre Richtung um den Winkel  $\beta$  sich gedreht hat; die lebendige Kraft seiner relativen Bewegung ist daher  $\frac{1}{2}m(i^2\omega^2 + v^2 - 2i\omega v \cos \beta)$ ; dass (2) die Winkelgeschwindigkeit des Pendels sich von 0 in  $\omega$  verwandelt hat und daher die lebendige Kraft der relativen Bewegung  $\frac{1}{2}Mk'^2\omega^2$  ist. Man erhält nach dem Carnot'schen Satz

$$mv^2 - (Mk'^2 + mi^2)\omega^2 = m(i^2\omega^2 + v^2 - 2i\omega v \cos \beta) + Mk'^2\omega^2$$

oder reducirt  $mv i \cos \beta = (Mk'^2 + i^2)\omega$ ,

womit die Anfangsbewegung nach dem Stoss gefunden ist. Verschiedene Beispiele für die Anwendung des Carnot'schen Theorems findet man in Appell's *Cours de Mécanique*, II, Paris, 1896, S. 496.

§ 382. **Drei Formen der Gleichung der virtuellen Arbeit.** Wir wollen jetzt die allgemeine Gleichung der virtuellen Arbeit für ein unter der Wirkung beliebiger Momentankräfte sich bewegendes System wieder aufnehmen. Wir haben eben gesehen, dass es zwei Verrückungen gibt, die man mit Vortheil als willkürliche Verrückung wählen kann. Die eine fällt mit der Bewegung grade vor, die andre mit der grade nach der Wirkung der Momentankräfte zusammen. Die Gleichungen kann man schreiben

$$\Sigma m[(u' - u)u + (v' - v)v + (w' - w)w] = \Sigma(Xu + Yv + Zw),$$

$$\Sigma m[(u' - u)u' + (v' - v)v' + (w' - w)w'] = \Sigma(Xu' + Yv' + Zw').$$

Ausserdem gibt es aber noch viele verschiedene Bewegungen, welche geometrisch möglich sind.  $(u'', v'', w'')$  seien die Componenten der Geschwindigkeit des typischen Massenpunktes  $m$  für irgend eine dieser möglichen Bewegungen. Man kann dann setzen  $\delta x = u'' \delta t$ ,  $\delta y = v'' \delta t$ ,  $\delta z = w'' \delta t$  und erhält

$$\Sigma m[(u' - u)u'' + (v' - v)v'' + (w' - w)w''] = \Sigma(Xu'' + Yv'' + Zw'').$$

Diese Gleichung enthält die beiden früheren Fälle als Specialfälle.

Diese mögliche Bewegung hätte man von dem Anfangszustand aus durch die Anbringung geeigneter Momentankräfte erzeugen können. Die letzteren mögen durch  $X', Y', Z'$  dargestellt werden. Alsdann wird mittelst dieser Kräfte der Zustand  $(u'', v'', w'')$  die thatsächliche folgende Bewegung und unsre frühere folgende Bewegung wird eine blosser Variation derselben. Es lassen sich auf diese Art drei weitere Gleichungen aufstellen, die man durch Vertauschung von  $(u', v', w')$  mit  $(u'', v'', w'')$  und von  $(X, Y, Z)$  mit  $(X', Y', Z')$  aus den früheren erhält.

Aus diesen Gleichungen ergeben sich verschiedene allgemeine Sätze. Um jedoch die analytische Untersuchung möglichst einfach zu gestalten, wollen wir eine einfache Bezeichnungsweise einführen.

§ 383. Eine geeignete Bezeichnungsweise.  $T$  sei die anfängliche lebendige Kraft des Systems.  $T'$  sei die lebendige Kraft nach der Anbringung einer Gruppe von Momentankräften, die wir als die Gruppe  $A$  bezeichnen wollen und die resultirende Bewegung möge die Bewegung  $A$  heissen.  $T''$  sei die lebendige Kraft irgend einer möglichen Variation dieser Bewegung, welche wir die Bewegung  $B$  nennen wollen, und die Kräfte, welche sie erzeugen, seien die Kräfte  $B$ . Wir haben auch die lebendige Kraft der relativen Bewegung irgend zweier von ihnen nöthig. Nimmt man z. B. die beiden ersten und drückt die lebendige Kraft der relativen Bewegung durch  $R_{01}$  aus, so ist

$$2R_{01} = \Sigma m[(u' - u)^2 + (v' - v)^2 + (w' - w)^2] = \\ 2T' + 2T - 2\Sigma m(uu' + vv' + ww'),$$

daher

$$\Sigma m(uu' + vv' + ww') = T + T' - R_{01}.$$

Ebenso ergibt sich, wenn man die lebendigen Kräfte der übrigen relativen Bewegungen  $R_{02}$  und  $R_{12}$  nennt,

$$\Sigma m(uu'' + vv'' + ww'') = T + T'' - R_{02},$$

$$\Sigma m(u'v'' + v'w'') = T' + T'' - R_{12}.$$

Die Accente der  $T$  auf der rechten Seite und die Indices der  $R$  entsprechen daher in allen drei Gleichungen den Accenten auf der linken Seite.

Die drei Gleichungen, welche in § 382 aus dem Princip der virtuellen Arbeit abgeleitet wurden, lassen sich daher schreiben

$$T' - T - R_{01} = \text{virt. Arb. der Kräfte } A \text{ bei der anfänglich gegebenen Bewegung,}$$

$$T' - T + R_{01} = \text{virt. Arb. der Kräfte } A \text{ bei der Bewegung } A,$$

$$T' - T - R_{12} + R_{02} = \text{virt. Arb. der Kräfte } A \text{ bei der Bewegung } B,$$

wobei der Divisor  $dt$  auf der rechten Seite der Kürze halber weggelassen wurde. Man kann statt dessen auch sagen, die rechten Seiten drückten die Geschwindigkeit aus, mit welcher die Kräfte  $A$  bei den bezüglichen Bewegungen Arbeit verrichten oder



auch die rechten Seiten drückten die Summen der Producte, die man durch Multiplication einer jeden Kraft mit der Componenten der Geschwindigkeit ihres Angriffspunktes in die Richtung der Kraft erhält, für die betreffende specielle Bewegung aus.

§ 384. Die durch Momentankräfte erzeugte Aenderung der lebendigen Kraft. Durch Addition der beiden Gleichungen des § 382

$$\Sigma m(u' - u)u + \dots = \Sigma Xu + \dots,$$

$$\Sigma m(u' - u)u' + \dots = \Sigma Xu' + \dots$$

erhält man

$$\Sigma m(u'^2 - u^2) + \dots = \Sigma X(u' + u) + \dots$$

Da die linke Seite die Differenz zwischen der lebendigen Kraft vor und nach der Wirkung der Stosskräfte ist, so gelangen wir zu dem folgenden Theorem: *Wenn Momentankräfte auf ein sich bewegendes System wirken, so ist die Aenderung der lebendigen Kraft der Summe der Producte gleich, welche man durch Multiplication einer jeden Momentankraft mit dem mittleren Werth der Componenten der Geschwindigkeiten ihres Angriffspunktes grade vor und grade nach der Wirkung der Momentankraft in die Richtung dieser Kraft erhält.* Ein anderer Beweis dieses Theorems für den Fall eines einzelnen Körpers ist in § 346 gegeben worden.

§ 385. Die lebendige Kraft der relativen Bewegung. Durch Subtraction erhält man aus den beiden Gleichungen des § 382, nämlich

$$\Sigma m(u' - u)u + \dots = \Sigma Xu + \dots,$$

$$\Sigma m(u' - u)u' + \dots = \Sigma Xu' + \dots,$$

die Gleichung

$$\Sigma m(u' - u)^2 + \dots = \Sigma X(u' - u) + \dots$$

*Wenn daher Momentankräfte auf ein sich bewegendes System wirken, so ist die lebendige Kraft der relativen Bewegung der Summe der Producte gleich, welche man durch Multiplication einer jeden Momentankraft mit dem halben Ueberschuss der Componente der Geschwindigkeit ihres Angriffspunktes grade nach über die grade vor der Wirkung der Momentankraft in die Richtung dieser Kraft erhält.*

§ 386. Zwei verschiedene Arten von Stößen lassen sich vorstellen; (1) kann man sich denken, gewisse Punkte des Systems würden plötzlich ergriffen und gezwungen, sich mit gegebener Geschwindigkeit in einer vorgeschriebenen Art zu bewegen, wie in § 288; (2) kann man annehmen, gegebene Momentankräfte wirkten auf gewisse Punkte wie in § 306. In dem ersten Fall sind die resultirenden Verschiebungen der Angriffspunkte der Momentankräfte  $X, Y, Z$  gegeben, die Momentankräfte selbst dagegen unbekannt. In dem letzteren sind die Momentan-

kräfte  $X, Y, Z$  gegeben, dagegen die Verschiebungen der Angriffspunkte nicht bekannt. Oder auch im ersten Fall ist der Zwang gegeben, im zweiten die Momentankräfte. Wir wollen sie nacheinander untersuchen.

**Der Zwang sei gegeben.** Dem System mögen zwei verschiedene virtuelle Verschiebungen gegeben werden, welche sich beide mit den vorgeschriebenen Bedingungen vertragen. Die eine von ihnen habe die Richtung der thatsächlichen Bewegung; es ist dann

$$\Sigma m(u' - u)u' + \dots = \Sigma Xu' + \dots,$$

worin auf der rechten Seite  $u', v', w'$  den vorgeschriebenen Verschiebungen der Angriffspunkte der Momentankräfte *proportional* sind und auf der linken  $u', v', w'$  den thatsächlichen Verschiebungen des Massenpunktes  $m$ .

Die zweite Verschiebung möge die Richtung irgend einer geometrisch möglichen Bewegung des Systems haben; dann ist

$$\Sigma m(u' - u)u'' + \dots = \Sigma Xu' + \dots,$$

worin  $u'', v'', w''$  die Componenten der Geschwindigkeit des Punktes  $m$  bei dieser hypothetischen Bewegung, die Factoren von  $X, Y, Z$  auf der Rechten aber die nämlichen wie zuvor sind, weil die Bewegungen der Angriffspunkte vorgeschrieben sind. Man erhält daher

$$\Sigma m(u' - u)u' + \dots = \Sigma m(u' - u)u'' + \dots$$

und daraus

$$\Sigma m(u' - u)^2 + \dots + \Sigma m(u'' - u')^2 + \dots = \Sigma m(u'' - u)^2 + \dots$$

Jede dieser Summen ist die doppelte lebendige Kraft einer relativen Bewegung. Stellt man sie durch  $2R_{01}, 2R_{12}, 2R_{02}$  dar (§ 383), so ergibt sich

$$R_{01} + R_{12} = R_{02}.$$

Daraus folgt, dass  $R_{02}$  grösser als  $R_{01}$  ist. Wenn daher Momentankräfte auf ein sich bewegendes System wirken und die Verschiebungen der Angriffspunkte in der Zeit  $dt$  vorgeschrieben sind, so ist die thatsächliche Bewegung derart, dass die lebendige Kraft der relativen Bewegung vorher und nachher kleiner ist, als wenn das System irgend einen andern Weg nähme.

§ 387. **Kelvin's Theorem.** Geht das System vom Zustand der Ruhe aus, so sind die durch  $u, v, w$  dargestellten Geschwindigkeiten Null. Man erhält dann, wie in dem letzten Paragraphen,

$$\Sigma mu'^2 + \dots = \Sigma mu'u'' + \dots;$$

daher

$$\Sigma mu'^2 + \dots + \Sigma m(u'' - u')^2 + \dots = \Sigma mu''^2 + \dots$$

Bezeichnet man, wie in § 283, die lebendige Kraft der thatsächlichen

Bewegung nach dem Stoss mit  $T'$ , die der hypothetischen Bewegung mit  $T''$ , der relativen mit  $R_{12}$ , so wird die Gleichung

$$T' + R_{12} = T''.$$

*Befindet sich mithin ein System in Ruhe und wird durch Stösse oder Schläge auf gegebene Punkte so in Bewegung gesetzt, dass die Bewegungen dieser Punkte vorgeschrieben sind, dann ist die lebendige Kraft der nun folgenden Bewegung geringer, als die jeder andern hypothetischen Bewegung des Systems, bei welcher diese Punkte die vorgeschriebene Bewegung haben.* Natural Philosophy von Thomson und Tait Art. 312.

§ 388. Die Momentankräfte seien gegeben. Man betrachte zwei geometrisch mögliche Bewegungen des Systems. Die eine sei die thatsächliche Bewegung, bei welcher  $u', v', w'$  die Componenten der Geschwindigkeit des Massenpunktes  $m$  sind, und die zweite sei irgend eine andre Bewegung derart, dass wir das System durch Einführung des richtigen Zwangs ohne Reibung nöthigen können diese Bewegung anzunehmen. Jeder Punkt möge z. B. dadurch, dass man ihn, wie ein Kügelchen, an einen glatten Draht befestigt, gezwungen werden, sich in einer geometrisch möglichen Richtung zu bewegen.  $u'', v'', w''$  sollen die Componenten der Geschwindigkeit des Massenpunktes  $m$  bei dieser Bewegung darstellen.

Gibt man dem System unter der Annahme, es besitze die erste Bewegung, eine virtuelle Verrückung in der Richtung der zweiten, so ist

$$\Sigma m(u' - u)u'' + \dots = \Sigma Xu'' + \dots.$$

Nimmt man nun an, das System habe die zweite Bewegung und beachtet, dass die Arbeit der Zwangsreactionen Null ist, (§ 362), so erhält man

$$\Sigma m(u'' - u)u'' + \dots = \Sigma Xu'' + \dots;$$

daher

$$\Sigma m(u' - u)u'' + \dots = \Sigma m(u'' - u)u'' + \dots$$

und

$$\Sigma m(u' - u'')^2 + \dots + \Sigma mu''^2 + \dots = \Sigma mu'^2 + \dots.$$

Bezeichnet man mit  $T'$  die lebendige Kraft der thatsächlichen Bewegung nach dem Stoss, mit  $T''$  die der hypothetischen, und mit  $R_{12}$  die der relativen, so gibt diese Gleichung

$$R_{12} + T'' = T'.$$

Daraus folgt, dass  $T'$  grösser ist als  $T''$ . Angenommen also, es wirkten auf ein in Bewegung befindliches System irgend welche Momentankräfte, so ist die lebendige Kraft der nun folgenden Bewegung grösser, als wenn das System zusätzlichen Zwangsbedingungen unterworfen und von denselben Momentankräften angegriffen würde. Wir kommen so zu einem Theorem von Lagrange, das zuerst von Delaunay in Liouville's Journal, Vol. V und später von Bertrand in seinen Noten zur *Mécanique analytique* verallgemeinert wurde. Siehe § 379.

Vergleicht man die Theoreme Kelvin's und Bertrand's, so ist ersichtlich, dass man bei gegebener Bewegung der Angriffspunkte der Momentankräfte die folgende Bewegung dadurch finden kann, dass man die lebendige Kraft zu einem *Minimum*, bei gegebenen Momentankräften dagegen dadurch, dass man Zwangsbedingungen einführt und die lebendige Kraft zu einem *Maximum* macht.

**Beispiele.** Zum bessern Verständniss der beiden Sätze wollen wir ihre Anwendung auf einige einfache Fälle der Bewegung untersuchen.

**Beisp. 1.** *Ein in Ruhe befindlicher Körper, von welchem ein Punkt O festliegt, wird von einer gegebenen Momentankraft getroffen; man finde die resultirende Bewegung.* Siehe §§ 308, 310.

$L, M, N$  seien die gegebenen Componenten der Momentankraft um die Hauptaxen für  $O$ . Wenn sich nun der Körper um eine *im Raum festliegende* Axe, deren Richtungscosinusse ( $l, m, n$ ) sind, zu drehen beginnt, so findet man nach § 89 die Winkelgeschwindigkeit  $\omega$  aus

$$(Al^2 + Bm^2 + Cn^2)\omega = Ll + Mm + Nn.$$

Um die Axen zu finden, um welche sich der Körper, *wenn er frei ist*, zu drehen beginnt, muss man nach dem Lagrange'schen Theorem die lebendige Kraft zu einem Maximum machen. Man setze also

$$(Al^2 + Bm^2 + Cn^2)\omega^2 = \text{Maximum},$$

wobei noch die Bedingung besteht  $l^2 + m^2 + n^2 = 1$ . Behandelt man die drei Gleichungen auf die gewöhnliche aus der Differentialrechnung bekannte Art, so ergibt sich

$$\frac{Al}{L} = \frac{Bm}{M} = \frac{Cn}{N}.$$

Diese Gleichungen bestimmen die Richtungscosinusse der Axe, um die der Körper sich zu drehen beginnt.

**Beisp. 2.** Vier gleiche Stäbe, die sich in Ruhe befinden, sind durch glatte Gelenke so miteinander verbunden, dass sie einen Rhombus  $ABCD$  bilden, dessen Winkel bei  $A$ ,  $60^\circ$  beträgt. Man beweise mittelst des Kelvin'schen Satzes, dass die Anfangswinkelgeschwindigkeit eines jeden Stabes, wenn die Ecke  $A$  plötzlich mit der Geschwindigkeit  $V$  in der Richtung der Diagonale  $CA$  bewegt wird,  $\frac{3V}{7a}$  ist, unter  $2a$  die Länge eines Stabes verstanden.

Bedeutet  $2\theta$  den Winkel bei  $A$  und  $\omega$  die Winkelgeschwindigkeit eines Stabes, so ist die lebendige Kraft

$$\frac{1}{2}V^2 + 4Va\omega \sin \theta + 5a^2\omega^2 \sin^2 \theta + a^2\omega^2 \cos^2 \theta + k^2\omega^2;$$

setzt man ihren Differentialquotienten in Bezug auf  $\omega$  gleich Null, er erhält man den Anfangswerth von  $\omega$ , der das gesuchte Resultat liefert, wenn  $2\theta = 60^\circ$  ist.

**Beisp. 3.** Ein Körper, von dem ein Punkt  $O$  im Raum festliegt, befindet sich in Bewegung. Plötzlich wird eine im Körper festliegende Gerade  $OC$  gezwungen, sich um  $O$  auf gegebene Art zu drehen; man finde die Bewegung; § 293.

Die augenblickliche Lage von  $OC$  sei die  $z$ -Axe. Die vorhergehende Bewegung des Körpers sei durch die Winkelgeschwindigkeiten  $\omega_1, \omega_2, \omega_3$  gegeben und die vorgeschriebene Bewegung von  $OC$  durch die Winkelgeschwindigkeiten  $\theta, \varphi$  um die  $x$ - und  $y$ -Axe.  $\Omega$  sei die gesuchte Winkelgeschwindigkeit des Körpers um  $Oz$ . Die doppelte lebendige Kraft der relativen Bewegung vorher und nachher ist

$$A(\theta - \omega_1)^2 + B(\varphi - \omega_2)^2 + C(\Omega - \omega_3)^2 - 2D(\varphi - \omega_2)(\Omega - \omega_3) - \\ 2E(\theta - \omega_1)(\Omega - \omega_3) - 2F(\theta - \omega_1)(\varphi - \omega_2).$$

Sie ist nach § 386 zu einem Minimum zu machen. Durch Differentiation in Bezug auf  $\Omega$  erhält man

$$C(\Omega - \omega_3) - D(\varphi - \omega_2) - E(\theta - \omega_1) = 0,$$

wodurch ausgedrückt wird, dass die Winkelbewegungsgrösse um  $OC$  unverändert bleibt.

Beisp. 4. Einen in Ruhe befindlichen Stab  $AB$  trifft eine Stosskraft  $F$  senkrecht zu seiner Länge auf das Ende  $A$ , welches sich mit der Geschwindigkeit  $f$  zu bewegen beginnt. Man finde den Punkt  $O$  in  $AB$ , um welchen der Stab zu rotiren beginnt, (1) wenn  $F$ , (2) wenn  $f$  gegeben ist. Man setze  $AO = x$  und zeige, dass sowohl nach Kelvin's wie nach Lagrange's oder Bertrand's Theorem dieselbe Function von  $x$  zu einem Minimum gemacht werden muss.

Beisp. 5. Ein System bewegt sich auf beliebige Art. Ein Stoss wird einem Punkt senkrecht zu der Bewegungsrichtung des Punktes gegeben. Man beweise, dass die lebendige Kraft wächst.

Dies folgt aus der ersten der Gleichungen in § 383; denn die virtuelle Arbeit dieser Kraft (dort  $A$  genannt) verschwindet bei der Anfangsbewegung. Daher ist  $T' = T + R_{01}$ .

Beisp. 6. Wenn auf ein in Ruhe befindliches System zwei verschiedene Gruppen von Momentankräften wirken, die  $A$  und  $B$  heissen mögen, so wird es zwei verschiedene Bewegungen annehmen.

Man beweise, dass die Summe der virtuellen Arbeiten der Kräfte  $A$  in Bezug auf Verrückungen, die durch die Geschwindigkeiten bei der Bewegung  $B$  dargestellt werden, der Summe der virtuellen Arbeiten der Kräfte  $B$  für Verrückungen, die durch die Geschwindigkeiten bei der Bewegung  $A$  dargestellt werden, gleich ist.

Da  $T = 0$ ,  $T' = R_{01}$  und  $T'' = R_{02}$  ist, so ergibt sich die Antwort durch die Zusammenstellung der dritten Gleichungen in den §§ 383 und 388.

§ 389. Unvollkommen elastische und raue Körper. Stossen zwei Körper eines unvollkommen elastischen und rauhen Systems widereinander, so lassen sich aus den Gleichungen des § 382 einige Ausdehnungen des Carnot'schen Theorems ableiten.

$(u, v, w)$ ,  $(u', v', w')$ ,  $(u'', v'', w'')$  seien die Componenten der Geschwindigkeit eines Massenpunktes  $m$ , grade ehe der Stoss beginnt, in dem Moment der grössten Compression und grade nach dem Ende des Stosses. Die lebendige Kraft des Systems möge in jedem dieser Augenblicke mit  $T$ ,  $T'$ ,  $T''$  bezeichnet werden und die lebendige Kraft der relativen Bewegung für je zwei solche Augenblicke mit  $R_{01}$ ,  $R_{12}$ ,  $R_{02}$ .

Wenn die aufeinander stossenden Körper vollkommen glatt sind, so erhält man auf dieselbe Art wie in den §§ 378, 380

$$\sum m[(u' - u)u' + \text{etc.}] = 0 \quad . \quad . \quad . \quad (1),$$

$$\sum m[(u'' - u)u' + \text{etc.}] = 0 \quad . \quad . \quad . \quad (2).$$

Da der ganze Zusammenstoss der beiden Körper zu dem Zusammenstoss bis zur Zeit der stärksten Compression in dem Verhältniss von  $1 + e$  zu 1 steht, so lassen sich aus § 382 die beiden folgenden Gleichungen ableiten

$$\sum m[(u'' - u)u + \text{etc.}] = (1 + e) \sum m[(u' - u)u + \text{etc.}] \quad . \quad . \quad (3),$$

$$\sum m[(u'' - u)u'' + \text{etc.}] = (1 + e) \sum m[(u' - u)u'' + \text{etc.}] \quad . \quad . \quad (4).$$



Man nehme an, auf das System wirke eine Momentankraft, deren Richtung im Raum während ihrer Wirkungszeit unverändert bleibt. Ein dem obigen ähnlicher Satz gilt dann für beliebige drei Momente der Wirkungszeit dieser Momentankraft, vorausgesetzt, dass diese Momente derart sind, dass die ganze in dem Intervall zwischen dem ersten und zweiten Moment ausgeübte Stosskraft in einem bekannten Verhältniss (z. B. 1 :  $e$ ) zu der ganzen in dem Intervall zwischen dem zweiten und dritten Moment ausgeübten Stosskraft steht.

Bezeichnet man die lebendigen Kräfte des Systems in den drei Momenten mit  $T$ ,  $T'$ ,  $T''$  wie zuvor und die lebendigen Kräfte der relativen Bewegungen mit  $R_{01}$ ,  $R_{02}$ ,  $R_{12}$ , so gelten die Gleichungen (3), (4) und (12) für die Bewegungen des Systems in den drei Momenten. Die Gleichung (14) liefert daher dieselben Beziehungen, wie vorher, zwischen den sechs Grössen  $T$ ,  $T'$ ,  $T''$ ,  $R_{01}$ ,  $R_{02}$ ,  $R_{12}$ .

Einen leichten Beweis dieses Satzes erhält man durch Combination der Resultate der §§ 385, 386 mit § 313.  $X$  sei eine Stosskraft, die Axe der  $x$  laufe ihrer Richtung parallel. Nach § 385 ist die lebendige Kraft der relativen Bewegung vor und nach dem Stoss  $X(u' - u)$  proportional. Nach § 313 ist aber  $u' - u$  eine lineare Function von  $X$  und verschwindet mit  $X$ .  $u' - u$  ist daher  $X$  proportional. Die lebendige Kraft der relativen Bewegung ist daher  $X^2$  proportional. Daraus folgt unmittelbar, dass  $R_{01}$ ,  $R_{02}$ ,  $R_{12}$  proportional zu  $1$ ,  $(1+e)^2$ ,  $e^2$  sind.

Der Rest des Satzes geht aus § 386 hervor. Stellt jetzt  $X$  den Stoss von dem ersten bis zum zweiten Moment dar, so hat man

$$T' - T = \frac{1}{2} X(u' - u), \quad T'' - T' = \frac{1}{2} X e(u' - u).$$

Es folgt leicht

$$T'' - T - e(T' - T) = \frac{1}{2} X e(u' - u).$$

Da die rechte Seite dieser Gleichung nach § 385 gleich  $R_{02} \frac{e}{1+e}$  ist, so wäre damit auch der Rest der Gl. (14) bewiesen.

Wenn zwei elastische Systeme aufeinander stossen, so gelten die in Gleichung (14) enthaltenen Sätze für den Stoss auf jedes System. Man erhält sie daher durch einfache Addition für die beiden zusammenstossenden Systeme, wenn man sie als ein einziges System betrachtet.

§ 390. Das Gauss'sche Maass für den „Zwang“. Den in den vorstehenden Paragraphen  $R$  genannten Ausdruck, welcher die lebendige Kraft der relativen Bewegung darstellt, hat Gauss auf andre Art interpretirt. Die Massenpunkte  $m_1$ ,  $m_2$ , etc. eines Systems mögen grade vor der Wirkung beliebiger Momentankräfte Lagen einnehmen, die wir  $p_1$ ,  $p_2$ , etc. nennen wollen. Wir wollen annehmen, die Massenpunkte würden, wenn sie frei sind, unter der Einwirkung dieser Momentankräfte und ihrer früheren Bewegungsgrössen solche Geschwindigkeiten erlangen, dass sie in der Zeit  $dt$ , welche auf den Stoss folgt, die kleinen Strecken  $p_1 q_1$ ,  $p_2 q_2$ , etc. beschreiben würden. Wenn die Massenpunkte aber auf irgend eine Art, die sich mit den grade vor der Wirkung der Momentankräfte geltenden geometrischen Bedingungen verträgt, einem Zwang unterliegen, so mögen sie in Folge derselben Momentankräfte und ihrer früheren Bewegungsgrössen in der auf den Stoss folgenden Zeit  $dt$  die kleinen Strecken  $p_1 r_1$ ,  $p_2 r_2$ , etc. beschreiben. Die Strecken  $q_1 r_1$ ,  $q_2 r_2$ , etc. kann man dann die Deviationen von der freien Bewegung in Folge des Zwanges nennen. Die Summe  $\sum m(qr)^2$  heisst der „Zwang“.

§ 391. Man kann den Zwang auch durch das Verhältniss dieser Summe zu  $(dt)^2$  messen. Alsdann stellen  $p_1 q_1$ , etc.,  $p_1 r_1$ , etc. nicht die Verschiebungen in der Zeit  $dt$  dar, sondern die Geschwindigkeiten der Massenpunkte grade nach der Wirkung der Kräfte in den beiden Fällen, in welchen die Punkte frei oder gezwungen sind. In Bezug auf das D'Alembert'sche Princip § 67 ist ersichtlich,

dass  $pq$  die Resultante der früheren Geschwindigkeit und derjenigen ist, welche durch die gegebene an dem typischen Massenpunkt  $m$  angreifende Kraft erzeugt wird, während  $qr$  die durch die Molekularkräfte erzeugte Geschwindigkeit darstellt<sup>1)</sup>.

Nimmt man an, die Längen  $pq$ ,  $pr$ , etc. stellten Geschwindigkeiten und nicht Verschiebungen dar und sind  $(u, v, w)$  die Componenten von  $pq$  bei irgend einer Bewegung und  $(u', v', w')$  die Componenten von  $pr$  bei einer andern Bewegung, so misst

$$\Sigma m(qr)^2 = \Sigma m[(u' - u)^2 + (v' - v)^2 + (w' - w)^2]$$

den „Zwang“ von der einen Bewegung zur andern. Dies ist genau dasselbe, was wir mit  $2R$  unter Beifügung von Indices zur Bezeichnung der beiden verglichenen Bewegungen dargestellt haben.

§ 392. Das Gauss'sche Princip des kleinsten Zwanges. Auf ein System von Massenpunkten, die sich in Bewegung befinden und irgend einem gegebenen Zwang unterliegen, möge eine gegebene Reihe von Momentankräften wirken und  $T'$  sei die lebendige Kraft der folgenden Bewegung. Dies ist die thatsächliche Bewegung, welche das System macht. Nehmen wir weiter an, die Massenpunkte würden durch Einführung weiteren Zwanges genöthigt, eine hypothetische mit den geometrischen Bedingungen verträgliche Bewegung auszuführen und  $T''$  sei die folgende lebendige Kraft bei dieser hypothetischen Bewegung. Drittens wollen wir annehmen, jeder Zwang würde entfernt und auf die Massenpunkte wirkte lediglich das gegebene System von Momentankräften.  $T'''$  sei die folgende lebendige Kraft bei dieser freien Bewegung.  $T$  sei die anfängliche allen drei Bewegungen gemeinschaftliche lebendige Kraft.  $R_{12}$ ,  $R_{13}$ ,  $R_{23}$  seien die lebendigen Kräfte der relativen Bewegungen der ersten, zweiten und dritten folgenden Bewegungen, wie die Indices angeben.

Nach Bertrand's Satz ist, weil die hypothetische Bewegung grösserem Zwang, als die thatsächliche, unterliegt,

$$T' = T'' + R_{12}.$$

Da ferner diese beiden mehr Zwang erleiden, als die freie Bewegung,

$$T''' = T' + R_{13},$$

$$T''' = T'' + R_{23},$$

woraus man  $R_{23} = R_{13} + R_{12}$  erhält.

1) Gauss beweist das Princip etwa so: Nach dem D'Alembert'schen Princip würden die Massenpunkte  $m_1$ ,  $m_2$ , etc., in die Lagen  $r_1$ ,  $r_2$ , etc. gebracht, unter der Wirkung dieser Molekularkräfte allein sich im Gleichgewicht befinden. Man wende das Princip der virtuellen Arbeit an und gebe dem System eine solche Lagenänderung, dass der typische Massenpunkt  $m$  die Strecke  $rq$  beschreibt, welche den Winkel  $\varphi$  mit der Richtung  $rq$  der an  $m$  angreifenden Molekularkraft macht. Da nun das Product  $m(rq)$  die Molekularkraft an  $m$  misst, so erhält man

$$\Sigma m(rq)(rq \cos \varphi) = 0.$$

Es ist aber

$$qq^2 = qr^2 + rq^2 - 2qr \cdot rq \cos \varphi,$$

woraus sich leicht ergibt

$$\Sigma m(qq)^2 = \Sigma m(qr)^2 + \Sigma m(rq)^2.$$

Bei der thatsächlichen Bewegung kommen die Massenpunkte von  $p_1$ , etc. nach  $r_1$ , etc. und der „Zwang“ ist  $\Sigma m(qr)^2$ . Wären die Massenpunkte gezwungen worden, eine andre hypothetische Bahn einzuschlagen, welche sie an die Orte  $q_1$ , etc. geführt hätte, so würde der „Zwang“  $\Sigma m(qq)^2$  gewesen sein. Das Gauss'sche Princip stellt fest, dass der erstere immer kleiner als der letztere ist.



$R_{2s}$  ist also immer grösser als  $R_{1s}$ . Daraus folgt, dass die Bewegung, welche das System thatsächlich ausführt, wenn irgend welche Momentankräfte auf dasselbe wirken, derart ist, dass der „Zwang“, der es aus der freien Bewegung weggleitet, kleiner ist, als wenn das System irgend eine andre mit den geometrischen Bedingungen verträgliche Bewegung machte. Dieser Satz gilt für jede Richtung, in welcher der „Zwang“ gemessen wird.

§ 393. Nimmt man an, auf das System wirke eine continuirliche Reihe von unbegrenzt kleinen Momentankräften, so kann man diese als endliche Kräfte ansehen und kommt so zu dem folgenden Theorem, das man *das Gauss'sche Princip des kleinsten Zwanges* zu nennen pflegt.

*Die Bewegung eines Systems materieller durch irgend welche geometrischen Beziehungen verbundener Punkte erfolgt stets in möglichster Uebereinstimmung mit der freien Bewegung, d. h. wenn der Zwang während der Zeit  $dt$  durch die Summe der Producte gemessen wird, welche man durch Multiplication der Masse eines jeden Punktes mit dem Quadrat seines Abstandes am Ende dieser Zeit von der Lage, welche er bei freier Bewegung eingenommen hätte, erhält, alsdann ist die thatsächliche Bewegung während der Zeit  $dt$  immer so, dass der Zwang kleiner ist, als wenn die Massenpunkte in irgend eine andre Lage gekommen wären.*

Gauss bemerkt, dass die freien Bewegungen der Massenpunkte, wenn sie mit den geometrischen Bedingungen des Systems nicht zu vereinigen sind, in genau derselben Weise geändert werden, wie man in der praktischen Geometrie die durch Beobachtungen erhaltenen Resultate mittelst der Methode der kleinsten Quadrate so modificire, dass sie mit den geometrischen Beziehungen der Messung im Einklang ständen. Möbius hat, wohl in Folge dieser Bemerkung, den Satz das Princip der kleinsten Quadrate genannt<sup>1)</sup>.

§ 394. Beisp. Auf eine Anzahl von Massenpunkten  $m_1, m_2$ , etc. wirken beliebige Kräfte, deren Componenten  $m_1 X_1, m_1 Y_1, m_1 Z_1$ , etc. sind. Die Coordinaten  $x_1, y_1, z_1; x_2, y_2, z_2$ ; etc. der Punkte sind durch eine Beziehung wie  $\varphi(x_1, \text{etc.}) = 0$  miteinander verbunden. (So können z. B. die Massenpunkte Kügelchen sein, welche auf einen Faden von gegebener Länge und mit zusammengeknüpften Enden aufgereiht sind.) Man soll die Bewegungsgleichungen bilden.

$U, V, W$  seien die Componenten der Geschwindigkeit des typischen Massenpunktes  $m$  zur Zeit  $t$ ;  $u, v, w$  die Componenten der Geschwindigkeit grade nach der Wirkung der Stosskraft, deren Componenten  $mX dt, mY dt, mZ dt$  sind, unter der Voraussetzung, dass der Massenpunkt vollkommen frei ist. Weil aber der typische Massenpunkt nicht vollkommen frei ist, so mögen  $u', v', w'$  die Componenten seiner thatsächlichen Geschwindigkeit in demselben Augenblick sein. Um nun  $u', v', w'$  zu finden, mache man

$$R_{1s} = \Sigma m[(u' - u)^2 + (v' - v)^2 + (w' - w)^2] = \text{Minimum},$$

worin  $\Sigma$  die Summirung für alle Massenpunkte angibt. Diese Grösse muss ein Minimum sein für alle Variationen von  $u', v', w'$ , welche der Bedingung unterliegen

$$\Sigma (\varphi_x u' + \varphi_y v' + \varphi_z w') = 0,$$

worin  $\Sigma$  wieder die Summirung für alle Indices angibt.

Damit  $R_{1s}$  ein Minimum wird, nehmen wir das totale Differenzial einer jeden dieser Grössen in Bezug auf alle accentuirten Buchstaben als Variable,

1) Siehe Gauss, Ueber ein neues allgemeines Grundgesetz der Mechanik (Crelle's Journ. Bd. 4, S. 232, 1829); Scheffler, Ueber das Gauss'sche Grundgesetz der Mechanik (Schlömilch's Zeitschrift für Math. u. Phys. 3. Jahrg. 1858. S. 197).

multipliciren die zweite mit einem unbestimmten Factor  $\lambda$  und addiren die Resultate. Setzt man die Coefficienten von  $du$ , etc. gleich Null, so erhält man die drei typischen Gleichungen

$$m(u' - u) + \lambda \varphi_x = 0, \quad m(v' - v) + \lambda \varphi_y = 0, \quad m(w' - w) + \lambda \varphi_z = 0.$$

Bringt man Indices an, so reichen die Gleichungen aus, um  $\lambda$  und die  $(u', v', w')$  eines jeden Massenpunktes zu finden.

Man kann diesen Gleichungen eine andre Gestalt geben. Da  $U$  und  $u'$  zwei in dem Intervall  $dt$  aufeinander folgende Werthe derselben Grösse bei der stetigen hier in Betracht gezogenen Bewegung sind, so lässt sich setzen  $u' - U = \frac{dU}{dt} dt$ .

Da  $u$  die Componente der Geschwindigkeit nach dem Stoss bei freier Bewegung des Punktes ist, so hat man  $u - U = X dt$ . Die Gleichungen werden daher

$$m \left( \frac{dU}{dt} - X \right) + \mu \varphi_x = 0, \text{ etc.},$$

worin  $\mu dt$  statt  $\lambda$  geschrieben worden ist.

Die Gleichungen in dieser Gestalt hätte man direct aus dem Princip der virtuellen Arbeit ableiten können. Nach diesem Princip ist

$$\Sigma m \left[ \left( \frac{du}{dt} - X \right) \delta x + \text{etc.} \right] = 0$$

mit der Bedingung

$$\Sigma [\varphi_x \delta x + \text{etc.}] = 0.$$

Multiplicirt man die zweite Gleichung mit einem unbestimmten Factor  $\mu$ , addirt und setzt die Coefficienten von  $\delta x$ , etc. gleich Null, so erhält man dasselbe Resultat wie zuvor.

### Beispiele zum Princip der lebendigen Kraft.

(Mit Ausnahme der beiden letzten den Examination Papers entnommen, die auf der Universität und den Colleges gegeben wurden.)

1. Eine Archimedische Schraube kann sich frei um ihre Axe drehen, welche in verticaler Lage festliegt; ein schwerer Punkt wird in den höchsten Punkt der Röhre gelegt und läuft in derselben herab; man bestimme die ganze der Schraube mitgetheilte Winkelgeschwindigkeit.

Resultat.  $n$  sei das Verhältniss der Masse der Schraube zu der des Massenpunktes,  $\alpha$  der Winkel, den die Tangente an die Schraube mit dem Horizont macht,  $h$  die Höhe, um welche der Massenpunkt sich gesenkt hat,  $a$  der Radius. Man beweise, dass  $\omega^2 a^2 (n + 1)(n + \sin^2 \alpha) = 2gh \cos^2 \alpha$  ist, unter  $\omega$  die erzeugte Winkelgeschwindigkeit verstanden.

2. Eine dünne kreisförmige Röhre, in welcher sich ein schwerer Punkt befindet, wird um einen verticalen Durchmesser in Rotation gesetzt. Man zeige, dass der Unterschied der Quadrate der absoluten Geschwindigkeiten des Massenpunktes an irgend zwei gegebenen Punkten der Röhre, die gleichen Abstand von der Axe haben, für alle Anfangsgeschwindigkeiten des Massenpunktes und der Röhre derselbe ist.

3. Ein kreisförmiger Ring von Draht, welcher eine kleine Kugel trägt, liegt auf einem glatten horizontalen Tisch; ein elastischer Faden, der in natürlichem Zustand kürzer als der Durchmesser des Ringes ist, wird mit seinem einen Ende an die Kugel und dem andern an einen Punkt des Drahtes befestigt; die Kugel wird anfänglich so placirt, dass der Faden nahezu mit einem Durchmesser des Ringes zusammenfällt; man finde die lebendige Kraft des Systems, wenn sich der Faden auf seine ursprüngliche Länge zusammengezogen hat. § 343.

4. Eine grade Röhre von gegebener Länge kann sich in einer horizontalen Ebene frei um ihr eines Ende drehen; zwei gleiche Massenpunkte werden an verschiedenen Stellen im Zustand der Ruhe in sie gelegt; dem System wird nun eine Winkelgeschwindigkeit gegeben; man bestimme die Geschwindigkeit eines jeden Massenpunktes beim Verlassen der Röhre.

5. In eine glatte kreisförmige Röhre von der Masse  $M$  werden zwei gleiche Punkte von der Masse  $m$  gelegt, die durch einen elastischen Faden miteinander verbunden sind, dessen natürliche Länge  $\frac{2}{3}$  des Umfanges beträgt. Der Faden wird ausgedehnt, bis sich die Massenpunkte berühren, wobei die Röhre flach auf einem horizontalen glatten Tisch liegt, und das System sich selbst überlassen. Man zeige, dass, wenn der Faden seine natürliche Länge wieder erreicht, die thatsächliche Energie der beiden Massenpunkte sich zu der beim Ausdehnen des Fadens verrichteten Arbeit verhält wie

$$2(M^2 + Mm + m^2) : (M + 2m)(2M + m).$$

6. Eine endlose, biegsame und unausdehnbare Kette, deren Masse pro Längeneinheit für die eine stetige Hälfte  $\mu$ , für die andre  $\mu'$  ist, wird über zwei gleiche vollkommen raue gleichförmige Kreisscheiben (Radius  $a$ , Masse  $M$ ) gespannt, welche sich frei um ihre im Abstand  $b$  in derselben Verticalen liegende Mittelpunkte drehen können. Man beweise, dass die Zeit einer kleinen Schwingung der Kette unter dem Einfluss der Schwere

$$\text{ist.} \quad 2\pi \sqrt{\frac{M + (\pi a + b)(\mu + \mu')}{2(\mu - \mu')g}}$$

7. Zwei Punkte von den Massen  $m, m'$  sind durch einen unelastischen Faden von der Länge  $a$  verbunden. Der erste wird in eine glatte, grade Rinne gelegt und der letzte in einer Richtung senkrecht zur Rinne mit der Geschwindigkeit  $V$  fortgeschleudert. Man beweise, dass der Massenpunkt  $m$  eine Strecke  $\frac{2am'}{m+m'}$  durchschwingt und die Schwingungsdauer nahezu  $\frac{2\pi a}{V} \left(1 - \frac{m'}{4m}\right)$  beträgt, wenn  $m$  im Vergleich zu  $m'$  gross ist.

8. Eine raue Ebene rotirt mit gleichförmiger Winkelgeschwindigkeit  $n$  um eine horizontale Axe, die ihr parallel ist, aber nicht in ihr liegt. Eine schwere Kugel vom Radius  $a$  wird auf die Ebene gelegt, wenn sie sich in horizontaler Lage befindet und rollt unter dem Einfluss der Schwere die Ebene hinab. Wenn der Mittelpunkt der Kugel sich ursprünglich in der Ebene befindet, welche die feste Axe enthält und senkrecht auf der sich bewegenden Ebene steht, und wenn  $x$  sein Abstand von dieser Ebene zu einer folgenden Zeit  $t$  ist, ehe die Kugel die Ebene verlässt, so ist

$$x = \frac{1}{24\sqrt{35}} \left( \frac{35g}{n^2} - 84a - 60c \right) \left( e^{\sqrt{\frac{5}{7}}nt} - e^{-\sqrt{\frac{5}{7}}nt} \right) - \frac{5g}{12n^2} \sin nt,$$

unter  $c$  den Abstand der Axe von der Ebene verstanden, die positive Richtung nach oben genommen.

9. Die Enden eines gleichförmigen schweren Balkens von der Länge  $2a$  gleiten auf einem glatten Draht, welcher die Gestalt einer Curve hat, deren Gleichung  $r = a(1 - \cos \theta)$  ist, wobei der Anfangsradius vertical steht und der Scheitel der Curve abwärts liegt. Der Balken wird vertical aufgerichtet und mit einer Geschwindigkeit in Bewegung gesetzt, die grade ausreicht, ihn in horizontale

Lage zu bringen; man beweise, dass  $\text{tg } \theta = \frac{1}{2} \left[ e^{\sqrt{\frac{3g}{2a}}t} - e^{-\sqrt{\frac{3g}{2a}}t} \right]$  ist, worin  $\theta$  den Winkel bedeutet, um den sich der Stab in der Zeit  $t$  gedreht hat.

10. Ein starrer Körper, welcher für den Schwerpunkt  $G$  den Trägheitsradius  $k$  hat, wird mittelst eines an einem Punkt  $A$  seiner Oberfläche befestigten Strickes mit einem festen Punkt  $C$  verbunden.  $CA (= b)$  und  $AG (= a)$  befinden sich anfangs in einer Geraden und  $G$  wird die Geschwindigkeit  $V$  senkrecht zu dieser Geraden gegeben. Es wird angenommen, dass keine gegebenen Kräfte angreifen und der Strick ist so befestigt, dass er stets in grader Linie bleibt.  $\theta$  sei der Winkel zwischen  $AG$  und  $AC$  zur Zeit  $t$ ; man zeige, dass

$$\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 = \frac{V^2}{b^2} \frac{k^2 - 4ab \sin^2 \frac{\theta}{2}}{k^2 + a^2 \sin^2 \theta}$$

und dass, wenn die Amplitude von  $\theta$ , d. h.  $2 \arcsin \frac{k}{2\sqrt{ab}}$  sehr klein ist, die Periode  $\frac{2\pi bk}{V\sqrt{a(a+b)}}$  beträgt.

11. Ein dünner gewichtsloser Faden, der einen Massenpunkt an seinem einen Ende hat, ist theilweise um einen Reifen gerollt, welcher auf einer glatten horizontalen Ebene liegt und im Stande ist, sich um eine feste, durch seinen Mittelpunkt gehende verticale Axe zu bewegen. Wenn der Reif sich anfangs in Ruhe befindet und der Massenpunkt senkrecht zur Länge des Fadens weggeworfen wird und wenn  $s$  der zu irgend einer Zeit  $t$  nicht aufgewundene Theil des Fadens ist, so lässt sich beweisen, dass

$$s^2 - b^2 = \frac{\mu}{m + \mu} V^2 t^2 + 2Vat,$$

worin  $b$  der Anfangswerth von  $s$ ,  $m$  und  $\mu$  die Massen des Reifen und des Massenpunktes,  $a$  der Radius des Reifen und  $V$  die Wurfgeschwindigkeit ist.

12. Ein Quadrat, das aus vier ähnlichen gleichförmigen Stäben besteht, die an ihren Enden durch Gelenke frei verbunden sind, wird auf einen glatten horizontalen Tisch gelegt und einer seiner Eckpunkte befestigt. Den beiden Seiten, die in diesem Eckpunkt zusammenlaufen, werden die Winkelgeschwindigkeiten  $\omega$ ,  $\omega'$  in der Ebene des Tisches gegeben; man zeige, dass der grösste Werth des Winkels ( $2\alpha$ ), den diese Seiten miteinander machen, durch die Gleichung

$$\cos 2\alpha = -\frac{5(\omega - \omega')^2}{6(\omega^2 + \omega'^2)}$$

gegeben ist.

13. Zwei Punkte von den Massen  $m$ ,  $m'$  liegen auf einem glatten, horizontalen Tisch und sind durch einen unelastischen Faden, der in seiner vollen Länge ausgestreckt ist und durch einen kleinen Ring auf dem Tisch geht, miteinander verbunden. Die Punkte haben die Abstände  $a$ ,  $a'$  von dem Ring und erhalten die Geschwindigkeiten  $v$ ,  $v'$  rechtwinklig zu dem Faden. Man beweise, dass, wenn  $mv^2a^2 = m'v'^2a'^2$  ist, die Abstände vom Ring  $a'$  bez.  $a$  sein werden, wenn beide Geschwindigkeiten wieder auf dem Faden senkrecht stehen.

14. Ein gleichförmiger dünner Stab  $PQ$  bewegt sich in Folge der Wirkung einer Anfangsmomentankraft zwischen zwei glatten Curven in derselben Ebene; man beweise, dass das Quadrat der Winkelgeschwindigkeit umgekehrt wie die Differenz zwischen der Summe der Quadrate der Normalen  $OP$ ,  $OQ$  zu den Curven in den Endpunkten des Stabes und einem Drittel des Quadrates der ganzen Länge des Stabes variiert.

15. Nimmt man an, die Muskelkraft oder bewegende Kraft eines Thieres variire wie der Inhalt des Querschnittes seiner Glieder und sein Gewicht variire wie sein Volumen, so lässt sich beweisen, dass zwei Thiere von ähnlicher Ge-

stalt, aber verschiedenen Dimensionen, Sprünge von genau derselben Höhe machen können, vorausgesetzt, dass unter Höhe die verticale Strecke verstanden wird, die der Schwerpunkt, nachdem das Thier den Boden verlassen hat, zurücklegt.

16. Die Enden eines gleichförmigen Balkens von der Länge  $2a$  gleiten auf zwei dünnen Stäben ohne Trägheit; die Ebene der Stäbe ist vertical; ihr Durchschnittspunkt liegt fest und die Stäbe haben gegen den Horizont die Neigung  $\frac{\pi}{4}$  und  $-\frac{\pi}{4}$ . Das System wird um die durch den Durchschnittspunkt der Stäbe gehende Verticale mit der Winkelgeschwindigkeit  $\omega$  in Rotation gesetzt.  $\theta$  sei die Neigung des Balkens gegen die Verticale zur Zeit  $t$  und  $\alpha$  der Anfangswerth von  $\theta$ ; man beweise, dass

$$4 \left( \frac{d\theta}{dt} \right)^2 + \frac{(3 \cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha)^2}{3 \cos^2 \theta + \sin^2 \theta} \omega^2 = (3 \cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha) \omega^2 + \frac{6g}{a} (\sin \alpha - \sin \theta).$$

17. Eine vollkommen rauhe Kugel vom Radius  $a$  wird dicht an den Durchschnittspunkt der beiden höchsten Erzeugenden zweier fester gleicher horizontaler Cylinder vom Radius  $c$ , deren Axen den Winkel  $2\alpha$  miteinander machen, gelegt und zwischen ihnen herabrollen lassen. Man beweise, dass die verticale Geschwindigkeit ihres Mittelpunktes in jeder Lage

$$\sin \alpha \cos \varphi \left[ \frac{10g(a+c)(1-\sin \varphi)}{7-5 \cos^2 \varphi \cos^2 \alpha} \right]^{\frac{1}{2}}$$

ist, worin  $\varphi$  die Neigung des Radius nach jedem Berührungspunkt gegen den Horizont bedeutet.

18. Ein vollständiges Integral der Gleichung  $\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{dT}{dx}$ , in welcher  $T$  eine Function von  $x$  ist, sei  $x=X$  und  $X$  sei eine bekannte Function von  $a$  und  $b$ , zweier willkürlicher Constanten und von  $t$ . Die Auflösung der Gleichung

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{dT}{dx} + \frac{dR}{dx},$$

worin  $R$  eine Function von  $x$  ist, kann ebenfalls durch  $x=X$  dargestellt werden, vorausgesetzt, dass  $a$  und  $b$  variable, durch die Gleichungen

$$\frac{da}{dt} = k \frac{\partial R}{\partial b}, \quad \frac{db}{dt} = -k \frac{\partial R}{\partial a}$$

bestimmte Grössen sind und dass dabei  $k$  eine Function von  $a$  und  $b$  ist, welche die Zeit nicht explicite enthält.

19. Ein als Massenpunkt betrachteter Satellit rotirt um seinen Hauptplaneten mit der Winkelgeschwindigkeit  $\Omega$  und der Hauptplanet dreht sich um eine Axe, die senkrecht auf der Ebene der Bahn des Satelliten steht, mit der Winkelgeschwindigkeit  $n$ . Man zeige, dass die Winkelbewegungsgrösse  $h$  des Systems um seinen Schwerpunkt und die Energie  $E$  durch

$$h = Cn + D\Omega^{-\frac{1}{3}}, \quad 2E = Cn^2 - D\Omega^{\frac{2}{3}}$$

gegeben sind, worin  $C$  das Trägheitsmoment des Hauptplaneten um die Rotationsaxe und  $D$  eine Grösse bedeutet, die von den Massen der Körper abhängt.

Man zeichne die Curven auf, deren Ordinaten  $h$  und  $E$  und deren Abscissen  $x = D\Omega^{-\frac{1}{3}}$  sind. Man zeige, dass die zweite Curve der einen oder andern von zwei Arten angehört, je nachdem eine Maximal- und Minimalordinate existirt oder nicht, d. h. je nachdem die biquadratische Gleichung

$$h = x + CD^3x^{-3}$$

zwei reelle Wurzeln hat oder keine. Man zeige auch, dass die reellen Wurzeln dem Fall entsprechen, in dem der Hauptplanet dem Satelliten immer dieselbe Seite zuwendet.

20. Man bestimme auf Grund der Resultate des vorigen Beispiels die Wirkung, welche ein beständiger Verlust an Energie (durch Fluthreibung oder irgend eine andre Ursache hervorgerufen) auf die Bewegung hat, wenn dabei die Winkelbewegungsgrösse  $h$  constant bleibt. Man zeige, dass, wenn das System eine solche Beschaffenheit hat, dass die Energiecurve von der zweiten Art ist, der Satellit schliesslich in den Planeten fallen muss. Ist dagegen die Energiecurve von der ersten Art, so lässt sich zeigen, dass je nach dem Anfangswerth von  $\Omega$  der Satellit entweder in den Planeten fällt oder sich ihm bis auf einen gewissen Abstand nähert, in welchem dann beide bleiben und sich wie ein einzelner starrer Körper drehen.

Um diese Resultate zu erhalten, denke man sich zwei Punkte von derselben Abscisse, den einen auf die Linie der Bewegungsgrösse, den andern auf die Energiecurve gesetzt und nehme an, der auf der Energiecurve führe den andern. Da die Energie abnimmt, so muss offenbar, wie man auch die beiden Punkte anfangs setzt, der auf der Energiecurve stets hinableiten und dabei den andern mit sich führen. Die Endlagen der Punkte hängen daher davon ab, ob eine Minimalordinate der Energiecurve existirt oder nicht. Siehe eine Abhandlung von G. H. Darwin über die seculären Wirkungen der Fluthreibung in den *Proceedings of the Royal Society*, Juni 1879 oder Thomson und Tait's *Treatise on Natural Philosophy*, Vol. I, Part. II. Appendix, G. b.

---

## Kapitel VIII.

### Die Lagrange'schen Gleichungen.

§ 395. Zwei Vortheile der Lagrange'schen Gleichungen. In diesem Abschnitt ist es unsre Aufgabe, die allgemeinen Bewegungsgleichungen eines dynamischen Systems so aufzustellen, dass sie frei von allen unbekannten Reactionen sind und ihnen, so weit möglich, beliebige Coordinaten, wie sie für das betrachtete Problem am vortheilhaftesten sind, zu Grunde liegen.

Zur Elimination der Reactionen werden wir das Princip der virtuellen Arbeit benutzen. Dieses Princip hat schon bei der Aufstellung der Gleichung der lebendigen Kraft Anwendung gefunden, indem dem System jene specielle Verrückung gegeben wurde, welche es ausgesucht hätte, wenn es sich selbst überlassen worden wäre. Weil aber nach dem D'Alembert'schen Princip jedes dynamische Problem auf ein statisches reducirt werden kann, so müssen wir offenbar durch geeignete Wahl der Verrückungen des Systems nicht nur im Stande sein die Gleichung der lebendigen Kraft, sondern, wie in § 357, alle Bewegungsgleichungen abzuleiten.

§ 396. Die Coordinaten irgend eines Massenpunktes  $m$  des Systems, auf irgend welche feste rechtwinklige Axen bezogen, mögen  $(x, y, z)$  sein. Sie sind nicht unabhängig von einander, da sie durch die geometrischen Beziehungen des Systems verbunden sind. Man kann sie aber durch eine gewisse Anzahl unabhängiger Variablen ausdrücken, deren Werthe die Lage des Systems zu jeder Zeit bestimmen. Indem wir die Definition in § 73 ausdehnen, wollen wir sie *die Coordinaten des Systems* nennen. Sie mögen  $\theta, \varphi, \psi$ , etc. heissen. Alsdann sind  $x, y, z$ , etc. Functionen von  $\theta, \varphi$ , etc. Es sei

$$x = f(t, \theta, \varphi, \text{etc.}) . . . . . (1)$$

und ähnliche Gleichungen für  $y$  und  $z$  gelten. Man beachte, dass diese Gleichungen  $\frac{d\theta}{dt}, \frac{d\varphi}{dt}$ , etc. nicht enthalten. Die unabhängigen Variablen, durch welche die Bewegung ausgedrückt werden soll, sind übrigens durchaus willkürlich und unterliegen nur der Einschränkung, dass die Coordinaten eines jeden Massenpunktes des Systems sich, wenn nöthig, durch sie mit Hilfe von Gleichungen, die irgendwelche Differentialquotienten nach der Zeit nicht enthalten, müssen ausdrücken lassen.

Die Anzahl der unabhängigen Coordinaten, auf welche die Lage eines Systems durch seine geometrischen Beziehungen reducirt wird, heisst manchmal auch *die Anzahl der Freiheitsgrade des Systems*. Man bezieht sich zuweilen auch auf sie als *die Anzahl der unabhängigen Bewegungen*, welche das System zulässt.

In diesem Kapitel wollen wir die *totalen* Differentialquotienten nach der Zeit im Allgemeinen mit *Accenten* bezeichnen. So soll z. B. im Allgemeinen  $\frac{dx}{dt}$  in der Form  $x'$  und  $\frac{d^2x}{dt^2}$  in der Form  $x''$  geschrieben werden.

Bedeutet  $T$  die lebendige Kraft des Systems, so ist

$$2T = \Sigma m(x'^2 + y'^2 + z'^2) \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

und, da die geometrischen Gleichungen  $\theta'$ ,  $\varphi'$ , etc. nicht enthalten,

$$x' = \frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial x}{\partial \theta} \theta' + \frac{\partial x}{\partial \varphi} \varphi' + \text{etc.} \quad . \quad . \quad . \quad (3)$$

und ähnlich für  $y'$  und  $z'$ .

Substituirt man diese Ausdrücke in Gl. (2), so erhält  $2T$  die Gestalt

$$2T = A_{11}\theta'^2 + 2A_{12}\theta'\varphi' + \dots + B_1\theta' + B_2\varphi' + \dots + C \quad (4),$$

worin die Coefficienten  $A_{11}$ , etc.,  $B_1$ , etc.,  $C$  Functionen von  $t$ ,  $\theta$ ,  $\varphi$ , etc. sind. Die Glieder von zwei Dimensionen, d. h. diejenigen, welche die Quadrate und Producte von  $\theta'$ ,  $\varphi'$ , etc. enthalten, rühren von der Substitution aller Glieder mit Ausnahme des in den Ausdrücken für  $x'$ ,  $y'$ ,  $z'$  an erster Stelle stehenden her. Wenn die geometrischen Gleichungen die Zeit explicite nicht enthalten, so tritt  $t$  in den Gleichungen (1) nicht auf, ebenso fehlt das erste Glied in (3) und der Ausdruck für  $2T$  reducirt sich auf die Glieder von zwei Dimensionen allein. Die Gleichung (4) kann man kurz in der Form schreiben

$$2T = F(t, \theta, \varphi, \text{etc.}, \theta', \varphi', \text{etc.}) \quad . \quad . \quad . \quad (5).$$

Wenn das System von Körpern gegeben ist, so ist die Form von  $F$  bekannt. Wir werden gleich sehen, dass die *Effectivkräfte* nur durch die Form von  $F$  von der Beschaffenheit der betrachteten Körper abhängen und dass daher zwei dynamische Systeme, welche dasselbe  $F$  haben, dynamisch äquivalent sind.

Man beachte, dass in dieser Function keine höheren Potenzen von  $\theta'$ ,  $\varphi'$ , etc. vorkommen als die zweite und dass sie, wenn die geometrischen Gleichungen die Zeit nicht explicite enthalten, eine homogene Function zweiten Grades von  $\theta'$ ,  $\varphi'$ , etc. ist.

§ 397. Die virtuelle Arbeit der Effectivkräfte. Man soll das virtuelle Moment der Bewegungsgrößen eines Systems und auch das der Effectivkräfte finden, welches einer durch Veränderung einer einzigen Coordinate erzeugten Verrückung entspricht.



Diese Coordinate sei  $\theta$  und die Bezeichnung, die eben erklärt wurde, werde beibehalten. Die mit Accenten bezeichneten Buchstaben geben die *totalen* Differentialquotienten nach der Zeit an. Da  $x', y', z'$  die Componenten der Geschwindigkeit sind, so ist das virtuelle Moment der Bewegungsgrössen  $\Sigma m(x' \delta x + y' \delta y + z' \delta z)$ , worin  $\delta x, \delta y, \delta z$  die kleinen Aenderungen sind, welche die Coordinaten des Massenpunktes  $m$  durch eine Variation  $\delta \theta$  von  $\theta$  erleiden. Es ist dies das Nämliche wie

$$\Sigma m \left( x' \frac{\partial x}{\partial \theta} + y' \frac{\partial y}{\partial \theta} + z' \frac{\partial z}{\partial \theta} \right) \delta \theta.$$

Ist  $T$  die durch Gl. (2) im letzten Paragraphen gegebene lebendige Kraft, so hat man

$$\frac{\partial T}{\partial \theta'} = \Sigma m \left( x' \frac{\partial x'}{\partial \theta'} + \text{etc.} \right).$$

Differentiirt man aber (3) partiell nach  $\theta'$ , so sieht man, dass  $\frac{\partial x'}{\partial \theta'} = \frac{\partial x}{\partial \theta}$ . Daher ist  $\frac{\partial T}{\partial \theta'} \delta \theta$  dem virtuellen Moment der Bewegungsgrössen gleich.

§ 398. Die virtuelle Arbeit der Effectivkräfte ist

$$\Sigma m \left( x'' \frac{\partial x}{\partial \theta} + y'' \frac{\partial y}{\partial \theta} + z'' \frac{\partial z}{\partial \theta} \right) \delta \theta.$$

Lässt man den Factor  $\delta \theta$  weg, so kann man diesem Ausdruck die Gestalt geben

$$\frac{d}{dt} \Sigma m \left( x' \frac{\partial x}{\partial \theta} + \text{etc.} \right) - \Sigma m \left( x' \frac{d}{dt} \frac{\partial x}{\partial \theta} + \text{etc.} \right).$$

Wir haben schon bewiesen, dass das erste dieser beiden Glieder  $\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \theta'}$  ist. Es bleibt noch das zweite als Differentialquotient von  $T$  auszudrücken. Differentiirt man den Ausdruck für  $2T$  partiell nach  $\theta$ , so ist

$$\frac{\partial T}{\partial \theta} = \Sigma m \left( x' \frac{\partial x'}{\partial \theta} + \text{etc.} \right)$$

und durch Differentiation des Ausdrucks für  $x'$  nach  $\theta$

$$\frac{\partial x'}{\partial \theta} = \frac{\partial^2 x}{\partial \theta \partial t} + \frac{\partial^2 x}{\partial \theta^2} \theta' + \frac{\partial^2 x}{\partial \theta \partial \varphi} \varphi' + \text{etc.}$$

Dies ist aber dasselbe wie  $\frac{d}{dt} \frac{\partial x}{\partial \theta}$ ; das zweite Glied kann daher auch  $\frac{\partial T}{\partial \theta}$  geschrieben werden und die virtuelle Arbeit der Effectivkräfte ist also  $\left( \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \theta'} - \frac{\partial T}{\partial \theta} \right) \delta \theta$ .

Wir wollen versuchen die Sache deutlicher zu machen. Die virtuelle Arbeit der Effectivkräfte ist offenbar das Verhältniss des Unterschiedes zwischen den virtuellen Momenten der Bewegungsgrössen der Massenpunkte des Systems zu den Zeiten  $t + dt$  und  $t$  zu  $dt$ , da die Ver-

rückungen zu beiden Zeiten die gleichen sind. Das virtuelle Moment der Bewegungsgrößen zur Zeit  $t$  ist, wie zuerst gezeigt wurde,  $\frac{\partial T}{\partial \theta'} \delta \theta$ .

Daher ist  $\left(\frac{\partial T}{\partial \theta'} + \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \theta'} dt\right) \delta \theta$  das virtuelle Moment der Bewegungsgrößen zur Zeit  $t + dt$ , welches einer mit den Lagen der Massenpunkte zu dieser Zeit vereinbaren Verrückung  $\delta \theta$  entspricht. Um die Verrückungen gleich zu machen, müssen wir davon das virtuelle Moment der Bewegungsgrößen für eine Verrückung, welche der Unterschied der beiden Verrückungen zu den Zeiten  $t$  und  $t + dt$  ist, abziehen.

Da  $\delta x = \frac{\partial x}{\partial \theta} \delta \theta$ , so beträgt dieser Unterschied für die Variable  $x$  die Grösse  $\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial x}{\partial \theta}\right) dt \delta \theta$ . Es ist daher im Ganzen

$$\Sigma m \left[ x' \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial x}{\partial \theta} \right) dt + \text{etc.} \right] \delta \theta$$

abzuziehen, und dies ist, wie gezeigt wurde,  $\frac{\partial T}{\partial \theta} dt \delta \theta$ .

§ 399. Die Lagrange'schen Gleichungen für endliche Kräfte<sup>1)</sup>.  
Man leite die allgemeinen Bewegungsgleichungen, auf beliebige Coordinaten bezogen, ab.

$U$  sei die Kräftefunction und daher eine Function von  $\theta$ ,  $\varphi$ , etc. und  $t$ . Die virtuelle Arbeit der gegebenen Kräfte, welche einer durch Variation von  $\theta$  allein hervorgerufenen Verrückung entspricht, ist  $\frac{\partial U}{\partial \theta} \delta \theta$ . Sie muss aber nach D'Alembert's Princip dieselbe, wie die virtuelle Arbeit der Effectivkräfte sein. Daher ist

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \theta'} - \frac{\partial T}{\partial \theta} = \frac{\partial U}{\partial \theta}$$

und ähnlich

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \varphi'} - \frac{\partial T}{\partial \varphi} = \frac{\partial U}{\partial \varphi},$$

etc. = etc.

Man kann noch bemerken, dass man, wenn  $V$  die potentielle Energie ist, —  $V$  für  $U$  setzen muss. Man erhält dann

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \theta'} - \frac{\partial T}{\partial \theta} + \frac{\partial V}{\partial \theta} = 0,$$

und ähnliche Gleichungen für  $\varphi$ ,  $\psi$ , etc.

Wir wollen  $L = T + U$  setzen, so dass also  $L$  der Unterschied zwischen der kinetischen und potentiellen Energie ist. Man kann alsdann, da  $U$  keine Function von  $\theta'$ ,  $\varphi'$ , etc. ist, den Lagrange'schen Gleichungen die typische Form geben

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \theta'} - \frac{\partial L}{\partial \theta} = 0.$$

1) Vergl. Appell, *Mécanique rationnelle*, Paris, 1896, Bd. 2, S. 500 u. ff.

Daraus ergibt sich, dass man, wenn die eine Function  $L$  bekannt ist, *alle* Differentialgleichungen der Bewegung durch einfache partielle Differentiationen ableiten kann. Die Function  $L$  heisst die *Lagrange'sche Function*.

Die Gleichungen werden die Lagrange'schen allgemeinen Bewegungsgleichungen genannt. Lagrange betrachtet nur den Fall, in welchem die geometrischen Gleichungen die Zeit nicht explicite enthalten, Vieille hat aber in Liouville's Journal, 1849 gezeigt, dass die Gleichungen auch dann noch gelten, wenn diese Einschränkung beseitigt wird. In dem oben gegebenen Beweis haben wir Vieille's Verallgemeinerung eingeschlossen, sind übrigens zum Theil Sir W. Hamilton's Verfahren gefolgt, *Phil. Trans.*, 1834. Der Beweis unterscheidet sich von dem Lagrange'schen in zwei Hinsichten; erstens lässt Lagrange die willkürliche Verrückung so vor sich gehen, dass nur eine Coordinate zu einer bestimmten Zeit variirt und dann operirt er direct mit  $T$  anstatt mit  $\Sigma m x'^2$ .

Beisp. 1. Wenn man die Coordinaten  $\theta, \varphi$ , etc. in Lagrange's Gleichungen mit beliebigen anderen  $x, y$ , etc. vertauscht, die mit  $\theta, \varphi$ , etc. durch Gleichungen verbunden sind, welche Differentialquotienten nach der Zeit nicht enthalten, so zeige man durch *analytische Transformation*, dass die Gestalt der Lagrange'schen Gleichungen sich nicht ändert, d. h. dass die umgeformten Gleichungen sich von den ursprünglichen nur dadurch unterscheiden, dass  $x, y$ , etc. für  $\theta, \varphi$ , etc. stehen. Dies ist natürlich vermöge der dynamischen Bedeutung selbstverständlich.

Durch Differentiation von  $L$  ergibt sich

$$\frac{\partial L}{\partial x} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial x'} = \left( \frac{\partial L}{\partial \theta} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \theta'} \right) \frac{d\theta}{dx} + \left( \frac{\partial L}{\partial \varphi} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \varphi'} \right) \frac{d\varphi}{dx} + \text{etc.}$$

Da nun jedes Glied auf der rechten Seite Null ist, so muss auch die linke verschwinden.

Eine Verallgemeinerung dieses Satzes auf den Fall, wenn  $L$  auch  $\theta'', \theta'''$ , etc.  $\varphi''$ , etc. enthält, findet man in Kap. X des II. Bandes.

Beisp. 2. Zwei Seiten  $b, c$  und der eingeschlossene Winkel  $A$  eines Dreiecks werden zu Coordinaten  $\theta, \varphi, \psi$  genommen; man beweise, dass den Lagrange'schen Gleichungen durch  $L = B'$  genügt wird.

Es folgt dies leicht aus dem vorigen Beispiel, wenn man die Coordinaten vertauscht.

Beisp. 3. Man zeige, dass die Lagrange'schen Gleichungen unabhängig von einander sind, so dass sich keine aus den anderen ableiten lässt.

Die allgemeine Gleichung (4) in § 396 für  $2T$  lässt sich auch kurz schreiben  $T = T_2 + T_1 + T_0$ , worin  $T_n$  eine homogene Function  $n^{\text{ten}}$  Grades von  $\theta', \varphi'$ , etc. ist. Die Lagrange'schen Gleichungen nehmen dann die Gestalt an

$$A_{11} \theta'' + A_{12} \varphi'' + \dots = w_1, \quad A_{12} \theta'' + A_{22} \varphi'' + \dots = w_2, \quad \text{etc.} = \text{etc.},$$

worin  $w_1, w_2$ , etc. gewisse Functionen von  $\theta, \varphi$ , etc.,  $\theta', \varphi'$ , etc. sind. Liesse sich irgend eine dieser Gleichungen aus den anderen ableiten, so könnte man durch Benutzung derselben Multiplicatoren eine der Gleichungen

$$A_{11} \theta' + A_{12} \varphi' + \dots = 0, \quad A_{12} \theta' + A_{22} \varphi' + \dots = 0, \quad \text{etc.} = 0$$

aus den übrigen herleiten. Diesen letzteren Gleichungen kann man sämmtlich genügen, auch wenn  $\theta', \varphi'$ , etc. von Null verschiedene Werthe haben. Da diese  $\frac{\partial T_2}{\partial \theta'}, \frac{\partial T_2}{\partial \varphi'}$ , etc. sind, so folgt aus Euler's Theorem über homogene Functionen, dass  $T_2$  für dieselben Werthe der Geschwindigkeiten  $\theta', \varphi'$ , etc. Null sein muss.  $T_2$  ist aber dadurch erhalten worden, dass man in Gl. (2) des § 396 gewisse Werthe von  $x', y', z'$ , die nicht sämmtlich Null sind, substituirte, ist daher eine wesentlich positive Function und kann nicht verschwinden.

Daraus folgt, dass die Eliminationsdeterminante der obigen Gleichungen, d. h. die Discriminante von  $T_2$ , nicht Null sein kann. Es lässt sich auch beweisen, dass diese Discriminante positiv ist; denn gibt man den Coordinaten  $\theta, \varphi$ , etc. ihre augenblicklichen Werthe, so sind die Geschwindigkeiten  $\theta', \varphi'$ , etc. willkürlich.  $T_2$  ist daher eine quadratische Function von  $\theta', \varphi'$ , etc., welche ihrem Wesen nach positiv ist. Aus der Lehre von den quadratischen Functionen folgt also, dass ihre Discriminante positiv ist. Siehe auch Band II, am Ende, die Note zu § 60.

§ 400. Unbestimmte Multiplicatoren. Um die Lagrange'schen Gleichungen benutzen zu können, muss man die Function  $L$  durch die unabhängigen Variablen des Systems ausdrücken. Sind die geometrischen Bedingungen etwas verwickelt, so kann dies sehr langwierig werden. Manchmal ist es von Vorthail,  $L$  als Function einer grösseren Anzahl Coordinaten als nöthig auszudrücken und geometrische Beziehungen zu haben, die sie verbinden. Man nehme an,  $L$  sei als Function der Coordinaten  $\theta, \varphi, \psi$ , etc.,  $\theta', \varphi', \psi'$ , etc. ausgedrückt und es beständen zwei geometrische Gleichungen, welche diese Coordinaten verbinden, nämlich

$$f(\theta, \varphi, \text{etc.}) = 0, \quad F(\theta, \varphi, \text{etc.}) = 0 \quad . \quad . \quad . \quad (1).$$

Um das Vorfahren zu vereinfachen, nehmen wir an, es gebe nur *zwei* geometrische Gleichungen; man wird aber sehen, dass unsre Entwicklung durchaus allgemein ist und sich auf jede Anzahl von Bedingungen anwenden lässt.

Nach dem Princip der virtuellen Arbeit ist

$$\left( \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \theta'} - \frac{\partial L}{\partial \theta} \right) \delta \theta + \left( \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \varphi'} - \frac{\partial L}{\partial \varphi} \right) \delta \varphi + \text{etc.} = 0 \quad . \quad . \quad (2),$$

ebenso

$$\frac{\partial f}{\partial \theta} \delta \theta + \frac{\partial f}{\partial \varphi} \delta \varphi + \text{etc.} = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3)$$

und

$$\frac{\partial F}{\partial \theta} \delta \theta + \frac{\partial F}{\partial \varphi} \delta \varphi + \text{etc.} = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (4).$$

Da die Coordinaten  $\theta, \varphi$ , etc. durch zwei geometrische Gleichungen verbunden sind, so sind zwei von ihnen abhängige Variable; es mögen dies  $\theta$  und  $\varphi$  sein. Nach dem aus der Differentialrechnung bekannten Verfahren multipliciren wir (3) und (4) mit zwei beliebigen Grössen  $\lambda$  und  $\mu$  und addiren die Producte zu (2). Alsdann wählen wir  $\lambda$  und  $\mu$  so, dass die Coefficienten von  $\delta \theta, \delta \varphi$  Null werden. Da die übrig bleibenden Coordinaten  $\psi$ , etc. unabhängig von einander sind, so müssen auch die Coefficienten von  $\delta \psi$ , etc. verschwinden. Man erhält auf diese Art

$$\left. \begin{aligned} \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \theta'} - \frac{\partial L}{\partial \theta} + \lambda \frac{\partial f}{\partial \theta} + \mu \frac{\partial F}{\partial \theta} &= 0 \\ \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \varphi'} - \frac{\partial L}{\partial \varphi} + \lambda \frac{\partial f}{\partial \varphi} + \mu \frac{\partial F}{\partial \varphi} &= 0 \\ \text{etc.} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad . \quad . \quad . \quad (5),$$

noch die Gleichungen (1) hinzu, so hat man genug Gleichungen, um alle Coordinaten und die beiden Multiplicatoren  $\lambda$  und  $\mu$  zu finden.

Diesen Gleichungen kann man eine einfachere Gestalt geben. Man beachte, dass die geometrischen Functionen  $f$  und  $F$  die Differentialquotienten  $\theta'$ ,  $\varphi'$ , etc. nicht enthalten. (Vergl. auch § 396.) Wir wollen nun

$$L_1 = L + \lambda f + \mu F \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (6)$$

setzen und  $L_1$  so behandeln, als ob es die Lagrange'sche Function wäre. Substituirt man den Werth von  $L_1$  in die *typische Gleichung*

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L_1}{\partial \theta'} - \frac{\partial L_1}{\partial \theta} = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (7),$$

worin  $\theta$  eine jede der Coordinaten repräsentiren mag und vereinfacht die Resultate, indem man bedenkt, dass  $f=0$ ,  $F=0$  ist, so erhält man der Reihe nach sämtliche Gleichungen (5). Dasselbe Verfahren liefert auch die geometrischen Gleichungen (1), wenn man  $\lambda$  und  $\mu$  unter die Coordinaten einschliesst. Da z. B.  $L_1$  kein  $\lambda'$  enthält, so ist  $\frac{\partial L_1}{\partial \lambda'} = 0$  und die Gleichung (7) gibt daher, wenn man  $\lambda$  für  $\theta$  schreibt,  $f=0$ .

Wenn die geometrischen Gleichungen (1) die Zeit  $t$  enthalten, so bleiben die Entwicklung und das Resultat die gleichen, denn die willkürlichen Variationen  $\delta\theta$ ,  $\delta\varphi$  müssen (wie in § 351) mit den geometrischen Gleichungen, welche zur Zeit  $t$  gelten, vereinbar sein.

Beisp. Ein Massenpunkt, auf welchen keine gegebenen Kräfte wirken, wird gezwungen auf dem sich bewegenden Kreis  $x^2 + y^2 = 2ax$  zu bleiben; man zeige, dass  $x = at \left[ 1 + \cos \left( B + \frac{A}{t} \right) \right]$ ,  $y = at \sin \left( B + \frac{A}{t} \right)$  ist, worin  $A$  und  $B$  Integrationsconstante sind.

§ 401. Die Lagrange'schen Gleichungen für Momentankräfte. *Man soll die allgemeinen Bewegungsgleichungen für Momentankräfte ableiten.*

Es sei  $\delta U_1$  das virtuelle Moment der Momentankräfte, welches durch eine allgemeine Verrückung des Systems erzeugt wird. Man kann ihm mittelst der geometrischen Bedingungen des Systems die Gestalt geben

$$\delta U_1 = P\delta\theta + Q\delta\varphi + \dots$$

Das virtuelle Moment der Bewegungsgrößen, welche den Massenpunkten gegeben werden, ist

$$\Sigma m[(x'_1 - x'_0)\delta x + (y'_1 - y'_0)\delta y + (z'_1 - z'_0)\delta z],$$

worin  $(x'_0, y'_0, z'_0)$ ,  $(x'_1, y'_1, z'_1)$  die Werthe von  $(x', y', z')$  grade vor und grade nach der Wirkung der Momentankräfte sind.

$\theta'_0, \varphi'_0$ , etc.,  $\theta'_1, \varphi'_1$ , etc. seien die Werthe von  $\theta', \varphi'$ , etc. grade vor und grade nach den Stößen und  $T_0, T_1$  die Werthe von  $T$ , wenn man für  $\theta', \varphi'$ , etc., bez.  $\theta'_0, \varphi'_0$ , etc. und  $\theta'_1, \varphi'_1$  etc. substituirt. Das virtuelle Moment der Be-

wegungsgrößen ist dann, wie in § 397,  $\left(\frac{\partial T_1}{\partial \theta_1'} - \frac{\partial T_0}{\partial \theta_0'}\right) \delta \theta$ . Die Lagrange'schen Gleichungen der Momentankräfte kann man daher schreiben

$$\frac{\partial T_1}{\partial \theta_1'} - \frac{\partial T_0}{\partial \theta_0'} = P$$

und ähnlich für  $\varphi, \psi$ , etc. Man gibt ihnen manchmal die passende Form

$$\left(\frac{\partial T}{\partial \theta'}\right)_0 = P, \quad \left(\frac{\partial T}{\partial \varphi'}\right)_0 = Q, \text{ etc.,}$$

worin die jede Grösse einschliessenden Klammern angeben, dass diese Grösse zwischen den erwähnten Grenzen zu nehmen ist. Manchmal, wenn kein Irrthum in Bezug auf die speciellen Grenzen, die man meint, entstehen kann, lässt man diese weg und behält nur die Klammern vielleicht mit einem Unterscheidungszeichen bei.

Wenn die in den Klammern stehenden Grössen, wie in unserm Fall, lineare Functionen der Variablen  $\theta', \varphi'$ , etc. sind, kann man die Ausdrücke auch anders auslegen. Es lässt sich dann sagen, *die Klammern gäben an, dass man nach Ausführung aller anderen in den Klammern angegebenen Operationen  $\theta_1' - \theta_0'$ ,  $\varphi_1' - \varphi_0'$ , etc. statt  $\theta', \varphi'$ , etc. schreiben soll.*

§ 402. Interpretirt man die Gleichungen nach den allgemeinen Principien in § 283, nämlich danach, *dass die Bewegungsgrößen der Massenpunkte grade nach einem Stoss zusammen mit den umgedrehten Bewegungsgrößen grade vorher der Momentankraft äquivalent sind*, so scheint es wohl passend zu sein, die Grösse  $\frac{\partial T}{\partial \theta'}$  die allgemeine Componente der Bewegungsgrößen in Bezug auf  $\theta$  zu nennen, wie in Thomson und Tait's *Natural Philosophy* vorgeschlagen wird. Kürzer noch könnte man sagen, sie sei die  $\theta$ -Componente der Bewegungsgrösse. Ebenso liesse sich die  $\theta$ -Componente der Effectivkräfte als  $\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \theta'} - \frac{\partial T}{\partial \theta}$  definiren.

Man nehme z. B. an, die Variation  $\delta \theta$  einer Coordinate hätte die Wirkung, das System als Ganzes um eine Gerade den Winkel  $\delta \theta$  beschreiben zu lassen; alsdann ist  $\frac{\partial T}{\partial \theta'}$  der Winkelbewegungsgrösse um diese Gerade gleich. Wenn aber die Variation  $\delta \theta$  das System als Ganzes parallel zu einer Geraden um die Strecke  $\delta \theta$  fortbewegt, so ist  $\frac{\partial T}{\partial \theta'}$  die Translationsbewegungsgrösse parallel zu dieser Geraden. Siehe die §§ 306, 308.

Es ergibt sich dies auch unmittelbar aus dem allgemeinen Ausdruck

$$\frac{\partial T}{\partial \theta'} = \Sigma m \left( x' \frac{\partial x'}{\partial \theta'} + y' \frac{\partial y'}{\partial \theta'} + z' \frac{\partial z'}{\partial \theta'} \right)$$

in § 397. Die gegebene Gerade nehme man zur  $z$ -Axe. Im ersten Fall ist  $x' = -y\theta'$ ,  $y' = x\theta'$ ,  $z' = 0$ ; der Ausdruck reducirt sich daher auf  $\Sigma m (-x'y + y'x)$ ,

welcher die Winkelbewegungsgrösse darstellt. Im zweiten Fall ist  $x' = 0$ ,  $y' = 0$ ,  $z' = \theta'$ , der Ausdruck wird daher  $\Sigma m z'$ , welches die lineare Bewegungsgrösse ist.

Die Gleichungen für Momentankräfte hat Lagrange nicht gegeben. Wie es scheint, hat sie zuerst Prof. Niven aus der Lagrange'schen Gleichung

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \theta'} - \frac{\partial T}{\partial \theta} = \frac{\partial U}{\partial \theta}$$

abgeleitet.

Man kann nämlich eine Momentankraft als die Grenze einer sehr grossen Kraft, die sehr kurze Zeit wirkt, ansehen. Es seien  $t_0$ ,  $t_1$  die Zeiten des Beginns und des Endes der Wirkung der Kraft. Integriert man nun die Gleichung zwischen den Grenzen  $t = t_0$  und  $t = t_1$ , so erhält man als Integral des ersten Gliedes  $\left(\frac{\partial T}{\partial \theta'}\right)_{t_0}^{t_1}$ , welches der Unterschied des Anfangs- und Endwerthes von  $\frac{\partial T}{\partial \theta'}$  ist. Das

Integral des zweiten Gliedes ist Null; denn  $\frac{\partial T}{\partial \theta}$  ist eine Function von  $\theta$ ,  $\varphi$ , etc.,  $\theta'$ ,  $\varphi'$ , etc., die, obgleich variabel, während der Zeit  $t_1 - t_0$  endlich bleibt. Wenn  $A$  ihren grössten Werth im Verlauf dieser Zeit angibt, so ist das Integral kleiner als  $A(t_1 - t_0)$ , ein Ausdruck, der zuletzt verschwindet. Die Lagrange'sche Gleichung wird daher  $\left(\frac{\partial T}{\partial \theta'}\right)_{t_0}^{t_1} = \frac{\partial U_1}{\partial \theta}$ . Siehe die Abhandlung im *Mathematical Messenger*, Mai 1867.

§ 403. Plötzliche Festlegungen. *Ein System von Körpern bewegt sich auf gegebene Art; plötzlich werden bestimmte Punkte ergriffen und gezwungen sich unter neuen Bedingungen zu bewegen. Man finde die folgende Bewegung.*

Um die Sache zu vereinfachen, möge das System vier Coordinaten  $\theta$ ,  $\varphi$ ,  $\psi$ ,  $\chi$  haben und zwei Punkte  $A$ ,  $B$  plötzlich genöthigt werden, auf zwei Ebenen zu bleiben, welche sich parallel zu sich selbst mit gegebenen Geschwindigkeiten  $\alpha$  und  $\beta$  bewegen, wobei die Bewegungen der Punkte auf den Ebenen vollkommen frei und zwanglos sind. Fallen z. B.  $A$  und  $B$  zusammen und findet die Bewegung in der Ebene statt, so ist dies dasselbe, als wenn man sagt, dass man den Punkt  $A$  sich plötzlich in gegebener Richtung mit gegebener Geschwindigkeit bewegen lasse. § 171.

Es seien  $p$ ,  $q$  die Abstände (oder beliebige geeignete Functionen der Abstände) der Punkte  $A$ ,  $B$  von zwei festen den sich bewegenden parallelen Ebenen; es sind dann  $p$ ,  $q$  bekannte Functionen von  $\theta$ ,  $\varphi$ ,  $\psi$ ,  $\chi$  und in das System werden dadurch zwei geometrische Gleichungen von der Form

$$p = f(\theta, \varphi, \psi, \chi) = a + \alpha t, \quad q = F(\theta, \varphi, \psi, \chi) = b + \beta t \quad . \quad . \quad (1)$$

eingeführt. Durch den nun eintretenden Zwang werden die Variablen  $p$ ,  $q$  bestimmte Grössen und das System hat nur zwei Freiheitsgrade. Wir betrachten jedoch das System, als habe es vier Freiheitsgrade und zwei Stosskräfte wirkten darauf, dass die folgende Bewegung den Gleichungen (1) genügt.

Die Lösung der Aufgabe wird sehr vereinfacht, wenn man die Coordinaten von Anfang an so wählt, dass zwei von ihnen  $p$  und  $q$  sind, während die beiden anderen, sagen wir  $\theta$ ,  $\varphi$ , unabhängige Grössen bleiben. Hat man diese Wahl nicht getroffen, so kann man analytisch den Wechsel der Coordinaten von  $\theta$ ,  $\varphi$ ,  $\psi$ ,  $\chi$  in  $\theta$ ,  $\varphi$ ,  $p$ ,  $q$  dadurch bewirken, dass man die aus (1) folgenden Werthe von  $\psi$ ,  $\chi$ , durch  $\theta$ ,  $\varphi$ ,  $p$ ,  $q$  ausdrückt und in alle mit dem Problem verbundenen Gleichungen einsetzt. Man kann  $\theta$ ,  $\varphi$  die *Coordinaten der relativen Bewegung* nennen, weil, (während  $p$ ,  $q$  die durch (1) gegebenen Werthe in Ausdrücken von  $t$  haben), ihre willkürlichen Variationen das System in alle mit den Zwangsbedingungen verträgliche Lagen bringen;  $p$  und  $q$  kann man dagegen den Namen *Coordinaten des Zwanges* beilegen, weil ihre willkürlichen Variationen den Bedingungen des Zwanges widersprechen. Diese Wahl der Coordinaten ist genau dieselbe wie in § 293.

Da die Stosskräfte normal zu den sich bewegenden Ebenen wirken, so ist

$$\delta U = P \delta p + Q \delta q,$$

worin  $P$  und  $Q$  als die Maasse der Stosskräfte angesehen werden. Die Lagrange'schen Gleichungen sind daher

$$\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\theta}'}\right)_0 = 0, \quad \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}'}\right)_0 = 0, \quad \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{p}'}\right)_0 = P, \quad \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}'}\right)_0 = Q.$$

Nur die beiden ersten sind nöthig, um die Aenderung der Bewegung zu finden; man kann sie in den folgenden Satz zusammenfassen: *Die allgemeinen Componenten der Bewegungsgrößen in Bezug auf die Coordinaten der relativen Bewegung werden durch die Momentankräfte nicht geändert.* Es ist die Verallgemeinerung des Satzes in § 288. *Man erkennt auch, dass man, wenn nur die folgende Bewegung gesucht wird, die Kräftefunction  $U$  nicht zu berechnen braucht, es vielmehr ausreicht, wenn man die Form von  $T$  kennt.*

Wenn es darauf ankommt, die Coordinaten  $\theta$ ,  $\varphi$ ,  $\psi$ ,  $\chi$  zu benutzen, also nicht die des Zwanges und der relativen Bewegung, so ändert man das Verfahren etwas ab. Man schreibt jetzt

$$\delta U = P(f_\theta \delta \theta + f_\varphi \delta \varphi + \dots) + Q(F_\theta \delta \theta + F_\varphi \delta \varphi + \dots),$$

worin die Indices, wie gewöhnlich, die partiellen Differentialquotienten angeben.

Die Lagrange'schen Gleichungen werden dann

$$\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\theta}'}\right)_0 = P f_\theta + Q F_\theta, \quad \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}'}\right)_0 = P f_\varphi + Q F_\varphi, \quad \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\psi}'}\right)_0 = \text{etc.}, \quad \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\chi}'}\right)_0 = \text{etc.}$$

Diese vier Beziehungen, in Verbindung mit denen unter (1), reichen hin, die folgenden Werthe von  $\theta'$ ,  $\varphi'$ ,  $\psi'$ ,  $\chi'$  und wenn erforderlich, auch der Grössen  $P$ ,  $Q$  zu ermitteln.

Beisp. Der Punkt  $O$  einer Scheibe, die sich in Bewegung befindet, muss sich plötzlich mit einer Geschwindigkeit bewegen, deren Componenten  $\alpha$  und  $\beta$  parallel zu den Axen gegeben sind. Man suche die folgende Bewegung. Dasselbe Problem wurde schon in § 171 gelöst.

Es seien  $p$ ,  $q$  die Abstände des Punktes  $O$  von den Axen; die Gleichungen des Zwanges sind  $p = \alpha t$ ,  $q = \beta t$ . Ferner sei  $\theta$  der Winkel, den  $OG$  mit der  $x$ -Axe macht und  $OG = r$ . Alsdann ist

$$2T = (p' - r \sin \theta \theta')^2 + (q' + r \cos \theta \theta')^2 + k^2 \theta'^2$$

und da die relative Bewegung hier nur eine Coordinate, nämlich  $\theta$ , hat,

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{\theta}'} = -(p' - r \sin \theta \theta') r \sin \theta + (q' + r \cos \theta \theta') r \cos \theta + k^2 \theta'.$$

Wenn, wie in § 171,  $u$ ,  $v$  die Componenten der Geschwindigkeit des Schwerpunktes  $G$  sind und  $\omega$  die Winkelgeschwindigkeit vor dem Stoss, so ist  $p'_0 - r \sin \theta \omega = u$ ,  $q'_0 + r \cos \theta \omega = v$ ,  $\theta'_0 = \omega$  grade vor dem Stoss und grade nachher  $p'_1 = \alpha$ ,  $q'_1 = \beta$ . Substituirt man diese Werthe in den Ausdruck für  $\frac{\partial T}{\partial \dot{\theta}'}$  und setzt die Resultate gleich, so erhält man den Werth von  $\theta'$  grade nach dem Stoss. Er stimmt mit dem in § 171 für  $\omega'$  gegebenen überein.

§ 404. Wenn zwei glatte elastische Systeme in einem Punkt aufeinander stossen, so theilen wir die Dauer des Stosses in die zwei Perioden der Compression und der Restitution, wie in §§ 179, 185 etc. Es seien  $\theta'_0$ ,  $\varphi'_0$ , etc.;  $\theta'_1$ ,  $\varphi'_1$ , etc.;  $\theta'_2$ ,  $\varphi'_2$ , etc. die Werthe der Geschwindigkeiten der Coordinaten grade ehe der Zusammenstoss beginnt, im Moment der stärksten Compression bez. im Moment der Trennung. Ist  $U_1$  die Arbeit des Compressionsstosses, so hat  $U_1$  das Maass dieses Stosses als einen Factor, während die übrigen Factoren aus der geo-



Restitutionsstosses. Man erhält so zwei Reihen von Gleichungen von dem Typus

$$\left(\frac{\partial T}{\partial \theta'}\right)_0 = \frac{\partial U_1}{\partial \theta}; \quad \left(\frac{\partial T}{\partial \theta'}\right)_0^2 = \frac{\partial U_1}{\partial \theta} (1 + e)$$

und ähnliche Gleichungen für  $\varphi$ ,  $\psi$ , etc. Verbindet man nun die erste Reihe von Gleichungen mit der geometrischen Bedingung, welche ausdrückt, dass die normalen Geschwindigkeiten der Berührungspunkte gleich sind, § 183, so erhält man eine hinreichende Anzahl von Gleichungen, um  $\theta_1'$ , etc. und den Compressionsstoss zu finden. Substituirt man den Werth dieses Stosses in die zweite Reihe, so hat man so viele Gleichungen, als Coordinaten zur Ermittlung von  $\theta_2'$ ,  $\varphi_2'$ , etc. vorhanden sind.

Da beide Reihen von Gleichungen linear sind und auf ihren linken Seiten dieselben Coefficienten haben, so müssen die Werthe von  $\theta_1' - \theta_0'$ , etc., die man aus den ersten findet, den aus den zweiten sich ergebenden Werthen von  $\theta_2' - \theta_0'$ , etc. proportional sein, d. h.

$$\theta_2' - \theta_0' = (1 + e)(\theta_1' - \theta_0'), \quad \varphi_2' - \varphi_0' = (1 + e)(\varphi_1' - \varphi_0'), \text{ etc.}$$

Wenn man daher die Auflösung für den Fall, dass das System unelastisch ist, kennt, so lässt sich die Bewegung für ein elastisches System unmittelbar daraus ableiten.

Zu demselben Resultat kommt man auch ohne Benutzung der Lagrange'schen Gleichungen. Man nehme an, ein System von Körpern (wie die Stäbe in § 176) sei durch Gelenke verbunden, stosse in einem beliebigen Punkt  $A$  gegen ein glattes Hinderniss und die Bewegung gehe in der Ebene vor sich.  $R$  sei der Stoss bei  $A$ , von dem Anfang des Zusammenstosses an bis zu einer Zeit  $t$  gemessen, die kürzer ist, als die des Stosses. Die Richtung von  $R$  bleibe ferner während des Stosses unverändert.  $u_0$ ,  $v_0$ ,  $u$ ,  $v$  seien die Componenten der Geschwindigkeit des Schwerpunktes eines der Körper und  $\omega_0$ ,  $\omega$  die Winkelgeschwindigkeiten beim Beginn des Stosses bez. zur Zeit  $t$ . Die dynamischen Gleichungen, welche die Effectivkräfte  $m(u - u_0)$ ,  $m(v - v_0)$  und die Paare  $mk^2(\omega - \omega_0)$ , durch das ganze System genommen, mit dem Stoss  $R$  verbinden, sind bekanntlich linear (§ 169). Auch die Gleichungen, welche die Identität der Geschwindigkeiten der Gelenkpunkte ausdrücken, sind lineare Functionen der Geschwindigkeiten  $u$ ,  $v$ ,  $\omega$ . Nimmt man an, es werde durch den Stoss kein Gelenk gebrochen, so gelten diese Gleichungen auch für die Differenzen  $u - u_0$ ,  $v - v_0$ ,  $\omega - \omega_0$ . Es sind daher nur lineare Gleichungen zu lösen; für jeden Körper ist daher  $u - u_0 = aR$ ,  $v - v_0 = bR$ , etc., worin  $a$ ,  $b$ , etc. von den geometrischen Beziehungen des Systems abhängen. Sind also  $u_0$ ,  $u_1$ ,  $u_2$  die Werthe irgend einer Componente der Bewegung beim Beginn des Stosses, im Moment der stärksten Compression und bei der Beendigung des Zusammenstosses, so ist  $u_2 - u_0 = (u_1 - u_0)(1 + e)$ .

§ 405. Beispiele zu den Lagrange'schen Gleichungen. Ein Körper, dessen zwei Hauptmomente für den Schwerpunkt gleich sind, dreht sich unter der Wirkung der Schwere um einen festen Punkt  $O$ , der in der Axe des ungleichen Momentes liegt. Man bestimme die Bedingungen, unter welchen ein einfaches gleichwerthiges Pendel existirt.

*Definition.* Wenn ein Körper an einem festen Punkt  $O$  unter dem Einfluss der Schwere hängt und wenn die Winkelbewegung der Geraden, die  $O$  mit seinem Schwerpunkt verbindet, dieselbe ist, wie die eines Fadens von der Länge  $l$ , an dessen Ende ein schwerer Punkt befestigt ist, so heisst  $l$  die Länge des einfachen, gleichwerthigen Pendels. Es ist dies eine Ausdehnung der Definition in § 92.

Es seien  $OC$  die Axe des ungleichen Momentes;  $A$ ,  $A$ ,  $C$  die Hauptmomente für den festen Punkt und die übrige Bezeichnung sei dieselbe wie in § 365, Beisp. 1. Es ist dann

$$2T = A(\theta'^2 + \sin^2 \theta \psi'^2) + C(\varphi' + \psi' \cos \theta)^2,$$

$$U = mgh \cos \theta + \text{Constante},$$

worin  $h$  den Abstand des Schwerpunktes von dem festen Punkt bedeutet und vorausgesetzt wird, dass die Schwere in der positiven Richtung der  $z$ -Axe wirkt. Die Lagrange'schen Gleichungen werden, wie man findet,

$$\frac{d}{dt}(A\theta') - A \sin \theta \cos \theta \psi'^2 + C\psi'(\varphi' + \psi' \cos \theta) \sin \theta = -Mgh \sin \theta,$$

$$\frac{d}{dt}[C(\varphi' + \psi' \cos \theta)] = 0,$$

$$\frac{d}{dt}[C(\varphi' + \psi' \cos \theta) \cos \theta + A \sin^2 \theta \psi'] = 0.$$

Durch Integration der zweiten Gleichung erhält man

$$\varphi' + \psi' \cos \theta = n,$$

worin  $n$  eine Constante ist, welche die Winkelgeschwindigkeit um die Axe des ungleichen Momentes ausdrückt (siehe § 256), und wenn man die dritte integrirt

$$Cn \cos \theta + A \sin^2 \theta \psi' = \alpha,$$

worin  $\alpha$  eine zweite Constante bedeutet, die das Moment der Bewegungsgrösse um die Verticale durch  $O$  darstellt. (Siehe §§ 264, 265 und auch 403.)

Bei der Benutzung der Lagrange'schen Gleichungen muss man sich vor gewissen Fehlern hüten, die man leicht machen kann. Bezeichnet  $\omega_3$  die Winkelgeschwindigkeit um  $OC$ , so ist, wie man aus den Euler'schen Gleichungen, § 251, weiss,  $\omega_3$  constant. Ist  $n$  diese Constante, so kann man durchaus correct der doppelten lebendigen Kraft des Körpers die Gestalt

$$2T = A(\theta'^2 + \sin^2 \theta \psi'^2) + Cn^2$$

geben.

Wollte man aber diesen Werth von  $T$  in die Lagrange'schen Gleichungen einsetzen, so würde man durchaus falsche Resultate erhalten. Der Grund liegt darin, dass in den Lagrange'schen Gleichungen alle Differentialquotienten, mit Ausnahme desjenigen nach der Zeit, partiell sind. Obgleich  $\omega_3$  constant und daher sein *totaler* Differentialquotient nach  $t$  Null ist, so sind doch seine *partiellen* Differentialquotienten nach  $\theta$ ,  $\varphi$ , etc. nicht Null. Ueberdies enthält die Gleichung  $\omega_3 = n$  die Geschwindigkeiten  $\varphi'$ ,  $\psi'$  (§ 256); wir können sie also nicht, wie in § 396 erklärt wurde, als eine geometrische Gleichung zur Reduction der unabhängigen Coordinaten benutzen.

An Stelle der ersten Gleichung kann man die Gleichung der lebendigen Kraft benutzen; man findet

$$A(\sin^2 \theta \psi'^2 + \theta'^2) = \beta + 2Mgh \cos \theta.$$

Um die willkürlichen Constanten  $\alpha$  und  $\beta$  zu ermitteln, muss man die Anfangswerthe von  $\theta$  und  $\psi$  zu Hülfe nehmen. Sind  $\theta_0$ ,  $\psi_0$ ,  $\frac{d\theta_0}{dt}$ ,  $\frac{d\psi_0}{dt}$  die Anfangswerthe von  $\theta$ ,  $\psi$ ,  $\frac{d\theta}{dt}$ ,  $\frac{d\psi}{dt}$ , so werden die obigen Gleichungen

$$\left. \begin{aligned} \sin^2 \theta \frac{d\psi}{dt} + \frac{Cn}{A} \cos \theta &= \sin^2 \theta_0 \frac{d\psi_0}{dt} + \frac{Cn}{A} \cos \theta_0 \\ \sin^2 \theta \left( \frac{d\psi}{dt} \right)^2 + \left( \frac{d\theta}{dt} \right)^2 &= \sin^2 \theta_0 \left( \frac{d\psi_0}{dt} \right)^2 + \left( \frac{d\theta_0}{dt} \right)^2 + 2 \frac{Mgh}{A} (\cos \theta - \cos \theta_0) \end{aligned} \right\} \quad (1).$$

Löst man diese Gleichungen auf, so erhält man  $\theta$  und  $\psi$  als Functionen von  $t$ , womit die Bewegung der Linie  $OG$  bestimmt ist. Die entsprechenden Gleichungen

für die Bewegung des einfachen gleichwerthigen Pendels  $OL$  ergeben sich, wenn man  $C=0$ ,  $A=MI^2$  und  $h=l$  setzt, unter  $l$  die Länge des Pendels verstanden. Die Gleichungen (1) werden dann

$$\left. \begin{aligned} \sin^2 \theta \frac{d\psi}{dt} &= \sin^2 \theta_0 \frac{d\psi_0}{dt} \\ \sin^2 \theta \left( \frac{d\psi}{dt} \right)^2 + \left( \frac{d\theta}{dt} \right)^2 &= \sin^2 \theta_0 \left( \frac{d\psi_0}{dt} \right)^2 + \left( \frac{d\theta_0}{dt} \right)^2 + 2 \frac{g}{l} (\cos \theta - \cos \theta_0) \end{aligned} \right\} (2).$$

Sollen die beiden Linien  $OG$  und  $OL$  dieselben Bewegungen machen, so müssen die beiden Gleichungen (1) und (2) identisch sein. Dieser Fall tritt ein, wenn entweder  $Cn=0$  oder  $\theta=\theta_0$  ist. In dem ersten Fall muss entweder  $n=0$  oder  $C=0$  sein, so dass also entweder der Körper keine Rotation um  $OG$  haben darf oder ein Stab ohne Dicke sein muss. In dem zweiten Fall müssen  $\theta$  und  $\psi'$  während der Bewegung constant bleiben, so dass sich also der Körper stationär bewegt und dabei einen constanten Winkel mit der Verticalen macht. In beiden Fällen sind die zwei Reihen von Gleichungen identisch, wenn  $Mhl=A$  ist. Dies ist dieselbe Formel wie in § 92.

§ 406. Beisp. 1. Man zeige, wie sich die Euler'schen Gleichungen, § 251, aus den Lagrange'schen ableiten lassen. Nimmt man die Hauptaxen für den festen Punkt zu Bezugsaxen, so ist

$$2T = A\omega_1^2 + B\omega_2^2 + C\omega_3^2.$$

Man kann  $(\omega_1, \omega_2, \omega_3)$  nicht zu unabhängigen Variablen nehmen, weil die Coordinaten eines jeden Massenpunktes des Körpers sich nicht durch sie ausdrücken lassen, ohne Differentialquotienten nach der Zeit in die geometrischen Gleichungen einzuführen. (Siehe § 396.) Wir wollen daher  $\omega_1, \omega_2, \omega_3$  durch  $\theta, \varphi, \psi$  ausdrücken. Nach § 256 hat man

$$\left. \begin{aligned} \omega_1 &= \theta' \sin \varphi - \psi' \sin \theta \cos \varphi \\ \omega_2 &= \theta' \cos \varphi + \psi' \sin \theta \sin \varphi \\ \omega_3 &= \varphi' + \psi' \cos \theta \end{aligned} \right\}.$$

Da, wenn man eine der Euler'schen Gleichungen aufgestellt hat, die übrigen nach den Gesetzen der Symmetrie daraus folgen, so brauchen wir nur eine der Lagrange'schen Gleichungen zu benutzen und nehmen diejenige, die das einfachste Verfahren verspricht.  $\varphi'$  tritt in den Ausdrücken für  $\omega_1, \omega_2$  nicht auf; wir benutzen daher die Gleichung

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \varphi'} - \frac{\partial T}{\partial \varphi} = \frac{\partial U}{\partial \varphi}.$$

Nun ist

$$\frac{\partial T}{\partial \varphi} = C\omega_3, \quad \frac{\partial \omega_3}{\partial \varphi} = C\omega_3 \quad \text{und} \quad \frac{\partial T}{\partial \varphi} = A\omega_1 \frac{\partial \omega_1}{\partial \varphi} + B\omega_2 \frac{\partial \omega_2}{\partial \varphi} = A\omega_1 \omega_2 - B\omega_2 \omega_1,$$

wie man findet, wenn die Ausdrücke für  $\omega_1, \omega_2$  differenzirt werden. Ferner ist nach § 340, wenn  $N$  das Moment der Kräfte um die Axe von  $C$  bedeutet,  $\frac{\partial U}{\partial \varphi} = N$ .

Durch Substitution erhält man  $\frac{d}{dt}(C\omega_3) - (A - B)\omega_1\omega_2 = N$ , die typische Gestalt der Euler'schen Gleichungen.

Beisp. 2. Ein Körper dreht sich um einen festen Punkt und seine lebendige Kraft ist durch

$$T = \frac{1}{2} [A\omega_1^2 + B\omega_2^2 + C\omega_3^2 - 2D\omega_2\omega_3 - 2E\omega_3\omega_1 - 2F\omega_1\omega_2]$$

gegeben. Man zeige, dass sich die Euler'schen Bewegungsgleichungen, wenn die Axen in dem Körper festliegen, aber nicht nothwendiger Weise Hauptaxen sein müssen, in der Form schreiben lassen

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \omega_1} - \frac{\partial T}{\partial \omega_2} \omega_3 + \frac{\partial T}{\partial \omega_3} \omega_2 = L$$

mit zwei ähnlichen Gleichungen. Dieses Resultat rührt von Lagrange her.

§ 407. Beisp. 1. Man leite die Gleichung der lebendigen Kraft aus den Lagrange'schen Gleichungen ab.

Multipliziert man jede der in der typischen Form

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \theta'} - \frac{\partial T}{\partial \theta} = \frac{\partial U}{\partial \theta}$$

enthaltenen Gleichungen mit der entsprechenden Geschwindigkeit  $\theta'$  und addirt, so ergibt sich

$$\Sigma \left[ \frac{d}{dt} \left( \theta' \frac{\partial T}{\partial \theta'} \right) - \theta'' \frac{\partial T}{\partial \theta'} \right] - \Sigma \theta' \frac{\partial T}{\partial \theta} = \Sigma \theta' \frac{dU}{d\theta},$$

worin  $\Sigma$  die Summirung für alle Coordinaten angibt. Wenn nun die geometrischen Gleichungen die Zeit nicht explicite enthalten, so ist  $T$  eine homogene Function zweiten Grades von  $\theta'$ ,  $\varphi'$ , etc. (§ 396). Ebenso sind  $T$  und  $U$  Functionen von  $\theta$ ,  $\varphi$ , etc., aber nicht von  $t$ . Daher ist

$$\Sigma \theta' \frac{\partial T}{\partial \theta'} = 2T, \quad \frac{dT}{dt} = \Sigma \left\{ \theta' \frac{\partial T}{\partial \theta} + \theta'' \frac{\partial T}{\partial \theta'} \right\}, \quad \frac{dU}{dt} = \Sigma \theta' \frac{\partial U}{\partial \theta}$$

und durch Substitution in die obige Gleichung

$$2 \frac{dU}{dt} - \frac{dT}{dt} = \frac{dU}{dt}, \quad \text{folglich} \quad T = U + C,$$

worin  $C$  eine willkürliche Constante ist, die man zuweilen auch *die Constante der lebendigen Kraft* nennt.

Beisp. 2. Man finde die Gleichung, welche derjenigen der lebendigen Kraft entspricht, wenn  $T$  und  $U$  beliebige Functionen der Variablen  $\theta$ ,  $\varphi$ , etc. der Lagrange'schen Gleichungen sind,  $T$  auch eine Function von  $\theta'$ ,  $\varphi'$ , etc. ist, die nicht dadurch eingeschränkt wird, dass sie vom zweiten Grad sein muss, und auch nicht nothwendiger Weise homogen ist.

Setzt man  $T = T_n + T_{n-1} + \dots + T_0$ , worin  $T_m$  eine homogene Function  $m^{\text{ten}}$  Grades von  $\theta'$ ,  $\varphi'$ , etc. bedeutet, so findet man durch ein ähnliches Verfahren, wie vorher

$$(n-1) T_n + (n-2) T_{n-1} + \dots + T_2 - T_0 = U + C,$$

wobei zu beachten ist, dass das Glied  $T_1$  verschwunden ist. Siehe Band II, § 44.

Sind  $T$  und  $U$  auch *explicite Functionen der Zeit*  $t$ , so ist auf der linken Seite  $\int \frac{\partial L}{\partial t} dt$  zu addiren, wobei  $L = T + U$  ist.

Beisp. 3. **Liouville's Integrale.** Wenn man die Gleichung der lebendigen Kraft in der Form

$$T = \frac{1}{2} M (P\theta'^2 + Q\varphi'^2 + R\psi'^2 + \text{etc.}) = U + C \quad . . . . (1)$$

schreiben kann, worin  $P$  eine Function von  $\theta$  allein,  $Q$  von  $\varphi$  allein u. s. f. ist, während  $M$  eine Function aller Coordinaten sein kann und wenn ferner

$$M(U + C) = F_1(\theta) + F_2(\varphi) + \text{etc.} \quad . . . . (2)$$

ist, worin  $F_1$ ,  $F_2$ , etc. beliebige Functionen bezeichnen, dann sind die ersten Integrale der Lagrange'schen Gleichungen

$$\frac{1}{2} M^2 P \theta'^2 = F_1(\theta) + \alpha, \quad \frac{1}{2} M^2 Q \varphi'^2 = F_2(\varphi) + \beta, \quad \text{etc.} \quad . . . (3)$$

und  $\alpha + \beta + \dots = 0$ . Hieraus lässt sich der Werth von  $\frac{d\theta}{dt}$  als Function von  $\theta$  ableiten.

Man beachte, dass die Bedingung (2), wenn die Anfangsbedingungen willkürlich sind,  $C$  also einen beliebigen Werth haben kann, fordert, dass sowohl  $M$  als  $MU$  die Gestalt  $F_1(\theta) + F_2(\varphi) + \text{etc.}$  haben müssen.

Um diese Integrale zu erhalten, vertauschen wir erstens die Coordinaten und setzen  $P\theta' = x'^2$ ,  $Q\varphi' = y'^2$ , etc., benutzen alsdann die Lagrange'schen Gleichungen und substituieren in das zweite Glied einer jeden  $2(U+C)$  für  $M(x'^2 + y'^2)$ . Eine jede Gleichung wird dann der Differentialquotient eines der Resultate in den Gl. (3).

In § 431 wird bewiesen werden, dass dieses Verfahren einer Vertauschung der unabhängigen Variablen  $t$  mit  $\tau$  gleichkommt, wobei  $dt = M d\tau$  ist. Liouville's Journal, 1846. Bd. XI, XII; 1849, Bd. XIV, S. 291.

Beisp. 4. Die elliptischen Coordinaten eines Massenpunktes sind  $\lambda, \mu, \nu$  und der Massenpunkt wird gezwungen, sich auf einem festen Ellipsoid  $\lambda$  zu bewegen. Die Kräftefunction  $U$  ist durch

$$(\mu^2 - \nu^2) U = F_1(\mu) + F_2(\nu)$$

gegeben, man leite aus den Liouville'schen Integralen ab, dass

$$\frac{(\mu^2 - \nu^2)^2 (\mu^2 - \lambda^2) \mu'}{2 (\mu^2 - h^2) (\mu^2 - k^2)} = F_1(\mu) + C\mu^2 + D,$$

$$\frac{(\mu^2 - \nu^2)^2 (\nu^2 - \lambda^2) \nu'}{2 (\nu^2 - h^2) (\nu^2 - k^2)} = -F_2(\nu) + C\nu^2 + D$$

ist, worin  $h, k$  die Halbaxen der Focalkegelschnitte sind. Durch Division reducirt sich die Bestimmung der Bahn auf eine Integration.

Diese Lösung findet in den folgenden Fällen oder beliebigen Combinationen derselben Anwendung: (1) wenn die Kraft nach einem Centrum gerichtet ist und sich wie der Abstand verhält; man hat  $2U = r^2 = \lambda^2 + \mu^2 + \nu^2 - h^2 - k^2$ , daher  $U(\mu^2 - \nu^2) = F_1(\mu) + F_2(\nu)$ . (2) wenn die Kraft senkrecht zur  $yz$ -Ebene gerichtet ist und umgekehrt wie die dritte Potenz des Abstandes von dieser Ebene variirt; es ist  $\lambda\mu\nu = \pm h k x$ ; daher  $U = \frac{A}{\mu^2 \nu^2}$  und  $(\mu^2 - \nu^2) U$  hat die verlangte

Form. (3) wenn die Kraft central gerichtet und derart ist, dass  $U = \frac{A}{\sqrt{c^2 - m^2}}$ ,

worin  $c$  der Abstand des Massenpunktes von einem der beiden festen Punkte

$$x = \pm \frac{hk}{\lambda}, \quad y = 0, \quad z = 0 \quad \text{und} \quad m^2 \lambda^2 = (\lambda^2 - h^2) (\lambda^2 - k^2)$$

ist. Man bemerke, dass, wenn  $\lambda = h$  oder  $= k$ , d. h. wenn das Ellipsoid eine Ebene wird,  $m = 0$  ist.

§ 408. Beispiele zu den Momentankräften. Beisp. 1. Ein Rhombus, der aus vier durch Gelenke verbundenen Stäben besteht, fällt vom Zustand der Ruhe aus so, dass eine Diagonale vertical bleibt, und der Eckpunkt  $A$  stösst mit der Geschwindigkeit  $V$  gegen eine feste horizontale unelastische Ebene. Man finde die folgende Anfangsbewegung. Dies ist dasselbe Problem, das in § 176 gelöst wurde; zum Vergleich geben wir hier zwei andre Lösungen, welchen beiden die Lagrange'schen Gleichungen zu Grunde liegen.

Die Masse eines jeden Stabes sei die Einheit,  $x$  die Höhe des Schwerpunktes des Rhombus,  $\theta$  die Neigung eines Stabes gegen die Verticale. Nehmen wir  $x$  und  $\theta$  zu Coordinaten des Systems, so ist

$$T = 2 \{ \dot{x}^2 + (k^2 + a^2) \dot{\theta}^2 \}$$

und, wenn  $P$  der Stoss am Punkt  $A$  ist,

$$\delta U = P \delta (x - 2a \cos \theta) = P \delta x + 2aP \sin \theta \delta \theta.$$

Die Lagrange'schen Gleichungen sind nach § 401

$$4(x_1' - x_0') = P, \quad 4(k^2 + a^2)(\theta_1' - \theta_0') = 2aP \sin \theta.$$

Die Anfangs- und Endwerthe von  $x'$  sind  $x_0' = -V$ ,  $x_1' = -2a\omega \sin \theta$ , die von  $\theta'$  sind  $\theta_0' = 0$ ,  $\theta_1' = \omega$ . Setzt man daher  $k^2 = \frac{1}{3}a^2$  und eliminirt  $P$ , so ergibt sich  $\omega = \frac{3}{2} \frac{V}{a} \frac{\sin \theta}{1 + 3 \sin^2 \theta}$ , was mit dem Resultat in § 176 übereinstimmt.

*Bemerkung über die Wahl der Coordinaten.* Gegen die eben gegebene Lösung lässt sich einwenden, dass man alle Lagrange'schen Gleichungen hat benutzen müssen, obgleich die Momentankraft nicht gefunden werden soll. Will man die Einführung der Momentankraft in die Gleichungen vermeiden, so muss man die Coordinaten so wählen, dass die Variation der einen allein (während die andre constant bleibt) den Angriffspunkt des Stosses nicht ändert. Wenn man die Coordinaten  $x$  und  $\theta$  benutzt, so ändert die Variation einer allein die Lage von  $A$ . Nimmt man dagegen  $\theta$  und die Ordinate  $y$  des Punktes  $A$ , welcher die Ebene trifft, zu Coordinaten, so ändert eine Variation von  $\theta$  allein die Lage von  $A$  nicht, und das virtuelle Moment irgend einer an  $A$  angreifenden Kraft tritt in der so gebildeten Gleichung nicht auf. Ebenso sollte man, wenn die Grösse des Stosses auf  $A$  gefunden werden soll, eine Gleichung benutzen, die durch die Variation einer Coordinate, wie  $y$ , welche die Lage von  $A$  im Raum ändert, gebildet wird. Die Coordinaten  $y$  und  $\theta$  sind in § 403 die Coordinaten des Zwanges bezw. der relativen Bewegung genannt worden. Benutzt man sie, so ist

$$T = 2 \{ y'^2 - 4ay'\theta' \sin \theta + (k^2 + a^2 + 4a^2 \sin^2 \theta) \theta'^2 \}.$$

Die einzige jetzt nöthige Gleichung ist  $\left( \frac{\partial T}{\partial \theta'} \right)_0 = 0$ , so dass man also  $U$  nicht zu berechnen braucht. Die Grenzen von  $y'$  sind  $y_0' = -V$ ,  $y_1' = 0$ ; die die von  $\theta'$  sind  $\theta_0' = 0$ ,  $\theta_1' = \omega$ . Den Werth von  $\omega$  findet man ohne Schwierigkeit.

Wenn der Boden elastisch ist, befolgt man die in § 404 gegebene Regel. Da  $\theta_0' = 0$ , so findet man die Winkelgeschwindigkeit eines jeden Stabes nach dem Abprall durch Multiplication des eben für unelastischen Boden gefundenen Werthes von  $\omega$  mit  $(1 + e)$ .

Beisp. 2. Sechs gleiche und gleichförmige Stäbe bilden ein regelmässiges Sechseck und sind an den Eckpunkten durch Gelenke lose verbunden. Einer der Stäbe wird senkrecht zu seiner Richtung in seinem Mittelpunkt durch einen Stoss getroffen; man zeige, dass der gegenüberliegende Stab sich mit einem Zehntel der Geschwindigkeit des getroffenen Stabes zu bewegen beginnt.

[Math. Tripos, 1882.]

Man nehme zur einen Coordinate den Abstand  $y$  des Angriffspunktes des Stosses von der  $x$ -Axe, welche parallel zum getroffenen Stab vorausgesetzt wird, und zur andern den Winkel  $\theta$ , den jeder der anliegenden Stäbe mit der  $x$ -Axe macht. Diese Coordinaten sind am vortheilhaftesten, weil eine Aenderung von  $\theta$  allein den Angriffspunkt des Stosses nicht verrückt. Beachtet man, dass  $\cos \theta = \frac{1}{2}$ , so ist

$$2T = 6y'^2 + 12ay'\theta' + 4(3a^2 + k^2)\theta'^2,$$

worin  $2a$  die Länge eines Stabes bedeutet. Die allein erforderliche Lagrange'sche

Gleichung drückt aus, dass  $\frac{\partial T}{\partial \theta'}$  unverändert bleibt und daher gleich Null ist. Da die Geschwindigkeiten der beiden Stäbe  $y'$  und  $y' + 2a\theta'$  sind, so ergibt sich das Resultat unmittelbar.

Beisp. 3. Das eine Ende eines Balkens, der sich auf einer glatten horizontalen Ebene befindet, liegt fest; eine Kugel  $A$  von der Masse  $m$  ist in Berührung mit ihm und hat den Abstand  $a$  von dem festliegenden Ende. Man bestimme, in welchem Abstand  $b$  eine andre Kugel  $B$  von der Masse  $\mu$  den Balken direct treffen muss, damit der Kugel  $A$  durch den Stoss die grösstmögliche Geschwindigkeit mitgetheilt wird. Der Balken und die Kugeln sind unelastisch.

[Math. Tripos, 1844.]

Es sei  $\theta'$  die Winkelgeschwindigkeit des Balkens,  $y'$  die Geschwindigkeit der Kugel  $B$ ; die relative Geschwindigkeit, mit welcher sich die Kugel dem Balken nähert, ist dann  $z' = y' - b\theta'$  und  $dU = -Pdz$ . Nimmt man  $\theta$  und  $z$  zu Coordinaten, so gibt die eine Gleichung  $\left[\frac{\partial T}{\partial \theta'}\right]_0 = 0$  die Anfangsbewegung. Es wird also  $\frac{\partial T}{\partial \theta'}$  durch den Stoss nicht verändert. Man hat  $2T = (ma^2 + Mk^2)\theta'^2 + \mu(z' + b\theta')^2$ ; da die Grenzwerte  $\theta_0' = 0$ ,  $\theta_1' = \omega$  und  $z_0' = v$ ,  $z_1' = 0$  sind, so erhält man

$$(ma^2 + Mk^2 + \mu b^2)\omega = \mu bv; \text{ daher } \mu b^2 = ma^2 + Mk^2,$$

wenn  $\omega$  ein Maximum ist.

§ 409. Sir W. R. Hamilton hat den allgemeinen Bewegungsgleichungen eine andere Gestalt gegeben, die zuweilen sich besser dazu eignet, die allgemeinen Eigenschaften eines dynamischen Systems zu ermitteln. Diese Umgestaltung kann man aus dem Lemma in § 410 ableiten.

In dem Folgenden beschränken wir uns auf die elementaren Eigenschaften der reciproken Beziehungen. Der Gegenstand wird im zweiten Band wieder aufgenommen und eingehender behandelt werden. Sir W. Hamilton's Beweis seiner Gleichungen fordert, dass  $T$  eine homogene quadratische Function der Geschwindigkeiten sei, was in der Dynamik im Allgemeinen richtig ist. Die Ausdehnung auf den Fall, in welchem die geometrischen Gleichungen die Zeit explicite enthalten, verdankt man Donkin, *Phil. Trans.* 1854.

§ 410. Die reciproke Function<sup>1)</sup>.  $T_1$  sei eine Function beliebiger Grössen, welche man, wie sich gleich zeigen wird, am besten  $\theta'$ ,  $\phi'$ , etc. nennt. Es sei

1) Aus diesem Lemma lässt sich die Methode, partielle Differentialgleichungen durch reciproke Beziehungen aufzulösen, die manchmal die Legendre'sche oder de Morgan'sche heisst, ableiten. Die partielle Differentialgleichung sei  $\varphi(x, y, z_1, p, q) = 0$ , worin  $p$  und  $q$  die partiellen Differentialquotienten von  $z_1$  nach  $x$  und  $y$  sind. Setzt man  $z_2 = -z_1 + px + qy$ , so ist nach dem Lemma  $x = \frac{\partial z_2}{\partial p}$ ,  $y = \frac{\partial z_2}{\partial q}$ . Daraus folgt die Regel: substituiren die Werthe von  $x, y, z_1$  aus den Hülfsleichungen

$$x = \frac{\partial z_2}{\partial p}, \quad y = \frac{\partial z_2}{\partial q}, \quad z_1 = -z_2 + p \frac{\partial z_2}{\partial p} + q \frac{\partial z_2}{\partial q}$$

$$\frac{\partial T_1}{\partial \theta'} = u, \quad \frac{\partial T_1}{\partial \varphi'} = v, \text{ etc.},$$

alsdann lässt sich  $\theta'$ ,  $\varphi'$ , etc. mittelst dieser Gleichungen durch  $u$ ,  $v$ , etc. ausdrücken. Es sei ferner

$$T_2 = -T_1 + u\theta' + v\varphi' + \text{etc.}$$

und  $T_2$  sei durch  $u$ ,  $v$ , etc. ausgedrückt, nachdem die Grössen  $\theta'$ ,  $\varphi'$ , etc. eliminirt wurden. Dann wird

$$\frac{\partial T_2}{\partial u} = \theta', \quad \frac{\partial T_2}{\partial v} = \varphi', \text{ etc.}$$

$T_1$  kann auch eine Function anderer Grössen sein, welche man, wie sich gleich zeigen wird, am besten mit den Buchstaben ohne Strich  $\theta$ ,  $\varphi$ , etc. bezeichnet.  $T_2$  ist dann auch eine Function dieser Grössen und man erhält

$$\frac{\partial T_2}{\partial \theta} = -\frac{\partial T_1}{\partial \theta}, \quad \frac{\partial T_2}{\partial \varphi} = -\frac{\partial T_1}{\partial \varphi}, \text{ etc.}$$

Um dies zu beweisen, nehme man das totale Differential von  $T_2$ ; man erhält

$$dT_2 = -\frac{\partial T_1}{\partial \theta} d\theta + \left(-\frac{\partial T_1}{\partial \theta'} + u\right) d\theta' + \theta' du + \text{etc.}$$

Nach den Voraussetzungen des Lemmas verschwindet der eingeklammerte Ausdruck. Wird nun  $T_2$  als eine Function von  $\theta, u, \varphi, v$ , etc. allein und nicht von  $\theta, \varphi$ , etc.,  $\theta', \varphi'$ , etc. ausgedrückt, so ist

$$dT_2 = \frac{\partial T_2}{\partial \theta} d\theta + \frac{\partial T_2}{\partial u} du + \text{etc.}$$

Setzt man die beiden Ausdrücke für  $dT_2$  gleich, so hat man

$$\frac{\partial T_2}{\partial \theta} = -\frac{\partial T_1}{\partial \theta} \quad \text{und} \quad \frac{\partial T_1}{\partial u} = \theta'.$$

Es ergibt sich auf diese Weise eine reciproke Beziehung zwischen den Functionen  $T_1$  und  $T_2$ . Man findet  $T_2$  aus  $T_1$  durch Elimination von  $\theta'$ ,  $\varphi'$ , etc. mit Hülfe gewisser Gleichungen; man sieht jetzt, dass man  $T_1$  aus  $T_2$  durch Elimination von  $u$ ,  $v$ , etc. mittelst ähnlicher Gleichungen ableiten kann. Man nennt daher  $T_2$  die *reciproke Function* von  $T_1$  in Bezug auf die accentuirten Buchstaben  $\theta'$ ,  $\varphi'$ , etc.

und behandle  $p, q$  als unabhängige Variable. Man erhält so eine neue Differentialgleichung, die sich unter Umständen leichter auflösen lässt, als die frühere. Die Auflösung sei  $z_2 = f(p, q)$ ; alsdann lassen sich mittelst der Hilfsgleichungen  $x, y$  und  $z_2$  durch die beiden Hilfsgrössen  $p$  und  $q$  ausdrücken, welche ausserdem eine geometrische Bedeutung haben. Dieses Verfahren lässt sich auf jede Anzahl von Variablen und Ordnungen ausdehnen. Auch kann man, wie in § 418, die Gleichung für nur einen Theil der Variablen nach Belieben *modificiren*.

Beisp. Die Differentialgleichung sei  $xp^2 + yq^2 = z_1$ ; man zeige, dass  $z_2 = \frac{p}{1-p} F\left\{\frac{p(1-q)}{q(1-p)}\right\}$ , woraus sich  $x, y, z_1$  als Functionen der Hilfsgrössen durch Differentiation ermitteln lassen.



§ 411. Man beachte: Wenn  $T_1$  eine homogene quadratische Function der Buchstaben mit Strich  $\theta'$ ,  $\varphi'$ , etc. ist, so erhält man

$$u\theta' + v\varphi' + \text{etc.} = 2T_1$$

und mithin  $T_2 = T_1$ , aber in *verschiedenen Variablen ausgedrückt*. Denn  $T_1$  ist eine Function von  $\theta'$ ,  $\varphi'$ , etc. und nicht von  $u$ ,  $v$ , etc., während  $T_2$  eine Function von  $u$ ,  $v$ , etc. ist und nicht von  $\theta'$ ,  $\varphi'$ , etc. Man bemerke, dass in diesem Fall  $T_2$  eine homogene quadratische Function von  $u$ ,  $v$ , etc. ist

§ 412. Ist  $T_1$  die lebendige Kraft eines dynamischen Systems, so ist dieses Verfahren mit dem Uebergang vom Gebrauch der Componenten der Geschwindigkeit zum Gebrauch der entsprechenden Componenten der Momente gleichbedeutend. Beide Arten lassen sich benutzen, um die Bewegung des Systems zu bestimmen; manchmal bietet die eine mehr Vortheil, manchmal die andre.

§ 413. Beispiele zur reciproken Function. Beisp. 1. Die Lage eines Körpers von der Masse  $M$  im Raum ist durch die rechtwinkligen Coordinaten  $x$ ,  $y$ ,  $z$  seines Schwerpunktes gegeben und die Winkelcoordinaten  $\theta$ ,  $\varphi$ ,  $\psi$  seiner Hauptaxen für den Schwerpunkt, wie sie in Kap. V, § 256 benutzt wurden. Unter der Voraussetzung, dass zwei Hauptträgheitsmomente gleich und  $\xi$ ,  $\eta$ ,  $\zeta$ ,  $u$ ,  $v$ ,  $w$  die Componenten der Bewegungsgrösse sind, die bez.  $x$ ,  $y$ ,  $z$ ,  $\theta$ ,  $\varphi$ ,  $\psi$  entsprechen, ist die lebendige Kraft  $T_1$  in § 365, Beisp. 1 angegeben worden. Man zeige, dass die reciproke Function

$$2T_2 = \frac{\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2}{M} + \frac{u^2}{A} + \frac{v^2}{C} + \frac{(w - v \cos \theta)^2}{A \sin^2 \theta}$$

ist.

Beisp. 2. Ist die lebendige Kraft  $T_1$  durch den allgemeinen Ausdruck

$$2T_1 = A_{11}\theta'^2 + 2A_{12}\theta'\varphi' + \dots$$

gegeben, so lässt sich zeigen, dass man die reciproke Function von  $T_1$  in der Form

$$T_2 = -\frac{1}{2\Delta} \begin{vmatrix} 0 & u & v & \dots \\ u & A_{11} & A_{12} & \dots \\ v & A_{12} & A_{22} & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \end{vmatrix}$$

schreiben kann, worin  $\Delta$  die Discriminante von  $T_1$  bedeutet. Die Coefficienten von  $u^2$ ,  $v^2$ ,  $2uv$ , etc. in  $T_2$  sind daher die Unterdeterminanten der entsprechenden Glieder in  $T_1$  nach Division durch  $2\Delta$ . Siehe auch Kap. I, § 28, Beisp. 3.

Beisp. 3.  $\xi$ ,  $\eta$ , etc. seien die partiellen Differentialquotienten einer Function  $P$  von  $x$ ,  $y$ , etc. in Bezug auf diese Variablen; man beweise, dass  $x$ ,  $y$ , etc. auch die partiellen Differentialquotienten einer Function  $Q$  von  $\xi$ ,  $\eta$ , etc. in Bezug auf diese Variablen sind. Ist  $P$  homogen und von  $n$  Dimensionen, so lässt sich beweisen, dass  $Q = (n-1)P$  ist.  $P$  kann z. B. das Potential bei der Attraction oder das Geschwindigkeitspotential in der Hydrodynamik sein.

Beisp. 4. Man betrachte  $T_1$  als Function von  $\theta'$ ,  $\varphi'$ , etc. und  $\Delta$  sei die Hesse'sche Determinante von  $T_1$ , d. h. die Functionaldeterminante ihrer ersten Differentialquotienten nach  $\theta'$ ,  $\varphi'$ , etc. Alsdann sind  $\frac{\partial^2 T_2}{\partial u^2}$ ,  $\frac{\partial^2 T_2}{\partial u \partial v}$ , etc. den Mi-

noren der entsprechenden Elemente der Determinante  $\Delta$  gleich, wobei jede Unterdeterminante ihr richtiges Zeichen erhalten und durch  $\Delta$  dividirt werden muss.

Um dies zu beweisen, nehmen wir die totalen Differentiale der beiden Reihen von Gleichungen  $u = \frac{\partial T_1}{\partial \theta'}$ , etc.;  $\theta' = \frac{\partial T_2}{\partial u}$  etc.

Aus der ersten Reihe ergeben sich  $d\theta'$ ,  $d\varphi'$ , etc. als Functionen von  $du$ ,  $dv$ , etc.. Substituirt man in die zweite Reihe, so folgt das Theorem unmittelbar.

§ 414. Die Hamilton'sche Transformation. Man setze  $L = T + U$ , so dass  $L$  die Differenz zwischen der kinetischen und potentiellen Energie ist. Alsdann heisst  $L$ , wie in § 399 erklärt wurde, die *Lagrange'sche Function* und die Lagrange'schen Gleichungen kann man in der typischen Form

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \theta'} = \frac{\partial L}{\partial \theta}$$

mit entsprechenden Gleichungen für alle Coordinaten schreiben.

Ist  $H$  die reciproke Function von  $L$ , so heisst  $H$  die *Hamilton'sche Function*. Die Transformationsgleichungen sind

$$u = \frac{\partial L}{\partial \theta'} = \frac{\partial T}{\partial \theta'}$$

mit ähnlichen Gleichungen für alle Coordinaten. Nach dem Satz über die reciproke Function ist  $\theta' = \frac{\partial H}{\partial u}$  und nach der Lagrange'schen Gleichung  $u' = \frac{\partial L}{\partial \theta} = -\frac{\partial H}{\partial \theta}$  und ähnlich für alle Coordinaten. Auf diese Art wird die eine typische Lagrange'sche Gleichung in der obigen Form in die beiden Hamilton'schen

$$\theta' = \frac{\partial H}{\partial u}, \quad u' = -\frac{\partial H}{\partial \theta}$$

umgewandelt. Selbstverständlich gelten ähnliche Gleichungen für alle Coordinaten.

Wenn die geometrischen Gleichungen die Zeit nicht explicite enthalten, so ist  $T$  eine homogene, quadratische Function von  $(\theta', \varphi', \text{etc.})$  und daher  $u\theta' + v\varphi' + \text{etc.} = 2T$ . Daraus folgt

$$H = -L + u\theta' + v\varphi' + \text{etc.} = T - U.$$

Es ist daher  $H$  die Summe der kinetischen und potentiellen Energie und mithin die ganze Energie des Systems.

§ 415. Man drücke die Lagrange'schen Gleichungen für Stosskräfte in der Hamilton'schen Form aus.

Wie aus § 401 ersichtlich ist, lassen sich die Lagrange'schen Bewegungsgleichungen in der typischen Form

$$\left(\frac{\partial T}{\partial \theta'}\right)_0 = P$$

schreiben. Ist  $H$  die reciproke Function von  $T$  und ersetzt man  $u, v$ , etc. durch  $P, Q$ , etc., so erhalten sie die typische Gestalt

$$\theta_1' - \theta_0' = \frac{\partial H}{\partial P}.$$

§ 416. Beispiele zu den Hamilton'schen Gleichungen. Beisp. 1. Man leite die Gleichung der lebendigen Kraft aus den Hamilton'schen Gleichungen ab.

Da  $H$  eine Function von  $(\theta, \varphi, \text{etc.})$ ,  $(u, v, \text{etc.})$  ist, so erhält man, wenn Accente wieder die totalen Differentialquotienten nach der Zeit bedeuten,

$$H' = \frac{\partial H}{\partial t} + \frac{\partial H}{\partial \theta} \theta' + \frac{\partial H}{\partial u} u' + \text{etc.} = \frac{\partial H}{\partial t^2},$$

so dass also der totale Differentialquotient von  $H$  nach  $t$  immer dem partiellen gleich ist. Enthalten die geometrischen Gleichungen die Zeit nicht explicite, so verschwindet der letztere und man hat  $H = h$ , wenn  $h$  eine Constante bezeichnet.

Beisp. 2. Die Euler'schen Bewegungsgleichungen aus den Hamilton'schen Gleichungen abzuleiten.

Wählt man dieselbe Bezeichnung, wie in dem entsprechenden Satz für die Lagrange'schen Gleichungen § 406, so erhält man

$$u = \frac{\partial T}{\partial \theta'} = A \omega_1 \sin \varphi + B \omega_2 \cos \varphi, \quad v = \frac{\partial T}{\partial \varphi'} = C \omega_3,$$

$$w = \frac{\partial T}{\partial \psi'} = (-A \omega_1 \cos \varphi + B \omega_2 \sin \varphi) \sin \theta + C \omega_3 \cos \theta.$$

Ehe wir die Hamilton'schen Gleichungen benutzen können, muss nach § 411 die Grösse  $T$  durch  $(u, v, w)$  ausgedrückt werden. Zu dem Zweck lösen wir die vorstehenden Gleichungen auf, um  $\omega_1, \omega_2, \omega_3$  als Functionen von  $u, v, w$  zu erhalten. Es ergibt sich

$$A \omega_1 = u \sin \varphi + (v \cos \theta - w) \frac{\cos \varphi}{\sin \theta},$$

$$B \omega_2 = u \cos \varphi - (v \cos \theta - w) \frac{\sin \varphi}{\sin \theta}$$

und nach § 414

$$H = \frac{1}{2} (A \omega_1^2 + B \omega_2^2 + C \omega_3^2) - U.$$

Da wir nur eine Euler'sche Gleichung nöthig haben, so wollen wir  $\frac{\partial H}{\partial \varphi} = -v'$ ,  $\frac{\partial H}{\partial v} = \varphi'$  benutzen.

Die erstere ergibt  $A \omega_1 \frac{\partial \omega_1}{\partial \varphi} + B \omega_2 \frac{\partial \omega_2}{\partial \varphi} - \frac{\partial U}{\partial \varphi} = -C \frac{d\omega_3}{dt}$  und dies ist dasselbe, wie  $A \omega_1 \frac{B \omega_2}{A} - B \omega_2 \frac{A \omega_1}{B} - \frac{\partial U}{\partial \varphi} = -C \frac{d\omega_3}{dt}$ , woraus unmittelbar die dritte Euler'sche Gleichung, § 252, folgt. Die letztere der beiden Hamilton'schen Gleichungen führt zu einer der geometrischen Gleichungen des § 256. So sind die sechs Hamilton'schen Gleichungen den drei dynamischen und den drei geometrischen Euler'schen äquivalent.

Beisp. 3. Eine Kugel rollt eine raue schiefe Ebene hinab, wie in § 144 beschrieben wurde. Es ist  $T = \frac{7}{10} m a^2 \theta'^2$  und  $U = m g a \theta \sin \alpha$ . Ist es richtig,  $H$  der Differenz dieser Functionen gleich zu setzen? Man mache die Probe auf die Antwort, indem man die in § 144 gegebenen Bewegungsgleichungen ableitet.

Beisp. 4. Ein System wird auf die Hamilton'sche Art auf Coordinaten  $\theta, \varphi$ , etc. und die entsprechenden Bewegungsgrößen  $u, v$ , etc. bezogen; man wünscht die Coordinaten mit  $x, y$ , etc. zu vertauschen, wobei  $\theta, \varphi$ , etc. gegebene Functionen von  $x, y$ , etc. sind. Wenn man unter  $\xi, \eta$ , etc. die entsprechenden Bewegungsgrößen versteht, zu zeigen, dass

$$\xi = u\theta_x + v\varphi_x + \dots, \quad \eta = u\theta_y + v\varphi_y + \dots, \quad \text{etc.} = \text{etc. ist,}$$

worin die Indices, wie gewöhnlich, partielle Differentiationen bezeichnen. Man zeige ferner durch eine rein analytische Transformation, dass sich die Hamilton'schen Gleichungen mit  $\theta, u$ , etc. in die entsprechenden mit  $x, \xi$ , etc. verwandeln.

Beisp. 5. Die Lagrange'sche Function ist eine Function von  $\theta, \varphi$ , etc. und  $\theta', \varphi'$ , etc. Im Vorstehenden haben wir die reciproke Function mit Bezug auf  $\theta', \varphi'$ , etc. genommen; wir hätten sie aber auch bez.  $\theta, \varphi$ , etc. nehmen können. Das folgende Beispiel wird dies erläutern.

Es sei  $T_1$  oder  $L$  die Lagrange'sche Function und, um der bisherigen Bezeichnungsweise möglichst nahe zu kommen, sei  $U = \frac{\partial T_1}{\partial \theta}$ ,  $V = \frac{\partial T_1}{\partial \varphi}$ , etc. Ist dann  $T_2$  die reciproke Function von  $T_1$ , so führt die der Hamilton'schen entsprechende Transformation zu den typischen Gleichungen

$$\theta = \frac{\partial T_2}{\partial U}, \quad U = -\frac{d}{dt} \frac{\partial T_2}{\partial \theta'}.$$

Um sich davon zu überzeugen, reicht es hin, wenn man beachtet, dass  $T_2 = -T_1 + U\theta + V\varphi + \dots$  ist. Nach dem Lemma in § 410 hat man dann  $\frac{\partial T_2}{\partial \theta'} = -\frac{\partial T_1}{\partial \theta'}$  und  $\frac{\partial T_2}{\partial U} = \theta$ , woraus sich die Resultate mittelst der Lagrange'schen Gleichungen unmittelbar ergeben.

§ 417. Die Analogie mit reciproken Beziehungen der Geometrie. Die Hamilton'sche Umformung der Lagrange'schen Gleichungen hat eine bemerkenswerthe Analogie mit der Aufgabe der Geometrie, zu einer Fläche ihre reciproke zu suchen. Man nehme z. B. an, das System habe drei Coordinaten  $\theta, \varphi, \psi$  und die lebendige Kraft  $T_1$  sei eine homogene quadratische Function der Geschwindigkeiten  $\theta', \varphi', \psi'$ . Man kann  $\theta', \varphi', \psi'$  als Cartesische Coordinaten eines darstellenden Punktes  $P$  betrachten, dessen Lage und Bahn dem Auge die momentane Bewegung des Systems vorführt. Diese Coordinaten von  $P$  lassen sich aus den Lagrange'schen Gleichungen ermitteln. Auf gleiche Weise kann man die Hamilton'schen Variablen  $u, v, w$  als Cartesische Coordinaten eines andern Punktes  $Q$  betrachten, dessen Lage und Bahn die augenblickliche Bewegung des Systems ebenfalls darstellt.

Nimmt man irgend welche momentanen Werthe  $\theta', \varphi', \psi'$ , so liegt der Punkt  $P$  irgendwo auf der Fläche zweiten Grades  $T_1 = U$ , wenn  $U$  der augenblickliche Werth der Kräftefunction ist. Weil nun  $u = \frac{\partial T_1}{\partial \theta'}$ ,  $v = \frac{\partial T_1}{\partial \varphi'}$ ,  $w = \frac{\partial T_1}{\partial \psi'}$  ist, so muss offenbar auch  $Q$  auf einer Fläche zweiten Grades liegen, die polar reciprok zur Fläche  $T_1$  in Bezug auf eine Kugel ist, deren Centrum im Coordinatenanfang liegt und deren Radius  $\sqrt{2U}$  ist.

Diese reciproke Fläche zweiten Grades sei  $T_2 = U$ . Da nun diese beiden Flächen reciproke Eigenschaften besitzen, so ist offenbar

$$\theta' = \frac{\partial T_2}{\partial u}, \quad \varphi' = \frac{\partial T_2}{\partial v}, \quad \psi' = \frac{\partial T_2}{\partial w}.$$

Beisp. 1. Die Coefficienten der beiden Flächen zweiten Grades  $T_1$  und  $T_2$  seien Functionen einer Grösse  $\theta$ ; man zeige *geometrisch*, dass  $\frac{\partial T_1}{\partial \theta} = -\frac{\partial T_2}{\partial \theta}$  ist.

Daraus leite man die übrigen drei Hamilton'schen Gleichungen ab, nämlich  $-u' = \frac{\partial H}{\partial \theta}$ ,  $-v' = \frac{\partial H}{\partial \varphi}$ ,  $-w' = \frac{\partial H}{\partial \psi}$ , worin  $H = T_2 - U$  ist. Siehe des Verfassers Schrift über „*Stability of motion*“ S. 62.

Beisp. 2. Man zeige, dass die in der Geometrie gebräuchliche Form von  $T_2$  dieselbe ist wie in § 413, Beisp. 2.

§ 418. Die modificirte Lagrange'sche Function. Sir W. Hamilton transformirt alle accentuirten Buchstaben  $\theta'$ ,  $\varphi'$ , etc. in die entsprechenden Buchstaben  $u$ ,  $v$ , etc. Man kann das Lemma aber auch so anwenden, dass man nur einen Theil der Lagrange'schen Coordinaten mit den entsprechenden Hamilton'schen vertauscht und die andern ungeändert lässt. Man erhält so eine Mischung der beiden Arten von Gleichungen. Mittelst einer und derselben Function kann man die Lagrange'schen Gleichungen für diejenigen Coordinaten gebrauchen, für welche sie sich am meisten eignen und die Hamilton'schen für die übrigen Coordinaten, wenn wir diese für angemessener halten.

Das Wesentliche der Theorie, wie sie in den §§ 418—425 dargestellt wird, ist des Verfassers *Stability of Motion*, 1876, entnommen.

§ 419. Um dies besser einzusehen, betrachte man ein System, welches von vier Coordinaten  $\theta$ ,  $\varphi$ ,  $\xi$ ,  $\eta$  abhängt.  $L_1$  sei die Lagrange'sche Function. Man nehme nun an, man wolle die Lagrange'schen Gleichungen für die Coordinaten  $\xi$ ,  $\eta$  und die Hamilton'schen für  $\theta$ ,  $\varphi$  gebrauchen. Zu diesem Zweck benutzen wir die beiden Transformationsformeln  $\frac{\partial L_1}{\partial \theta} = u$ ,  $\frac{\partial L_1}{\partial \varphi} = v$  und setzen

$$L_2 = -L_1 + u\theta' + v\varphi'.$$

Man erhält wie in § 414 die beiden Reihen von Hamilton'schen Gleichungen

$$\theta' = \frac{\partial L_2}{\partial u}, \quad u' = -\frac{\partial L_2}{\partial \theta},$$

$$\varphi' = \frac{\partial L_2}{\partial v}, \quad v' = -\frac{\partial L_2}{\partial \varphi}.$$

$\xi'$  und  $\eta'$  sind alsdann unter die nicht accentuirten Buchstaben, von denen in dem Lemma, § 410, die Rede war, einzuschliessen, woraus sich ergibt

$$\frac{\partial L_2}{\partial \xi'} = -\frac{\partial L_1}{\partial \xi}, \quad \frac{\partial L_2}{\partial \eta'} = -\frac{\partial L_1}{\partial \eta}$$

mit zwei ähnlichen Gleichungen für  $\eta$ . Auf diese Art bleiben die beiden Lagrange'schen Gleichungen für  $\xi$  und  $\eta$  auch gültig, wenn man  $L_1$  durch  $L_2$  ersetzt. Man erhält so die beiden Reihen von Lagrange'schen Gleichungen

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L_2}{\partial \xi'} = \frac{\partial L_2}{\partial \xi}, \quad \frac{d}{dt} \frac{\partial L_2}{\partial \eta'} = \frac{\partial L_2}{\partial \eta}.$$

§ 420. Die Function  $L_2$  könnte man die *modificirte Function* nennen, es ist aber passender, diesen Namen der Function mit dem andern Vorzeichen zu geben. Die Definition lässt sich so fassen:

Ist die Lagrange'sche Function  $L$  eine Function von  $\theta, \theta', \varphi, \varphi'$ , etc., so ist die modificirte Function z. B. für die beiden Coordinaten  $\theta, \varphi$

$$L' = L - u\theta' - v\varphi',$$

worin  $u = \frac{\partial L}{\partial \theta'}$ ,  $v = \frac{\partial L}{\partial \varphi'}$  und angenommen ist, dass man  $\theta', \varphi'$  aus der Function  $L'$  eliminirt hat. Auf diese Art ist  $L$  eine Function von  $\theta, \varphi, \theta', \varphi'$  und allen andern Buchstaben,  $L'$  eine Function von  $\theta, \varphi, u, v$  und den übrigen Buchstaben.

Diese beiden Functionen  $L, L'$  besitzen nach § 410 die Eigenschaft, dass ihre partiellen Differentialquotienten nach allen Buchstaben mit Ausnahme von  $\theta', \varphi', u, v$  dieselben sind. In Bezug auf diese vier ist

$$\frac{\partial L}{\partial \theta'} = u, \quad \frac{\partial L}{\partial \varphi'} = v \quad \text{und} \quad \frac{\partial L'}{\partial u} = -\theta', \quad \frac{\partial L'}{\partial v} = -\varphi'.$$

Man kann die dynamischen Gleichungen für die Coordinaten, bezüglich welcher die Function nach der Hamilton'schen Regel modificirt wurde, so bilden, als ob  $L_2 = -L'$  die Hamilton'sche Function wäre, und für die übrigen Coordinaten nach der Lagrange'schen Regel, als ob entweder  $L_2$  oder  $L'$  die Lagrange'sche Function wäre.

Die Function  $L_2$  kann man auch die reciproke Function der Lagrange'schen  $L_1$  in Bezug auf die Coordinaten  $\theta, \varphi$ , etc. nennen, weil sie ebenso aus  $L_1$  abgeleitet wird, wie  $T_2$  aus  $T_1$  in § 410 mit der Ausnahme, dass man nur an gewissen Coordinaten die Operation vornimmt. Es ist jedoch angemessener, die beiden Operationen durch verschiedene Worte zu unterscheiden. Wir werden unter *Reciprocation* die Vertauschung *aller* und unter *Modification* die Vertauschung nur eines Theils der Coordinaten verstehen.

§ 421. Nachdem die nöthigen Eliminationen ausgeführt worden sind, einen allgemeinen Ausdruck für die modificirte Lagrange'sche Function zu finden.

Die lebendige Kraft  $T$  sei durch den homogenen quadratischen Ausdruck

$$T = T_{\theta\theta} \frac{\theta'^2}{2} + T_{\theta\varphi} \theta' \varphi' + \dots + T_{\xi\xi} \frac{\xi'^2}{2} + T_{\theta\xi} \theta' \xi' + \dots$$

gegeben, so dass die Lagrange'sche Function  $L = T + U$  ist, worin  $U$  eine Function der Coordinaten  $\theta, \varphi, \xi$ , etc. bedeutet. Wir wollen  $L$  in Bezug auf  $\theta, \varphi$ , etc. modificiren, während mit  $\xi, \eta$ , etc. nach der Lagrange'schen Regel verfahren werden soll. Wir haben daher nach § 420 mit Hülfe der Gleichungen

$$\left. \begin{aligned} T_{\theta\theta} \theta' + T_{\theta\varphi} \varphi' + \dots &= u - T_{\theta\xi} \xi' - T_{\theta\eta} \eta' - \dots \\ T_{\theta\varphi} \theta' + T_{\varphi\varphi} \varphi' + \dots &= v - T_{\varphi\xi} \xi' - T_{\varphi\eta} \eta' - \dots \\ \text{etc.} &= \text{etc.} \end{aligned} \right\} \dots \quad (1)$$

$\theta'$  und  $\varphi'$  zu eliminiren.

Der Kürze halber wollen wir statt der rechten Seiten dieser Gleichungen  $u - X$ ,  $v - Y$ , etc. schreiben. Da  $T$  eine homogene Function ist, so hat man

$$T = T_{\xi\xi} \frac{\xi'^2}{2} + T_{\xi\eta} \xi' \eta' + \dots \dots \dots \left. \begin{aligned} & \dots + \frac{1}{2} \theta' (u + X) + \frac{1}{2} \varphi' (v + Y) + \text{etc.} \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (2).$$

Nach der Definition ist aber die modificirte Function  $L' = -L_2$

$$L' = L - u\theta' - v\varphi' - \dots = T_{\xi\xi} \frac{\xi'^2}{2} + T_{\xi\eta} \xi' \eta' + \dots + U \left. \begin{aligned} & - \frac{1}{2} \theta' (u - X) - \frac{1}{2} \varphi' (v - Y) - \text{etc.} \end{aligned} \right\} \dots \dots (3).$$

Löst man die Gleichungen (1) auf, so erhält man mit Hülfe von Determinanten  $\theta'$ ,  $\varphi'$ , etc. als Functionen von  $\xi'$ ,  $\eta'$ , etc. Substituirt man ihre Werthe in den Ausdruck (3), so ergibt sich

$$L' = T_{\xi\xi} \frac{\xi'^2}{2} + T_{\xi\eta} \xi' \eta' + \text{etc.} + U + \frac{1}{2\Delta} \begin{vmatrix} 0, & u - X, & v - Y, & \dots \\ u - X, & T_{\theta\theta}, & T_{\theta\varphi}, & \dots \\ v - Y, & T_{\varphi\theta}, & T_{\varphi\varphi}, & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \end{vmatrix},$$

worin  $\Delta$  die Determinante der Glieder in  $T$  ist, welche nur  $\theta'$ ,  $\varphi'$ , etc. enthalten. Man kann es auch aus der vorstehenden Determinante ableiten, wenn man die erste Vertical- und Horizontalreihe weglässt.

Die Determinante lässt sich zerlegen und die modificirte Function in der Form schreiben

$$L' = T_{\xi\xi} \frac{\xi'^2}{2} + T_{\xi\eta} \xi' \eta' + \text{etc.} + U + \frac{1}{2\Delta} \begin{vmatrix} 0, & u, & v, & \dots \\ u, & T_{\theta\theta}, & T_{\theta\varphi}, & \dots \\ v, & T_{\varphi\theta}, & T_{\varphi\varphi}, & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \end{vmatrix} + \frac{1}{2\Delta} \begin{vmatrix} 0, & X, & Y, & \dots \\ X, & T_{\theta\theta}, & T_{\theta\varphi}, & \dots \\ Y, & T_{\varphi\theta}, & T_{\varphi\varphi}, & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \end{vmatrix} - \frac{1}{\Delta} \begin{vmatrix} 0, & X, & Y, & \dots \\ u, & T_{\theta\theta}, & T_{\theta\varphi}, & \dots \\ v, & T_{\varphi\theta}, & T_{\varphi\varphi}, & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \end{vmatrix},$$

worin  $u$ ,  $v$ , etc. wie gewöhnlich für  $\frac{\partial T}{\partial \theta'}$ ,  $\frac{\partial T}{\partial \varphi'}$ , etc. stehen und  $X$ ,  $Y$ , etc. durch

$$X = T_{\theta\xi} \xi' + T_{\theta\eta} \eta' + \dots, \quad Y = T_{\varphi\xi} \xi' + T_{\varphi\eta} \eta' + \dots, \quad \text{etc.} = \text{etc.}$$

gegeben sind, so dass man  $X$ ,  $Y$ , etc. aus  $u$ ,  $v$ , etc. erhält, indem man die Glieder weglässt, welche  $\theta'$ ,  $\varphi'$ , etc., d. h. die Coordinaten, auf die man die Hamilton'schen Gleichungen anwenden will, enthalten.

Man beachte, dass die erste der drei Determinanten in dem Ausdruck für  $L'$  nur die Momente  $u$ ,  $v$ , etc. und die Coordinaten enthält. In der zweiten kommen  $u$ ,  $v$ , etc. nicht vor, degegen ist sie eine quadratische Function von  $\xi'$ ,  $\eta'$ , etc. Die dritte enthält Glieder vom ersten Grad in Bezug auf  $\xi'$ ,  $\eta'$ , etc. multiplicirt mit den Momenten  $u$ ,  $v$ , etc.

§ 422. **Der Fall fehlender Coordinaten.** In vielen Fällen von kleinen Schwingungen um einen Zustand stationärer Bewegung und in einigen andern Problemen enthält die Lagrange'sche Function  $L$  einige der Coordinaten wie  $\theta$ ,  $\varphi$ , etc. nicht, obgleich sie eine Function ihrer Differentialquotienten  $\theta'$ ,  $\varphi'$ , etc. ist; zu gleicher Zeit kann sie die übrigen Coordinaten  $\xi$ ,  $\eta$ , etc. sowohl als ihre Differentialquotienten  $\xi'$ ,  $\eta'$ , etc. enthalten. Ist dies der Fall, so werden die Lagrange'schen Gleichungen für  $\theta$ ,  $\varphi$ , etc.  $\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \theta'} = 0$ , etc. Durch Integration erhält man

$$\frac{\partial L}{\partial \theta'} = u, \quad \frac{\partial L}{\partial \varphi'} = v, \text{ etc.},$$

worin  $u$ ,  $v$ , etc. absolute Constante sind, deren Werthe sich aus den Anfangsbedingungen ergeben. Mit Hülfe dieser Gleichungen lässt sich  $\theta'$ ,  $\varphi'$ , etc. durch  $\xi'$ ,  $\eta'$ , etc. ausdrücken, so dass das Problem sich in der That darauf reducirt,  $\xi$ ,  $\eta$ , etc. zu ermitteln.

Prof. J. J. Thomson (*Phil. Trans.* 1885 und *Applications of dynamics to physics and chemistry*, 1888) hat vorgeschlagen, solche Coordinaten, von denen nur die Differentialquotienten in der Lagrange'schen Function auftreten, *kinosthenische* oder *Geschwindigkeitscoordinaten* zu nennen.

Das Verfahren, welches dazu dient, die übrigen Coordinaten  $\xi$ ,  $\eta$ , etc. zu ermitteln, lässt sich jetzt vereinfachen, indem man die Lagrange'sche Function so modificirt, dass die Variablen  $\theta'$ ,  $\varphi'$ , etc. eliminirt und an ihrer Stelle die constanten Grössen  $u$ ,  $v$ , etc. eingeführt werden. Man setze

$$L' = L - u\theta' - v\varphi' \dots$$

und eliminire  $\theta'$ ,  $\varphi'$ , etc. mit Hülfe der eben gefundenen Integrale. Die Gleichungen zur Ermittlung von  $\xi$ ,  $\eta$ , etc. ergeben sich, wenn man  $\pm L'$  als Lagrange'sche Function behandelt.

§ 423. Wenn das System vom Zustand der Ruhe ausgeht, nimmt die modificirte Function eine einfache Gestalt an. Die Lagrange'sche Function  $L$  sei z. B. eine homogene quadratische Function von  $\theta'$ ,  $\varphi'$ , etc. Man erhält dann mit Beziehung auf die obigen ersten Integrale, wenn man berücksichtigt, dass die Anfangswerthe von  $\theta'$ ,  $\varphi'$ , etc. sämmtlich Null sind,

$$u = 0, \quad v = 0, \quad \text{etc.} = 0.$$

Die modificirte Function  $L'$  ist daher der ursprünglichen Function gleich, aber verschieden ausgedrückt. Die Function  $L$  ist eine Function von  $\theta'$ ,  $\varphi'$ , etc.; die Function  $L'$  ist der Werth von  $L$ , nach dem die Differentialquotienten  $\theta'$ ,  $\varphi'$ , etc. mit Hülfe der ersten Integrale eliminirt worden sind.

Das Resultat der Elimination kann man aus § 421 ableiten. Die erste und dritte Determinante sind hier Null. Man hat daher

$$L' = T_{\xi\xi} \frac{\xi'^2}{2} + T_{\xi\eta} \xi' \eta' + \text{etc.} + U + \frac{1}{2\mathcal{A}} \begin{vmatrix} 0, & X, & Y, & \dots \\ X, & T_{\theta\theta}, & T_{\theta\varphi}, & \dots \\ Y, & T_{\theta\varphi}, & T_{\varphi\varphi}, & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \end{vmatrix}.$$



Man kann diesen Ausdruck aus der Lagrange'schen Function  $L$  einfach dadurch ableiten, dass man alle Glieder, welche die zu eliminirenden Differentialquotienten  $\theta'$ ,  $\varphi'$ , etc. enthalten, weglässt und die obige Determinante hinzufügt.

§ 424. Das Sonnensystem als Beispiel. Es mögen sich, um ein Beispiel zu geben, drei Punkte von den Massen  $m_1, m_2, m_3$  gegenseitig nach dem Newton'schen Gesetz anziehen und sich auf beliebige Art in einer Ebene bewegen. Bezieht man sie auf irgend welche rechtwinklige Axen, so sind ihre lebendige Kraft und Kräftefunctionen der sechs Cartesischen Coordinaten und ihrer Differentialquotienten. Wir können aber den Coordinatenanfang verrücken und die Axen um ihn drehen, ohne die lebendige Kraft oder die Kräftefunction zu ändern. Daraus folgt, dass jede dieser Functionen von drei der Coordinaten unabhängig ist, obwohl sie von ihren Differentialquotienten nach der Zeit abhängen kann. Die Lagrange'sche Function lässt sich daher *modificiren* und nur von den drei andern Coordinaten abhängig machen.

Die lebendige Kraft des Systems ist der lebendigen Kraft der ganzen im Schwerpunkt vereinigten Masse gleich, zusammen mit der lebendigen Kraft in Bezug auf den Schwerpunkt. Die erstere ist leicht anzugeben und in unsrem Fall eine Constante; wir wollen uns zur letzteren wenden.

Es sei  $G$  der Schwerpunkt; man ziehe  $G\alpha, G\beta, G\gamma$ , die nach Richtung und Grösse die Geschwindigkeiten der drei Massenpunkte darstellen, d. h. die Radienvectoren ihrer Hodographen sind. Dann repräsentiren die Seiten des Dreiecks  $\alpha\beta\gamma$  die relativen Geschwindigkeiten der Massenpunkte und die lebendige Kraft des Systems ist  $m_1 G\alpha^2 + m_2 G\beta^2 + m_3 G\gamma^2$ . Daraus, dass die Componente der Bewegungsgrösse des Systems in Bezug auf seinen Schwerpunkt in jeder Richtung Null ist, folgt, dass  $G$  der Schwerpunkt dreier nach  $\alpha, \beta, \gamma$  gebrachter Massenpunkte  $m_1, m_2, m_3$  ist. Nach einer bekannten Eigenschaft des Schwerpunktes hat man

$$m_1 m_2 (\alpha\beta)^2 + \dots = \mu \{ m_1 (G\alpha)^2 + \dots \},$$

worin  $\mu$  die Summe der Massen bezeichnet. Daraus folgt unmittelbar, dass die

lebendige Kraft eines Systems in Bezug auf seinen Schwerpunkt  $= \frac{\sum m_1 m_2 v_{12}^2}{\sum m}$  ist,

wo  $v_{12}$  die relative Geschwindigkeit der Massenpunkte  $m_1, m_2$  bezeichnet. Diese Formel für die relative lebendige Kraft gilt offenbar für jede Anzahl von Massenpunkten. Sir R. Ball hat sie in den *Astronomical Notices*, März 1877, auf eine andre Art abgeleitet.

Es seien  $a, b, c, A, B, C$ , wie gewöhnlich, die Seiten und Winkel des Dreiecks, welches durch Verbindung der Massenpunkte entsteht. Es sei  $\theta$  der Winkel, den die Seite  $c$  mit irgend einer im Raum festliegenden Geraden bildet; Accente mögen, wie bisher, die Differentialquotienten nach der Zeit bezeichnen. Man hat dann

$$\begin{aligned} \sum m_1 m_2 v_{12}^2 &= m_1 m_2 \{ c'^2 + c^2 \theta'^2 \} + m_1 m_3 \{ b'^2 + b^2 (\theta' + A')^2 \} + \\ &+ m_2 m_3 \{ a'^2 + a^2 (\theta' - B')^2 \} \end{aligned}$$

und, wenn  $T$  die lebendige Kraft in Bezug auf den Schwerpunkt bezeichnet,

$$2T = P\theta'^2 + 2Q\theta' + R,$$

worin  $P, Q, R$  Functionen des Dreiecks allein und nicht von  $\theta$  sind. Man hat

$$\mu P = m_1 m_2 c^2 + m_1 m_3 b^2 + m_2 m_3 a^2,$$

$$\mu Q = m_3 (m_1 b^2 A' - m_2 a^2 B'),$$

$$\mu R = m_1 m_2 c'^2 + m_1 m_3 (b'^2 + b^2 A'^2) + m_2 m_3 (a'^2 + a^2 B'^2).$$

Wie diese Functionen auszudrücken sind, hängt von den Coordinaten ab, die man gebrauchen will. Man kann beliebige drei Stücke des Dreiecks mit Ausnahme aller drei Winkel zu Coordinaten wählen.

Beisp. Unter der Annahme, es sei am vortheilhaftesten, die Abstände  $b$  und  $c$  zweier Massenpunkte von dem dritten und den Winkel  $A$ , den die Abstände an dem dritten Punkt bilden, zu Dreieckscoordinaten zu wählen, zeige man, dass  $P, Q, R$  sich durch  $b, c, a$  und ihre Differentialquotienten allein mit Hülfe der Gleichungen

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A,$$

$$\frac{d}{dt}(bc \sin A) = b^2 A' + a^2 B' + 2b'c' \sin A,$$

$$a'^2 + a^2 B'^2 = b'^2 + c'^2 - 2b'c' \cos A + b^2 A'^2 + 2b A' c' \sin A$$

ausdrücken lassen. Sie lassen leichte geometrische Auslegungen zu.

§ 425. Man kann die Lagrange'sche Function auch mit Bezug auf  $\theta$  modificiren. Zu dem Zweck setze man  $u = \frac{\partial T}{\partial \theta'} = P\theta' + Q$ . Man beachte, dass  $u$  nach § 422 eine absolute Constante ist, weil die Kräftefunction  $U$  keine Function von  $\theta$  ist. Wir bilden nun die modificirte Function

$$L' = L - u\theta' = \frac{PR - Q^2 + 2uQ - u^2}{2P} + U,$$

welche man benutzen kann, als wäre sie die Lagrange'sche Function, um alle Aenderungen des die drei Massenpunkte verbindenden Dreiecks zu ermitteln.

Zu beachten ist auch, dass die Winkelgeschwindigkeit  $\theta'$  im Raum der Seite des Dreiecks, welche  $m_1$  und  $m_2$  verbindet, durch die Gleichung  $P\theta' + Q = u$  gegeben ist, worin  $u$  eine Constante bedeutet.

Beisp. 1. Man zeige, dass  $P$  dem Trägheitsmoment der drei Massenpunkte für den Schwerpunkt gleich ist.

Beisp. 2. Zeige, dass man  $\mu^2(PR - Q^2)$  in die symmetrische Form

$$\{m_1 m_2 c^2 + m_2 m_3 b^2 + m_3 m_1 a^2\} \{m_1 m_2 c'^2 + m_2 m_3 b'^2 + m_3 m_1 a'^2\} + \\ m_1 m_2 m_3 \{m_1 (bcA')^2 + m_2 (caB')^2 + m_3 (abC')^2\}$$

bringen kann.

Beisp. 3. Zeige, dass die Grösse  $u$  der Winkelbewegungsgrösse des Systems um den Schwerpunkt gleich ist. Siehe §§ 397 und 402.

Beisp. 4. Zeige, dass man  $\mu Q$  jede der beiden Formen

$$m_1(m_2 c^2 B' - m_3 b^2 C') \quad \text{und} \quad m_3(m_2 a^2 C' - m_1 c^2 A')$$

geben kann, wobei die Wirkung des Umtausches darin besteht, dass man zu der Lagrange'schen Function  $L'$  eine Grösse, die  $B'$  bez.  $C'$  gleichkommt, addiren muss. Siehe § 399, Beisp. 2.

§ 426. Nicht conservative Kräfte. Man erkläre, wie die Lagrange'schen Gleichungen gebraucht werden, wenn ein Theil der Kräfte nicht conservativ ist.

Die Lagrange'schen Gleichungen können in der in § 399 gegebenen Form nur dann benutzt werden, wenn die Kräfte, welche an dem System angreifen, eine Kräftefunction besitzen. Wenn jedoch  $P\delta\theta$  die virtuelle Arbeit der gegebenen Kräfte ist, welche man durch alleinige Variation von  $\theta$  erhält,  $Q\delta\varphi$  die durch alleinige Variation von  $\varphi$  erhaltene u. s. w., so kann man offenbar nach § 397 den Lagrange'schen Gleichungen die typische Form geben  $\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \theta'} - \frac{\partial T}{\partial \theta} = P$ .

§ 427. Es ist oft von Vortheil, die Kräfte, welche an dem System angreifen, in zwei Gruppen zu trennen. *Zuerst* kommen diejenigen, welche conservativ sind. Die Theile von  $P$ ,  $Q$ , etc., welche durch diese Kräfte hervorgerufen werden, lassen sich durch Differentiation der Kräftefunction nach  $\theta$ ,  $\varphi$ , etc. ermitteln. *Zweitens* diejenigen, welche nicht conservativ sind, wie die Reibung, einige Arten von Widerständen etc. Die durch sie erzeugten Theile von  $P$ ,  $Q$ , etc. müssen auf die aus der Statik bekannte gewöhnliche Art mittelst der virtuellen Arbeit gefunden werden.

Ogleich die nicht conservativen Kräfte eine Kräftefunction nicht zulassen, so lassen sich ihre virtuellen Arbeiten doch zuweilen durch einen Differentialquotienten andrer Art darstellen. Man nehme z. B. an, ein Theil der an dem Massenpunkt eines Körpers angreifenden Kräfte sei derart, dass ihre Componenten parallel zu drei rechtwinkligen im Raum festliegenden Axen den Geschwindigkeiten des Massenpunktes in diesen Richtungen proportional sind. Die virtuelle Arbeit dieser Kräfte ist

$$\Sigma(\mu_1 x' \delta x + \mu_2 y' \delta y + \mu_3 z' \delta z),$$

worin  $\mu_1$ ,  $\mu_2$ ,  $\mu_3$  drei Constante bedeuten, die negativ werden, wenn die Kräfte Widerstände sind. Bewegen sich z. B. die Massenpunkte in einem Mittel, dessen Widerstand der Geschwindigkeit, mit einer Constanten  $\kappa$  multiplicirt, gleichkommt, so ist jede der Grössen  $\mu_1$ ,  $\mu_2$ ,  $\mu_3$  gleich  $-\kappa$ . Man setze

$$-F = \frac{1}{2} \Sigma(\mu_1 x'^2 + \mu_2 y'^2 + \mu_3 z'^2).$$

Da  $(x, y, z)$  Functionen von  $\theta$ ,  $\varphi$ , etc. sind, welche sich aus den geometrischen Bedingungen des Systems ergeben, so ist, wie in § 396,

$$x' = \frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial x}{\partial \theta} \theta' + \dots$$

mit ähnlichen Ausdrücken für die übrigen Coordinaten. Substituirt man, so erhält man  $F$  als Function von  $\theta$ ,  $\varphi$ , etc.,  $\theta'$ ,  $\varphi'$ , etc. Man sieht auch, dass, wie in § 397,  $\frac{\partial x'}{\partial \theta'} = \frac{\partial x}{\partial \theta}$  ist. Durch partielle Differentiation von  $F$  hat man

$$-\frac{\partial F}{\partial \theta'} = \Sigma(\mu_1 x' \frac{\partial x'}{\partial \theta'} + \text{etc.}) = \Sigma(\mu_1 x' \frac{\partial x}{\partial \theta} + \text{etc.})$$

und deshalb

$$-\frac{\partial F}{\partial \theta'} \delta \theta - \frac{\partial F}{\partial \varphi'} \delta \varphi - \text{etc.} = \Sigma \left\{ \mu_1 x' \left( \frac{\partial x}{\partial \theta} \delta \theta + \frac{\partial x}{\partial \varphi} \delta \varphi + \dots \right) + \text{etc.} \right\} = \Sigma(\mu_1 x' \delta x + \text{etc.}).$$

In diesem Fall daher, wenn  $U$  die Kräftefunction der conservativen Kräfte ist,  $F$  die eben definirte Function,  $\Theta \delta \theta$ ,  $\Phi \delta \varphi$ , etc. die virtuellen Arbeiten der übrigen Kräfte, lassen sich die Lagrange'schen Gleichungen schreiben

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \theta'} - \frac{\partial T}{\partial \theta} = \frac{\partial U}{\partial \theta} - \frac{\partial F}{\partial \theta'} + \Theta,$$

und ähnliche Gleichungen für  $\varphi$ ,  $\psi$ , etc. aufstellen.

Man beachte, dass die Function  $F$ , wenn die geometrischen Gleichungen die Zeit nicht explicite enthalten, eine quadratische homogene Function von  $\theta'$ ,  $\varphi'$ , etc. ist.

Wenn die Kräfte, deren Wirkungen in  $F$  auftreten, *Widerstände* sind, so werden  $\mu_1$ ,  $\mu_2$ ,  $\mu_3$ , etc. negativ. Alsdann ist  $F$  eine ihrem Wesen nach positive Function der Geschwindigkeiten und gleicht in dieser Hinsicht der Function  $T$ , welche die lebendige Kraft darstellt.

Behandelt man die obigen Gleichungen genau so, wie die Lagrange'schen

Gleichungen in § 407, behandelt wurden, um das Princip der lebendigen Kraft zu finden, so ergibt sich

$$\frac{d}{dt}(T - U) = \theta' \Theta + \text{etc.} - \frac{\partial F}{\partial \theta'} \theta' - \text{etc.};$$

in diesem Fall ist aber auch  $F$  eine homogene Function von  $\theta'$ , etc. Daher

$$\frac{d}{dt}(T - U) = \theta' \Theta + \text{etc.} - 2F.$$

Daraus folgt, dass, wenn die geometrischen Gleichungen die Zeit nicht explicite enthalten und wenn keine Kräfte vorhanden sind ausser solchen, die sich in die Kräftefunction  $U$  und die Function  $F$  einschliessen lassen,  $F$  die halbe Geschwindigkeit darstellt, mit welcher die Energie das System verlässt, d. h. verausgabt wird.

Den Gebrauch dieser Function hat Lord Rayleigh in den *Proceedings of the London Mathematical Society*, Juni 1873, vorgeschlagen. Er hat die Function  $F$  die *Dissipationsfunction* genannt.

§ 428. Beisp. 1. Irgend zwei Massenpunkte eines dynamischen Systems wirken gegenseitig mit einer Kraft aufeinander ein, deren Componenten in drei festen rechtwinkligen Richtungen den bezüglichlichen Geschwindigkeiten der Massenpunkte in diesen Richtungen parallel sind; man zeige, dass man diese Componenten in die Dissipationsfunction  $F$  einschliessen kann. Sind  $V_x, V_y, V_z$  die Componenten der Geschwindigkeit,  $\mu_1 V_x, \mu_2 V_y, \mu_3 V_z$  die Componenten der Abstossungskraft, so ist der Theil von  $F$ , der aus ihnen hervorgeht, gleich

$$-\frac{1}{2} \Sigma (\mu_1 V_x^2 + \mu_2 V_y^2 + \mu_3 V_z^2).$$

Dieses Beispiel ist der eben citirten Abhandlung entnommen.

Beisp. 2. Ein fester Körper bewegt sich in einem Mittel, welches auf jedes Element seiner Oberfläche zum Theil mit Reibungswiderständen, zum Theil mit Widerständen normal zur Oberfläche wirkt. Jeder dieser Widerstände ist, auf die Flächeneinheit bezogen, der Componente der Geschwindigkeit in seiner eignen Richtung, mit der nämlichen Constanten  $\kappa$  multiplicirt, gleich. Man zeige, dass sich diese Widerstände in eine Dissipationsfunction  $F$  einschliessen lassen, wobei

$$F = \frac{\kappa}{2} \{ \sigma(u^2 + v^2 + w^2) + A\omega_x^2 + B\omega_y^2 + C\omega_z^2 - 2D\omega_y\omega_z - 2E\omega_z\omega_x - 2F\omega_x\omega_y \},$$

wenn  $\sigma$  den Flächeninhalt,  $A, B$ , etc. die Trägheits- und Deviationsmomente der Oberfläche des Körpers und  $(u, v, w)$  die Componenten der Geschwindigkeit des Schwerpunktes von  $\sigma$  bedeuten.

§ 429. Unbestimmte Multiplicatoren, etc. Man erkläre, wie die Lagrange'schen Gleichungen in gewissen Fällen zu gebrauchen sind, wenn sie geometrischen Gleichungen Differentialquotienten nach der Zeit enthalten.

In § 396 ist darauf hingewiesen worden, dass die in den Lagrange'schen Gleichungen benutzten unabhängigen Variablen  $\theta, \varphi$ , etc. so gewählt werden müssen, dass sich alle Coordinaten der Körper des Systems durch sie ausdrücken lassen, ohne dass man nöthig hätte  $\theta', \varphi'$ , etc. einzuführen. Wenn aber eine Bewegung, wie die eines auf vollkommen rauher Fläche rollenden Körpers in Frage steht, so lässt sich die Bedingung, dass die relative Geschwindigkeit der Berührungspunkte Null sein muss,

enthält. Zuweilen kann die Gleichung, welche diese Bedingung ausdrückt, integrirt werden. Wenn z. B. eine Kugel auf einer rauhen Ebene rollt, wie in § 144, so ist die Bedingung  $x' - a\theta' = 0$ , aus der man durch Integration  $x - a\theta = b$  erhält, wo  $b$  eine Constante bedeutet. In solchen Fällen lässt sich die Bedingung als eine der geometrischen Beziehungen der Bewegung benutzen und auf diese Art die Anzahl der unabhängigen Variablen um eine reduciren.

Wenn aber die Differentialquotienten sich nicht leicht aus den Bedingungen ausscheiden lassen, ist es oft von Vortheil, die Reactionen und Reibungen in die Gleichungen zwischen den nicht conservativen Kräften auf die in § 426 erklärte Art einzuführen. Jede Reaction hat eine Bedingungsgleichung im Gefolge und es sind daher stets Gleichungen genug vorhanden, um die Reactionen zu eliminiren und die Coordinaten des Systems zu bestimmen.

Die Elimination der Reactionen ist im Allgemeinen am leichtesten auszuführen, wenn man die allgemeine Gleichung der virtuellen Arbeit benutzt und dem System nur solche Verrückungen gibt, welche die virtuelle Arbeit dieser Kräfte verschwinden lassen. Wir wollen annehmen, um einen Anhaltspunkt für unsre Vorstellungen zu gewinnen, ein Körper rolle auf einer vollkommen rauhen Fläche; es seien  $\theta, \varphi$ , etc. die sechs Coordinaten des Körpers; nach § 137 existiren dann drei Gleichungen von der Form

$$L_1 = A_1\theta' + B_1\varphi' + \dots = 0 \quad \dots \quad (1),$$

woraus sich die beiden andern ergeben, wenn man 2 und 3 statt 1 als Index schreibt. Diese drei Gleichungen drücken aus, dass die Componenten der Geschwindigkeit des Berührungspunktes in drei Richtungen Null sind. Die Gleichung der virtuellen Arbeit lässt sich schreiben (§ 398)

$$\left(\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \theta'} - \frac{\partial T}{\partial \theta}\right) \delta\theta + \text{etc.} = \frac{\partial U}{\partial \theta} \delta\theta + \text{etc.} \quad \dots \quad (2),$$

worin  $U$  die Kräftefunction der gegebenen Kräfte ist. Da die virtuelle Arbeit der Reactionen am Berührungspunkt weggelassen wurde, so gilt die Gleichung nur für solche Variationen von  $\theta, \varphi$ , etc., welche verursachen, dass der Körper auf der rauhen Fläche rollt. Die geometrischen Gleichungen  $L_1, L_2, L_3$  drücken aber aus, dass der Körper auf irgend eine Art rollt, daher sind  $\delta\theta, \delta\varphi$ , etc. durch drei Gleichungen von der Form

$$A_1\delta\theta + B_1\delta\varphi + \dots = 0 \quad \dots \quad (3)$$

verbunden.

Durch Benutzung der Methode der unbestimmten Multiplicatoren (siehe § 400) werden die Gleichungen der virtuellen Arbeit auf die gewöhnliche Art umgeformt in

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \theta'} - \frac{\partial T}{\partial \theta} = \frac{\partial U}{\partial \theta} + \lambda \frac{\partial L_1}{\partial \theta'} + \mu \frac{\partial L_2}{\partial \theta'} + \nu \frac{\partial L_3}{\partial \theta'} \quad (4)$$

und in ähnliche Gleichungen für die andern Coordinaten  $\varphi$ ,  $\psi$ , etc. Sie reichen in Verbindung mit den drei Gleichungen für  $L_1$ ,  $L_2$ ,  $L_3$  aus, um die Coordinaten des Körpers und  $\lambda$ ,  $\mu$ ,  $\nu$  zu bestimmen.

Das Verfahren wird sehr vereinfacht, wenn man die geometrischen Gleichungen für  $L_1$ ,  $L_2$ ,  $L_3$  durch Elimination so umformt, dass ein Differentialquotient z. B.  $\theta'$  aus allen Gleichungen mit Ausnahme der ersten wegfällt, ein andrer z. B.  $\varphi'$  aus allen mit Ausnahme der zweiten u. s. f. Ist dies geschehen, so wird die Gleichung für  $\theta$

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \theta'} - \frac{\partial T}{\partial \theta} = \frac{\partial U}{\partial \theta} + \lambda \frac{\partial L_1}{\partial \theta'} \quad (5).$$

Daraus ergibt sich  $\lambda$  sofort. Die Werthe von  $\mu$  und  $\nu$  findet man aus den entsprechenden Gleichungen für  $\varphi$ ,  $\psi$ . Ihre Werthe kann man dann in die übrigen Gleichungen einsetzen.

§ 430. Die Methode der unbestimmten Multiplicatoren ist in der That eine Einführung der unbekannten Reactionen in die Lagrange'schen Gleichungen. Es seien z. B.  $R_1$ ,  $R_2$ ,  $R_3$  die Componenten der Reaction am Berührungspunkt in den Richtungen der drei Geraden, welche bei der Aufstellung der Gleichungen für  $L_1$ ,  $L_2$ ,  $L_3$  benutzt wurden. Alsdann sind  $L_1$ ,  $L_2$ ,  $L_3$  den Componenten der relativen Geschwindigkeit der Berührungspunkte proportional. Diese Componenten mögen  $\kappa_1 L_1$ ,  $\kappa_2 L_2$ ,  $\kappa_3 L_3$  sein. Wird nun  $\theta$  allein variirt, so ist die virtuelle Geschwindigkeit von  $R_1$  gleich  $\kappa_1 A_1 \delta \theta$ , wofür man auch  $\kappa_1 \frac{\partial L_1}{\partial \theta'} \delta \theta$  schreiben kann.

Auf ähnliche Art sind  $\kappa_2 \frac{\partial L_2}{\partial \theta'} \delta \theta$  und  $\kappa_3 \frac{\partial L_3}{\partial \theta'} \delta \theta$  die virtuellen Geschwindigkeiten von  $R_2$  und  $R_3$ . Daher haben nach § 426 die Lagrange'schen Gleichungen die Form

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \theta'} - \frac{\partial T}{\partial \theta} = \frac{\partial U}{\partial \theta} + \kappa_1 R_1 \frac{\partial L_1}{\partial \theta'} + \kappa_2 R_2 \frac{\partial L_2}{\partial \theta'} + \kappa_3 R_3 \frac{\partial L_3}{\partial \theta'}.$$

Vergleicht man diese Gleichungen mit den durch die Methode der unbestimmten Multiplicatoren erhaltenen, so ergibt sich, dass  $\lambda$ ,  $\mu$ ,  $\nu$  den Componenten der Reactionen proportional sind. Der Vorthheil beim Gebrauch der Methode der unbestimmten Multiplicatoren besteht darin, dass die Reactionen mit dem geringsten Aufwand an algebraischer Rechnung und in einer Art eingeführt werden, wie sie für die Lösung des Problems am vorthheilhaftesten ist.

§ 431. Die Vertauschung der unabhängigen Variablen. Ein System von  $n$  Freiheitsgraden ist durch die Ausdrücke für seine kinetische Energie  $T$  und die Kräftefunction  $U$  defnirt. Wir nehmen an, die geometrischen Gleichungen enthielten die Zeit nicht explicite, so dass  $T$  eine homogene Function von der Form

$$T = \frac{1}{2} A_{11} \theta'^2 + A_{12} \theta' \varphi' + \dots \quad (1)$$

ist. Die Gleichung der lebendigen Kraft gibt

$$T = \frac{1}{2} A_{11} \theta'^2 + A_{12} \theta' \varphi' + \dots = U + C \quad (2).$$

Sind die Anfangswerthe der Coordinaten und die Anfangsgeschwindigkeiten gegeben, so ist auch die Constante  $C$  bekannt.

Wir wollen nun die linke Seite der Gleichung (2) mit  $P$  multipliciren und die rechte mit derselben Grösse dividiren, unter  $P$  eine willkürliche Function der Coordinaten verstanden. Damit die Gleichung bestehen bleibt, vertauschen wir die unabhängige Variable  $t$  mit  $\tau$ , so dass  $d\tau = P dt$  ist. Der Deutlichkeit wegen mögen in diesem Paragraphen an den Coordinaten angebrachte Indices, also  $\theta_1, \varphi_1$ , etc., ebenso die Differentiationen nach  $\tau$  angeben, wie die Accente Differentiationen nach  $t$ . Es ist dann  $\theta' = P\theta_1$ ,  $\varphi' = P\varphi_1$ , etc. Die Gleichung der lebendigen Kraft wird

$$P \left( \frac{1}{2} A_{11} \theta_1^2 + A_{12} \theta_1 \varphi_1 + \dots \right) = \frac{U + C}{P} \quad (3).$$

Der Satz, der zu beweisen ist, sagt aus: Wenn man

$$T_2 = P \left( \frac{1}{2} A_{11} \theta_1^2 + A_{12} \theta_1 \varphi_1 + \dots \right), \quad U_2 = \frac{U + C}{P} \quad (4)$$

setzt und  $T_2, U_2$  nach den Lagrange'schen Regeln so behandelt, als wären sie die kinetische Energie und Kräftefunction eines neuen Systems, kommt man zu denselben Bewegungsgleichungen, als hätte man die ursprünglichen  $T$  und  $U$  des gegebenen Systems benutzt.

Da  $d\tau = P dt$ , so ist offenbar

$$\frac{\partial T}{\partial \theta'} = \frac{\partial T_2}{\partial \theta_1}, \quad \frac{\partial T}{\partial \theta} = P^2 \frac{\partial T_2}{\partial \theta}.$$

Die Lagrange'sche Gleichung

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \theta'} - \frac{\partial T}{\partial \theta} = \frac{\partial U}{\partial \theta} \quad (5)$$

wird

$$\frac{d}{d\tau} \frac{\partial T_2}{\partial \theta_1} - \frac{\partial T_2}{\partial \theta} = - \frac{T_2}{P} \frac{\partial P}{\partial \theta} + \frac{1}{P} \frac{\partial U}{\partial \theta}.$$

Benutzt man die Gleichung der lebendigen Kraft  $U + C = PT_2$ , so wird die rechte Seite identisch mit  $\frac{\partial}{\partial \theta} \frac{U + C}{P}$ ; die Lagrange'sche Gleichung erhält daher die Form

$$\frac{d}{d\tau} \frac{\partial T_2}{\partial \theta_1} - \frac{\partial T_2}{\partial \theta} = \frac{\partial}{\partial \theta} \frac{U + C}{P} \quad (6),$$

welche den veränderten Bedingungen entspricht.

Als Beispiel wollen wir die Liouville'sche Lösung, § 407, nehmen, wenn  $2T = M(P\theta'^2 + Q\varphi'^2)$ , worin  $P$  nur eine Function von  $\theta$  und  $Q$  nur von  $\varphi$  ist. Die Gleichung der lebendigen Kraft ist  $\frac{1}{2} M(P\theta'^2 + Q\varphi'^2) = U + C$ .

Multiplicirt man mit  $M$  und setzt  $M d\tau = dt$ , so nimmt die Gleichung die einfache Form an

$$\frac{1}{2} (P\theta_1^2 + Q\varphi_1^2) = M(U + C).$$

Wir stellen nun die linke Seite durch  $T_2$ , die rechte durch  $U_2$  dar. Wenn, wie Liouville annimmt,  $M(U + C) = F_1(\theta) + F_2(\varphi)$  ist, so wird die Lagrange'sche Gleichung

$$\frac{d}{d\tau}(P\theta_1) - \frac{1}{2}\theta_1^2 \frac{\partial P}{\partial \theta} = \frac{\partial F_1(\theta)}{\partial \theta}$$

und daher

$$\frac{1}{2} \frac{d}{d\tau}(P\theta_1^2) = \frac{\partial F_1(\theta)}{\partial \theta} \theta_1,$$

woraus sich durch eine leichte Integration  $\frac{1}{2} P\theta_1^2 = F_1(\theta) + \alpha$  ergibt. Da  $\theta_1 = M\theta'$  ist, so erhält man damit das Resultat in § 407.

Die Transformation der unabhängigen Variablen hat Liouville Band XI benutzt; Appell (*Comptes Rendus*, 1892) hat jedoch die Methode Darboux zugeschrieben.

### Beispiele

(den an der Universität und den Colleges gegebenen Examination Papers entnommen).

1. Zwei Gewichte von den Massen  $m$  bez.  $2m$  sind durch einen Strick verbunden, der über eine glatte Rolle von der Masse  $m$  läuft. Diese Rolle hängt an einem Strick, welcher über eine glatte feste Rolle geht und an seinem andern Ende die Masse  $4m$  trägt. Man beweise, dass sich die Masse  $4m$  mit einer Beschleunigung bewegt, die ein Dreiundzwanzigstel der Beschleunigung der Schwere beträgt.

2. Der Mittelpunkt eines gleichförmigen Stabes von der Masse  $3m$  und der Länge  $2l$  liegt fest und an dem Ende des Stabes ist die Masse  $m$  angebracht. Der Stab befindet sich in horizontaler Lage und wird mit der Winkelgeschwindigkeit  $\sqrt{(2ng/l)}$  um eine verticale durch seinen Mittelpunkt gehende Axe in Rotation gesetzt. Man zeige, dass das schwere Ende des Stabes sich senkt, bis der Cosinus der Neigung des Stabes gegen die Verticale  $\sqrt{n^2+1} - n$  ist und dann wieder steigt.

3. Ein Stab von der Länge  $2l$  wird gezwungen sich derart auf der Oberfläche eines einschaligen Umdrehungshyperboloids, dessen Symmetrieaxe vertical steht, zu bewegen, dass der Stab stets auf einer Erzeugenden liegt. Der Stab gehe vom Zustand der Ruhe aus; man zeige, dass

$$r'^2 - 2ar'\theta' \sin \alpha + a^2\theta'^2 + \sin^2 \alpha \left( r^2 + \frac{1}{3} l^2 \right) \theta'^2 + 2g \cos \alpha (r - r_0) = 0, \\ \left\{ a^2 + \sin^2 \alpha \left( r^2 + \frac{1}{3} l^2 \right) \right\} \theta' - ar' \sin \alpha = 0 \text{ ist.}$$

Die Bedeutung der Zeichen ist folgende: Es sei  $S$  der Schwerpunkt des Stabes,  $P$  sein Schnittpunkt mit dem Kehlkreis des Hyperboloids,  $M$  der Mittelpunkt des Kehlkreises und  $O$  ein fester Punkt auf dem Kehlkreis. Dann ist  $PS = r$ ,  $MP = a$  = dem Radius des Kehlkreises,  $\theta$  = dem Winkel  $OMP$  und  $\alpha$  die Neigung des Stabes gegen die Verticale.

4. Ein Ring von der Masse  $m$  und dem Radius  $b$  rollt innerhalb eines vollkommen rauhen Ringes von der Masse  $M$  und dem Radius  $a$ , der sich in einer verticalen Ebene um sein Centrum dreht.  $\theta$ ,  $\varphi$  seien die Winkel, um welche sich die Ringe von ihrer Gleichgewichtslage aus gedreht haben; man beweise, dass

$$a\theta + b\varphi = (a-b)\psi, \quad Ma\theta'' = mb\varphi'', \\ (2M+m)(a-b)\psi'' = -(M+m)g \sin \psi.$$

5. Ein Stab bewege sich auf beliebige Art im Raum,  $l$ ,  $m$ ,  $n$  seien seine Richtungscosinusse gegen festliegende Axen und  $V$  die potentielle Energie; man beweise, dass

$$\frac{1}{l} \left( I \frac{d^2 l}{dt^2} + \frac{\partial V}{\partial l} \right) = \frac{1}{m} \left( I \frac{d^2 m}{dt^2} + \frac{\partial V}{\partial m} \right) = \frac{1}{n} \left( I \frac{d^2 n}{dt^2} + \frac{\partial V}{\partial n} \right)$$

ist, worin  $I$  das Trägheitsmoment des Stabes für eine durch seinen Mittelpunkt senkrecht zu seiner Länge gehende Axe bezeichnet. Siehe § 400.



6. Ein Punkt von der Masse  $m$  bewegt sich in einer Ebene und seine Bewegung wird auf Dreieckscoordinaten  $x, y, z$  (siehe § 17, Beisp. 11) bezogen. Es sei  $T$  die lebendige Kraft und die potentielle Energie  $V$  als homogene Function der Dreieckscoordinaten ausgedrückt; man beweise, dass

$$2T = -m(a^2 y' z' + b^2 z' x' + c^2 x' y'),$$

$$m(b^2 z'' + c^2 y'') - 2 \frac{\partial V}{\partial x} = m(c^2 x'' + a^2 z'') - 2 \frac{\partial V}{\partial y} =$$

$$m(a^2 y'' + b^2 x'') - 2 \frac{\partial V}{\partial z} \text{ ist.}$$

7. Ein schwerer Stab von der Länge  $2a$ , dessen Enden einen glatten horizontalen Boden und eine glatte verticale Wand berühren, gleitet abwärts und befindet sich dabei Anfangs nicht in einer auf der Wand senkrechten Ebene. Es sei  $\theta$  die Neigung des Stabes gegen die Verticale und  $\psi$  die Neigung der Horizontalprojection des Stabes gegen die Durchschnittslinie der Ebenen; man beweise, dass

$$4 \frac{d^2}{dt^2} (\cos \theta) = \cotg \theta \sec \psi \frac{d^2}{dt^2} (\sin \theta \cos \psi) - \frac{3g}{a},$$

$$4 \frac{d^2}{dt^2} (\sin \theta \sin \psi) = \tg \psi \frac{d^2}{dt^2} (\sin \theta \cos \psi) \text{ ist.}$$

8. Ein Massenpunkt bewegt sich unter der Wirkung zweier Centren von Abstossungskräften  $F$  und  $G$ , die von zwei festliegenden Punkten im Abstand  $2c$  voneinander ausgehen. Man zeige, dass sich die Lagrange'schen Bewegungsgleichungen in der Form

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \lambda} - \frac{\partial T}{\partial \lambda} = F + G, \quad \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \mu} - \frac{\partial T}{\partial \mu} = F \sim G$$

schreiben lassen, worin  $\lambda$  und  $\mu$  die elliptischen Coordinaten des Massenpunktes, auf die festen Punkte als Brennpunkte bezogen, sind und

$$\frac{2T}{\lambda^2 - \mu^2} = \frac{\lambda'^2}{\lambda^2 - c^2} + \frac{\mu'^2}{c^2 - \mu^2} \text{ ist.}$$

9. Es seien  $r, \theta$  die Polarcoordinaten eines Punktes von der Masse  $m$ , welcher unter der Einwirkung einer Centralkraft  $F$ , die nach dem Pol zu gerichtet ist, seine Bahn beschreibt und  $u, v$  seien die entsprechenden Momente; man beweise, dass die Hamilton'sche Function

$$H = \frac{u^2}{2m} + \frac{v^2}{2mr^2} + \int F dr \text{ ist.}$$

Daraus leite man die Hamilton'schen Bewegungsgleichungen

$$u = mr', \quad v = mr^2 \theta', \quad mr^3(u' + F) = v^2, \quad v' = 0 \text{ ab.}$$

## Kapitel IX.

### Kleine Schwingungen.

#### Schwingungen mit einem Freiheitsgrad.

§ 432. Wenn ein System von Körpern nur eine unabhängige Bewegung zulässt und kleine Schwingungen um eine mittlere Lage oder einen mittleren Bewegungszustand macht, so besteht im Allgemeinen unsere Aufgabe darin, die Bewegungsgleichung auf die Form

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2a \frac{dx}{dt} + bx = c$$

zurückzuführen, worin  $x$  eine kleine Grösse bedeutet, welche die Lage des Systems zur Zeit  $t$  bestimmt. Die Reduction wird dadurch bewirkt, dass man das Quadrat der kleinen Grösse  $x$  vernachlässigt.

§ 433. Die Bedeutung der einzelnen Gleichungsglieder. Wir nehmen an, man erhalte die Gleichung durch Aufstellung der Bewegungsgleichungen aller Massenpunkte und Elimination der Reactionen. Betrachten wir den Fall, in welchem das System aus einer Gleichgewichtslage verrückt wird. Wir stellen die Grösse der Verrückung durch einen Buchstaben  $x$  derart dar, dass die Lage eines jeden Massenpunktes, wenn  $x$  bekannt ist, aus den geometrischen Bedingungen des Systems abgeleitet werden kann. Die Verrückung  $\xi$  eines Massenpunktes  $m$  ist daher eine Function von  $x$  und da das Quadrat von  $x$  bei einer kleinen Schwingung zu vernachlässigen ist, so hat man nach Maclaurin's Theorem  $\xi = G + Hx$ , worin  $G$  und  $H$  gewisse Constante sind, die von der Lage des Massenpunktes in dem System abhängen. Die Effectivkräfte für  $m$  sind (1)  $Hm \frac{d^2x}{dt^2}$  in der Richtung der Tangente an seinen Schwingungsbogen und (2) eine centrifugale Kraft, in deren Zähler  $m \left(\frac{dx}{dt}\right)^2$  steht und die daher vernachlässigt werden kann. Die Effectivkräfte tragen daher zur Differentialgleichung Ausdrücke von der Form  $\frac{d^2x}{dt^2}$  bei.

Die an dem System angreifenden gegebenen Kräfte sind dreierlei Art.

(1) Bei der Verrückung des Systems suchen die Kräfte des Systems es in seine Gleichgewichtslage, falls sie stabil ist, zurückzuführen. Diese Kräfte sind sämmtlich Functionen von  $x$  und tragen, da das Quadrat von  $x$  weggelassen wird, Glieder von der Form  $c - bx$  zur Gleichung bei. Die Glieder  $c - bx$  stellen daher die natürlichen Restitutionskräfte dar.

(2) Es können auch Widerstandskräfte an besonderen Punkten des Systems auftreten, die von der Geschwindigkeit der Massenpunkte abhängen. Die Ge-

schwindigkeit eines jeden solchen Massenpunktes  $m$  ist eine Function von  $\frac{d\xi}{dt}$ , welche, wie zuvor,  $H \frac{dx}{dt}$  gleich gesetzt werden kann. Diese Widerstände liefern daher Glieder von der Form  $a \frac{dx}{dt}$  zu der Gleichung.

(3) Es können ausserdem noch kleine *äussere Kräfte* vorkommen, welche Functionen der Zeit sind. Sie können, wenn sie existiren, durch ein Glied  $f(t)$  auf der rechten Seite der Gleichung dargestellt werden.

Wie man sieht, stellen die Effectivkräfte und die drei Arten von gegebenen Kräften verschiedene Arten von Gliedern zu der Gleichung und da die Producte dieser Glieder zu vernachlässigen sind, so stammt jedes Glied ausschliesslich aus der erwähnten Quelle.

Wir haben vor, zuerst die äusseren Kräfte wegzulassen und die Bewegung der Systeme zu betrachten, an denen nur Restitutions- und Widerstandskräfte angreifen. Die durch diese beiden erzeugte Schwingung heisst *die natürliche oder freie Schwingung*. Die durch die äusseren Kräfte hervorgebrachten Schwingungen führen manchmal den Namen *erzwungene Schwingungen* und werden später unter diesem Titel in Bd. 2 untersucht werden.

§ 434. **Auflösung der Gleichung.** In der Regel sind sowohl  $a$  als  $b$  und  $c$  Constante, in welchem Fall man die Schwingung vollständig bestimmen kann. Setzt man  $x = c/b + \xi e^{-at}$ , wenn  $b$  nicht Null ist, so reducirt sich die Gleichung auf die bekannte Form

$$\frac{d^2\xi}{dt^2} + (b - a^2)\xi = 0.$$

Wir wollen der Kürze wegen, falls  $b - a^2$  positiv ist,  $b - a^2 = n^2$  setzen. Man erhält dann

$$x = \frac{c}{b} + A e^{-at} \sin(nt + B),$$

worin  $A$  und  $B$  zwei unbestimmte Constante sind, die von den Anfangsbedingungen der Bewegung abhängen. Die physikalische Auslegung der Gleichung ist nicht schwer. Sie stellt eine oscillatorische Bewegung dar. Die Centrallage, um welche das System schwingt, ist durch  $x = c/b$  bestimmt. Das System geht durch diese Centrallage jedesmal, wenn  $nt + B$  ein Vielfaches von  $\pi$  ist. Daraus folgt, dass das Zeitintervall zwischen zwei aufeinander folgenden Durchgängen durch die Centrallage  $\frac{\pi}{n}$  ist. Um die Zeiten zu finden, zu welchen das System momentan zur Ruhe kommt, setze man  $dx/dt = 0$ . Dies gibt  $\operatorname{tg}(nt + B) = n/a$ . Das Intervall von der einen Lage augenblicklicher Ruhe zur nächsten ist ebenfalls  $\frac{\pi}{n}$ . Misst man die Zeit von einem Durchgang durch die Centrallage an, so ist für  $t = 0$ ,  $x = c/b$  und daher  $B = 0$ . Die kleinste negative Wurzel der Gleichung  $\operatorname{tg} nt = n/a$  (positiv genommen) gibt das Intervall von einer Lage augenblicklicher Ruhe bis zur Centrallage an und die kleinste positive Wurzel das Intervall von der Centrallage bis zur nächsten Ruhelage.

Das erstere ist offenbar grösser und das zweite kleiner als  $\pi/2n$ , da die Summe beider  $\pi/n$  ist. Die Schwingungsweite auf jeder Seite der Centrallage findet man durch Substitution der aus dieser Gleichung sich ergebenden Werthe von  $t$  in den Ausdruck für  $x - c/b$ . Da die Schwingungen in dem constanten Zeitintervall  $\pi/n$  stattfinden, so nimmt die Schwingungsweite beständig ab und die auf jeder Seite der Gleichgewichtslage sich folgenden Bogen bilden eine geometrische

Progression, deren gemeinschaftlicher Quotient  $e^{-\frac{a\pi}{n}}$  ist. Die Grösse  $n$  hat Lord Rayleigh in seiner *Theory of Sound* sehr passend die *Frequenz* der Schwingung genannt.

Ist  $b - a^2$  negativ, so setze man  $b - a^2 = -v^2$ . In diesem Fall muss der *Sinus* in der Gleichung durch seinen Exponentialwerth ersetzt werden; man hat daher

$$x = \frac{c}{b} + Ce^{(-a+v)t} + De^{(-a-v)t},$$

worin  $C$  und  $D$  zwei unbestimmte Constanten sind. Die Bewegung ist jetzt nicht mehr oscillatorisch. Ist sowohl  $a$  als  $b$  positiv, so ist  $v$  kleiner als  $a$  und  $x$  wird alsdann, die Anfangsbedingungen mögen sein, welche sie wollen, schliesslich gleich  $c/b$  und das System nähert sich beständig der durch diesen Werth von  $x$  bestimmten Lage. Dasselbe tritt ein, wenn  $v$  grösser als  $a$  ist, vorausgesetzt dass die Anfangsbedingungen derart sind, dass der Coefficient der Exponentialgrösse, welche einen positiven Exponenten hat, Null wird.

Ist  $b - a^2 = 0$ , so nimmt das Integral eine andre Form an und man hat

$$x = \frac{c}{b} + (Et + F)e^{-at},$$

worin  $E$  und  $F$  zwei unbestimmte Constante sind. Ist  $a$  positiv, so nähert sich das System fortwährend der durch  $bx = c$  bestimmten Lage.

§ 435. Wird der aus diesen Gleichungen sich ergebende Werth von  $x$  gross, so können auch die von  $x^2$  abhängenden Glieder, die bei der Aufstellung der Gleichung vernachlässigt wurden, gross werden. Es ist möglich, dass diese Glieder den ganzen Charakter der Bewegung ändern. Alsdann heisst das Gleichgewicht oder die ungestörte Bewegung des Systems, je nachdem der Fall liegt, unstabil und die Gleichungen stellen nur die Beschaffenheit der Bewegung dar, mit der das System von seinem ungestörten Zustand aus sich zu bewegen beginnt.

§ 436. Beisp. 1. Die Bedingungen des Systems sind derart, dass Anfangs

$$\frac{dx}{dt} = -(a+v)\left(x - \frac{c}{b}\right)$$

ist; man finde den schliesslichen Werth von  $x$ .

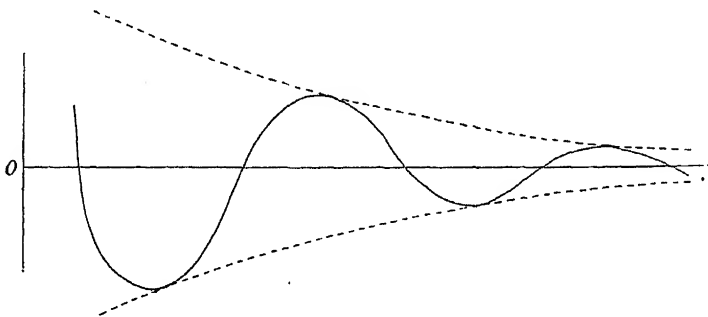
$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2a \frac{dx}{dt} + bx = f(t)$$

$$x = e^{-at} \left\{ \frac{dx_0}{dt} \frac{\sin nt}{n} + x_0 \left( \cos nt + \frac{a}{n} \sin nt \right) \right\} + \frac{1}{n} \int_0^t e^{-a(t-t')} \sin n(t-t') f(t') dt'$$

ist, worin  $x_0$ ,  $\frac{dx_0}{dt}$  die Werthe von  $x$  und  $\frac{dx}{dt}$  für  $t = 0$  sind.

[Math. Tripos, 1876.]

§ 437. Es ist oft vortheilhaft, die Bewegung eines Systems durch eine Figur darzustellen. Gleiche Zuwächse der Abscisse des Punktes  $P$  mögen nach irgend einem Maassstab gleiche Zuwächse der Zeit darstellen und die Ordinate möge die Abweichung der Coordinate  $x$  von ihrem mittleren Werth angeben. Die Curve, welche der darstellende Punkt  $P$  beschreibt, zeigt alsdann dem Auge die ganze Bewegung



des Systems. Für den Fall, dass  $a$  sowohl als  $b - a^2$  positiv sind, nimmt die Curve die hier aufgezeichnete Gestalt an.

Die punktirten Linien entsprechen der Ordinate  $\pm Ae^{-at}$ . Der darstellende Punkt  $P$  oscillirt zwischen ihnen und seine Bahn berührt sie abwechselnd. Ebenso lässt sich die Curve für andre Werthe von  $a$  und  $b$  aufzeichnen.

Am wichtigsten ist in der Dynamik der Fall, in welchem  $a = 0$  ist. Die Bewegung ist alsdann durch

$$x - \frac{c}{b} = A \sin(\sqrt{b}t + B)$$

gegeben und ihre Curve ist die Sinuscurve. Man pflegt in diesem Fall die Schwingung *harmonisch* zu nennen.

§ 438. Beisp. 1. Ein System schwingt um eine mittlere Lage und seine Abweichung von ihr wird durch  $x$  gemessen.  $x_0$  und  $\frac{dx_0}{dt}$  seien die Anfangs-

werthe von  $x$  und  $\frac{dx}{dt}$ ; man zeige, dass das System niemals sich um so viel als

$\left\{ \frac{\left(\frac{dx_0}{dt}\right)^2 + 2ax_0 \frac{dx_0}{dt} + bx_0^2}{b - a^2} \right\}^{\frac{1}{2}}$  von seiner mittleren Lage entfernt, wenn  $b$  grösser als  $a^2$  ist.

Beisp. 2. Ein System schwingt um eine Gleichgewichtslage. Man soll durch Beobachtung seiner Bewegung die Zahlenwerthe von  $a$ ,  $b$ ,  $c$  bestimmen.

Beliebige drei Bestimmungen der Coordinate  $x$  zu drei verschiedenen Zeiten liefern zwar im Allgemeinen Gleichungen genug für  $a$ ,  $b$  und  $c$ ; jedoch lassen sich gewisse Messungen leichter ausführen als andre. So kann man z. B. die Werthe von  $x$ , wenn das System momentan zur Ruhe kommt, gut beobachten, weil das System sich alsdann langsam bewegt und eine Messung zu einer etwas falschen Zeit nur einen Fehler zweiter Ordnung verursacht, während sich die Werthe von  $t$  zu dieser Zeit nicht gut beobachten lassen, weil es in Folge der langsamen Bewegung schwer ist, den Moment, in welchem  $dx/dt$  verschwindet, genau anzugeben.

Wenn man so drei aufeinander folgende Werthe  $x_1, x_2, x_3$  von  $x$  gefunden hat, so ist das Verhältniss der beiden successiven Bogen  $x_2 - x_1, x_3 - x_2$  eine bekannte Function von  $a$  und  $b$  und eine Gleichung zur Bestimmung der Constanten lässt sich derart aufstellen. Ist die Gleichgewichtslage unbekannt, so lässt sich die zweite Gleichung bilden, indem man erwägt, dass auch die drei Bogen  $x_1 - \frac{c}{b}, x_2 - \frac{c}{b}, x_3 - \frac{c}{b}$  eine geometrische Progression bilden. So kommt man zu  $c/b$ , dem Werth von  $x$ , welcher der Gleichgewichtslage entspricht, und zu  $a/n$ .

Ist nun die Gleichgewichtslage bekannt, so ist das Intervall zwischen zwei successiven Durchgängen des Systems durch sie ebenfalls eine bekannte Function von  $a$  und  $b$  und auch die dritte Gleichung kann gebildet werden.

Beisp. 3. Ein Körper vollführt gradlinige Schwingungen in einem Mittel, dessen Widerstand der Geschwindigkeit proportional ist, unter der Einwirkung einer Anziehungskraft, die nach einem festen Centrum gerichtet und dem Abstand von ihm proportional ist. Die beobachtete Schwingungsdauer sei  $T$  und die Coordinaten der Endpunkte dreier sich folgender Halbschwingungen  $p, q, r$ ; man beweise, dass die Coordinate der Gleichgewichtslage und die Schwingungsdauer, wenn kein Widerstand vorhanden wäre,

$$\frac{pr - q^2}{p + r - 2q} \text{ bez. } T \left\{ 1 + \frac{1}{\pi^2} \left( \log \frac{p - q}{r - q} \right)^2 \right\}^{-\frac{1}{2}} \text{ sind.}$$

[Math. Tripos, 1870.]

## Erste Methode die Bewegungsgleichungen zu bilden.

§ 439. Wenn das betrachtete System ein einzelner Körper ist, so gibt es eine einfache, oft sehr vortheilhafte Methode, die Bewegungsgleichung aufzustellen.

Die Bewegung finde in der Ebene statt.

In § 205 wurde gezeigt, dass man bei Vernachlässigung der Quadrate kleiner Grössen die Momente um das Momentancentrum als festes Centrum nehmen kann. Gewöhnlich geht die Richtung der unbekannten Reactionen durch diesen Punkt, ihre Momente sind dann Null und wir erhalten eine Gleichung, die nur bekannte Grössen enthält.

Da sich der Körper der Voraussetzung nach für den Moment um das Momentancentrum als festen Punkt dreht, so ist die Richtung der Bewegung eines jeden Punktes des Körpers senkrecht auf der Geraden, die ihn mit diesem Centrum verbindet. Umgekehrt lässt sich die Lage des Momentancentrums ermitteln, wenn die Bewegungsrichtungen zweier Punkte des Körpers bekannt sind. Denn errichten wir Lothe in diesen Punkten auf ihren Bewegungsrichtungen, so müssen sich diese in dem Rotationsmomentancentrum schneiden.

Die Gleichung kann im Allgemeinen auf die Form

$$Mk^2 \frac{d^2\theta}{dt^2} = \left( \begin{array}{l} \text{dem Moment der gegebenen Kräfte} \\ \text{um das Momentancentrum} \end{array} \right)$$

gebracht werden, worin  $\theta$  den Winkel angibt, den eine im Körper befestigte Grade mit einer im Raum festliegenden macht. In dieser Formel ist  $Mk^2$  das Trägheitsmoment des Körpers für das Momentancentrum und da die linke Seite der Gleichung den kleinen Factor  $\frac{d^2\theta}{dt^2}$  enthält, so kann man hier annehmen, das Momentancentrum habe seine mittlere oder ungestörte Lage. Auf der rechten Seite kommt kein kleiner Factor vor; man darf daher nicht versäumen, entweder das Moment der Kräfte um das Momentancentrum in seiner gestörten Lage zu nehmen oder das Moment irgend einer unbekannten Reaction, die durch das Momentancentrum geht, einzuschliessen.

Beisp. Wenn ein Körper mit einer einzigen unabhängigen Bewegung in derselben Lage unter der Einwirkung zweier verschiedener Kräftesysteme sich im Gleichgewicht befinden kann und wenn  $L_1, L_2$  die Längen der gleichwerthigen einfachen Pendel für diese Systeme sind, falls sie einzeln wirken, so ist die Länge  $L$  des gleichwerthigen Pendels für den Fall, dass sie zusammen wirken durch

$$\frac{1}{L} = \frac{1}{L_1} + \frac{1}{L_2}$$

gegeben.

§ 440. Beisp. 1. Eine homogene Halbkugel macht kleine Schwingungen auf einer vollkommen rauhen, horizontalen Ebene; man finde die Bewegung.

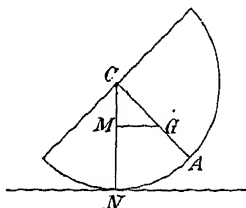
Es sei  $C$  das Centrum,  $G$  der Schwerpunkt der Halbkugel,  $N$  der Berührungspunkt mit der rauhen Ebene. Der Radius sei  $a$ ,  $CG = c$ ,  $\theta = \angle NCG$ .

Der Punkt  $N$  ist hier das Centrum der augenblicklichen Rotation, weil die Ebene vollkommen rauh und daher Reibung genug zur Wirkung kommt, um  $N$  in Ruhe zu erhalten. Nimmt man daher die Momente um  $N$ , so ist

$$(k^2 + GN^2) \frac{d^2\theta}{dt^2} = -gc \cdot \sin \theta.$$

Da man in den kleinen Gliedern  $GN = a - c$  setzen darf, so reducirt sich dies auf

$$\{k^2 + (a - c)^2\} \frac{d^2\theta}{dt^2} + gc \cdot \theta = 0.$$







Wir brauchen ferner, um die Momente um  $P$  nehmen zu können, den horizontalen Abstand des Punktes  $G$  von der Verticalen durch  $P$ ; er lässt sich durch Projection der gebrochenen Linie  $PA' + A'G$  auf die Horizontale finden. Die Projection von  $PA'$  ist

$$PA' \cos(\alpha + \theta) = \varrho \varphi \cos \alpha,$$

wenn man die Quadrate kleiner Grössen vernachlässigt. Die Projection von  $A'G$  ist  $r\theta$ . Der gesuchte horizontale Abstand ist daher

$$\left( \frac{\varrho \varphi'}{\varrho + \varphi'} \cos \alpha - r \right) \theta.$$

Ist  $k$  der Trägheitsradius für den Schwerpunkt, so wird die Bewegungsgleichung

$$(k^2 + GA^2) \frac{d^2\theta}{dt^2} = -g\theta \left( \frac{\varrho \varphi'}{\varrho + \varphi'} \cos \alpha - r \right)$$

und die Länge  $L$  des äquivalenten einfachen Pendels ergibt sich aus der Gleichung

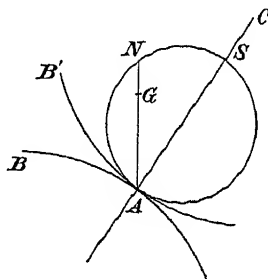
$$\frac{k^2 + r^2}{L} = \frac{\varrho \varphi'}{\varrho + \varphi'} \cos \alpha - r.$$

§ 442. **Stabilitätskreis.** Auf der gemeinsamen Normalen im Berührungspunkt  $A$  der beiden Cylinderflächen trage man die Länge  $AS = s$  ab, so, dass  $\frac{1}{s} = \frac{1}{\varrho} + \frac{1}{\varphi'}$  ist und beschreibe über  $AS$  als Durchmesser einen Kreis. Man verlängere, wenn nöthig,  $AG$ , bis es den Kreis in  $N$  trifft. Alsdann ist  $GN = s \cos \alpha - r$ , wobei die positive Richtung von  $G$  nach  $A$  hin geht. Die Länge  $L$  des gleichwerthigen einfachen Pendels ist durch die Formel gegeben

$L \cdot GN = \text{Quadrat des Trägheitsradius für } A.$

Aus dieser Formel folgt, dass wenn  $G^1)$  ausserhalb des Kreises und über der Tangente in  $A$  liegt,  $L$  negativ und das Gleichgewicht unstabil ist; wenn innerhalb,  $L$  positiv und das Gleichgewicht stabil ist. Der Kreis heisst *der Stabilitätskreis*.

Dieses Verfahren ist nicht nur bei der Bestimmung der Bedingung der Stabilität eines schweren Cylinders von Vortheil, welcher im Gleichgewicht auf einer Seite eines rauhen festen Cylinders ruht, sondern auch zur Bestimmung der Schwingungsdauer, wenn das Gleichgewicht gestört wird. Eine Ausdehnung auf die Fälle rauher Kegel und anderer Flächen wird später gegeben werden.



1) Ist  $R$  der Krümmungsradius der Bahn, welche  $G$  bei dem Rollen des einen Cylinders auf dem anderen beschreibt, so ist, wie bekannt,  $R = -\frac{AG^2}{NG}$ , so

§ 443. Man beachte, dass das obige Resultat vollständig allgemein ist und auf alle Fälle, in welchen der geometrische Ort der Momentanaxe bekannt ist, angewendet werden kann. So ist  $\varrho'$  der Krümmungsradius dieses Ortes in dem Körper,  $\varrho$  der des Ortes im Raum und  $\alpha$  die Neigung seiner Tangente gegen den Horizont.

Ist  $dx$  die horizontale Verschiebung des Momentancentrums, welche durch die Rotation  $d\theta$  des Körpers hervorgebracht wird, so lässt sich die Gleichung zur Ermittlung der Länge des gleichwerthigen einfachen Pendels eines unter dem Einfluss der Schwere oscillirenden Körpers schreiben

$$\frac{h^2 + r^2}{L} = \frac{dx}{d\theta} - r.$$

Dies folgt unmittelbar aus § 441. Man sieht auch leicht ein, dass der Durchmesser des Stabilitätskreises dem Verhältniss der Geschwindigkeit der Momentanaxe im Raum zur Winkelgeschwindigkeit des Körpers gleich ist.

Beisp. 1. Eine homogene Kugel macht auf der Innenseite einer festen Kugel kleine Schwingungen derart, dass ihr Centrum sich in einer verticalen Ebene bewegt. Die Rauheit sei gross genug, um Gleiten zu verhüten; man beweise, dass die Länge des gleichwerthigen Pendels sieben Fünftel der Differenz der Radien beträgt. Sind die Kugeln glatt, so ist die Länge des gleichwerthigen Pendels der Differenz der Radien gleich.

Beisp. 2. Eine homogene Halbkugel wird auf eine raue feste Ebene gesetzt, die gegen den Horizont unter einem Winkel geneigt ist, dessen Sinus  $\frac{1}{4}\sqrt{2}$  ist, und macht in einer verticalen Ebene kleine Schwingungen. Man zeige, dass die Länge des gleichwerthigen Pendels  $\left(\frac{46}{5} - \frac{\sqrt{50}}{4}\right)\alpha$  ist, unter  $\alpha$  den Radius der Halbkugel verstanden.

§ 444. Wenn an dem Körper eine Kraft angreift, deren Richtung durch den Schwerpunkt geht, so müssen die Resultate etwas geändert werden. Grade wie zuvor muss im Gleichgewichtszustand die Kraft die Richtung der Geraden haben, die den Schwerpunkt  $G$  mit dem Momentancentrum  $A$  verbindet. Wird der Körper verschoben, so schneidet die Kraft ihre frühere Richtungslinie in einem Punkt  $F$ , von dem wir annehmen wollen, er sei bekannt. Es sei  $AF = f$ , und positiv, wenn  $G$  und  $F$  auf entgegengesetzten Seiten des Ortes des Momentancentrums liegen. Dann lässt sich ähnlich wie oben zeigen, dass die Länge  $L$  des gleichwerthigen einfachen Pendels unter dem Einfluss dieser Kraft, die constant und der Schwere gleich vorausgesetzt wird, aus der Gleichung

$$\frac{h^2 + r^2}{L} = \frac{\varrho \varrho'}{\varrho + \varrho'} \cos \alpha - \frac{fr}{f + r}$$

hervorgeht, worin  $\alpha$  den Winkel bedeutet, den die Richtung der Kraft mit der Normalen auf die Bahn des Momentancentrums macht.

dass alle ausserhalb des über  $AS$  als Durchmesser beschriebenen Kreises gegebenen Punkte Curven beschreiben, deren concave Seite  $A$  zugewendet ist, während die Curven der innerhalb gelegenen  $A$  ihre convexe Seite zukehren. Es ist daher klar, dass das Gleichgewicht stabil, unstabil oder neutral ist, je nachdem der Schwerpunkt innerhalb, ausserhalb oder auf dem Umfang des Kreises liegt.

Trägt man auf der Linie  $AG$  die Länge  $AG'$  so ab, dass

$$\frac{1}{AG'} = \frac{1}{AG} + \frac{1}{AF}$$

ist, so erhält der Ausdruck für  $L$  die Gestalt  $\frac{k^2 + r^2}{L} = G'N$ . Das Gleichgewicht ist daher stabil oder unstabil, je nachdem  $G'$  innerhalb oder ausserhalb des Stabilitätskreises liegt.

§ 445. Schwingungen eines Körpers, der auf zwei Curven ruht. Zwei Punkte  $A, B$  eines Körpers werden gezwungen gegebene Curven zu beschreiben und der Körper befindet sich unter dem Einfluss der Schwere im Gleichgewicht. Eine kleine Störung wird ihm gegeben; man finde die Oscillationsdauer.

Es seien  $C, D$  die Krümmungsmittelpunkte der gegebenen Curven für die beiden Punkte  $A, B$ . Es mögen sich  $AC$  und  $BD$  in  $O$  schneiden.  $G$  sei der Schwerpunkt des Körpers,  $GE$  ein Loth auf  $AB$ . Alsdann ist in der Gleichgewichtslage  $OG$  vertical. Es seien  $i, j$  die Winkel, welche  $CA, BD$  mit der Verticalen machen und  $\alpha$  der Winkel  $AOB$ . Es mögen  $A', B', G', E'$  die Lagen bezeichnen, in welche  $A, B, G, E$  gebracht werden, wenn sich der Körper um einen Winkel  $\theta$  dreht und  $O'$  sei der Durchschnittspunkt der Normalen in  $A', B'$ . Es sei

$$ACA' = \varphi, \quad BDB' = \varphi'.$$

Da der Körper aus der Lage  $AB$  in die Lage  $A'B'$  dadurch gebracht werden kann, dass er den Winkel  $\theta$  um den Punkt  $O$  beschreibt, so hat man

$$\frac{CA \cdot \varphi}{OA} = \frac{BD \cdot \varphi'}{OB} = \theta. \text{ Ferner}$$

ist  $GG'$  schliesslich senkrecht auf  $OG$  und daher  $GG' = OG \cdot \theta$ . Sind endlich  $x, y$  die Projectionen von  $OO'$  auf die durch  $O$  gehende Horizontale und Verticale, so findet man

$$x \cos j + y \sin j = \text{Abstand des P. } O' \text{ von } OD = OD \cdot \varphi',$$

$$x \cos i - y \sin i = \text{Abstand des P. } O' \text{ von } OC = OC \cdot \varphi;$$

daher

$$x = \frac{OD \cdot \sin i \cdot \varphi' + OC \cdot \sin j \cdot \varphi}{\sin \alpha}.$$

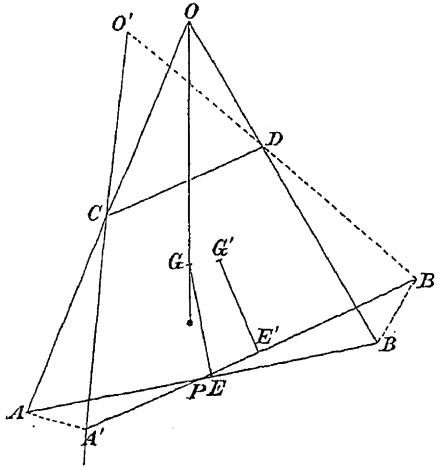
Nimmt man nun die Momente um  $O'$  als dem Centrum der augenblicklichen Rotation, so hat man

$$\begin{aligned} (k^2 + OG^2) \frac{d^2 \theta}{dt^2} &= -g \cdot (GG' + x) \\ &= -g \theta \left( OG + \frac{OD \cdot OB}{BD} \frac{\sin i}{\sin \alpha} + \frac{OC \cdot OA}{CA} \frac{\sin j}{\sin \alpha} \right), \end{aligned}$$

worin  $k$  den Trägheitsradius für den Schwerpunkt bedeutet.

Ist daher  $L$  die Länge des gleichwerthigen einfachen Pendels, so erhält man

$$\frac{k^2 + OG^2}{L} = OG + \frac{OD \cdot OB}{BD} \frac{\sin i}{\sin \alpha} + \frac{OC \cdot OA}{AC} \frac{\sin j}{\sin \alpha}.$$



die Schwingung unbegrenzt klein wird, ist  $C$  der Krümmungsmittelpunkt der Curve für  $A$ . Es sei  $AG = s$ , der Winkel  $ACG = \psi$  und  $R$  der Krümmungsradius der Curve in  $A$ .

Es möge  $\theta$  der Winkel sein, um den sich der Körper bei seiner Bewegung von der Gleichgewichtslage in die Lage, bei welcher sich der Schwerpunkt in  $G$  befindet, gedreht hat;  $d\theta/dt$  ist dann die Winkelgeschwindigkeit des Körpers. Da sich  $G$  in der Richtung der Tangente in  $G$  bewegt, so liegt das Centrum der augenblicklichen Rotation in der Normalen  $GC$  und in einem solchen Punkt  $O$ , dass

$$OG \frac{d\theta}{dt} = \text{Geschwindigkeit von } G = \frac{ds}{dt} \text{ ist; daher } GO = \frac{ds}{d\theta}.$$

Ist  $Mk^2$  das Trägheitsmoment des Körpers um seinen Schwerpunkt und nimmt man die Momente um  $O$ , so hat man

$$(k^2 + OG^2) \frac{d^2\theta}{dt^2} = -g \cdot OG \sin \psi.$$

Zuletzt, wenn der Winkel  $\theta$  unbegrenzt klein wird, ist

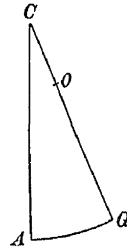
$$\frac{\psi}{\theta} = \frac{d\psi}{d\theta} = \frac{d\psi}{ds} \cdot \frac{ds}{d\theta} = \frac{OG}{R},$$

folglich

$$(k^2 + OG^2) \frac{d^2\theta}{dt^2} = -g \frac{OG^2}{R} \cdot \theta$$

und die Länge des gleichwerthigen einfachen Pendels

$$L = \left(1 + \frac{k^2}{OG^2}\right) R.$$



§ 447. **Ermittlung der Schwingungen durch die lebendige Kraft.** Wenn das System von Körpern, die sich in Bewegung befinden, nur eine unabhängige Bewegung zulässt, so kann man die Dauer einer kleinen Schwingung häufig aus der Gleichung der lebendigen Kraft ableiten. Die Gleichung ist von der zweiten Ordnung in den kleinen Grössen und man muss daher bei ihrer Aufstellung kleine Grössen dieser Ordnung in Rechnung ziehen. Dies führt manchmal zu etwas umständlichen Untersuchungen; auf der andern Seite ist die Gleichung frei von allen unbekannten Reactionen und man spart daher oft die Mühe vielen Eliminirens.

Das folgende Beispiel, welches auch Gelegenheit gibt einen Vergleich mit der Methode im vorigen Paragraphen anzustellen, möge das Verfahren erläutern.

*Die Bewegung eines Körpers in der Ebene ist durch die Coordinaten  $x, y$  seines Schwerpunktes und den Winkel  $\theta$  gegeben, den eine im Körper festliegende Linie mit einer im Raum festliegenden bildet. Der Körper befinde sich unter dem Einfluss der Schwere im Gleichgewicht; man soll die Dauer einer kleinen Schwingung finden.*

Da der Körper nur eine unabhängige Bewegung zu machen vermag, so lassen sich  $(x, y)$  als Functionen von  $\theta$  ausdrücken, z. B.  $x = F(\theta)$ ,  $y = f(\theta)$ . Ist  $Mk^2$  das Trägheitsmoment des Körpers für eine durch seinen Schwerpunkt gehende Axe, so wird die Gleichung der lebendigen Kraft

$$(dx/dt)^2 + (dy/dt)^2 + k^2(d\theta/dt)^2 = C - 2gy,$$

worin  $C$  eine willkürliche Constante bedeutet.

Ist  $\alpha$  der Werth von  $\theta$ , wenn der Körper sich in der Gleichgewichtslage befindet, und ist zur Zeit  $t$ ,  $\theta = \alpha + \varphi$ , so hat man nach dem Maclaurin'schen Theorem

$$y = y_0 + y_0' \varphi + y_0'' \frac{\varphi^2}{2} + \dots,$$

worin  $y_0', y_0''$  die Werthe von  $\frac{dy}{d\theta}$ ,  $\frac{d^2y}{d\theta^2}$  für  $\theta = \alpha$  sind. In der Gleichgewichtslage ist aber  $y$  ein Maximum oder Minimum und daher  $y_0' = 0$ . Die Gleichung der lebendigen Kraft wird mithin

$$(x_0'^2 + h^2) \left( \frac{d\varphi}{dt} \right)^2 = C - gy_0'' \varphi^2,$$

worin  $x_0'$  der Werth von  $\frac{dx}{d\theta}$  für  $\theta = \alpha$  ist; differenziert man, so kommt

$$(x_0'^2 + h^2) \frac{d^2\varphi}{dt^2} = -gy_0'' \varphi.$$

Für die Länge  $L$  des gleichwerthigen einfachen Pendels findet man

$$L \frac{d^2y}{d\theta^2} = h^2 + \left( \frac{dx}{d\theta} \right)^2,$$

worin nach der Ausführung der Differentiationen für  $\theta$  sein Werth  $\alpha$  zu setzen ist. Man sieht leicht, dass die geometrische Bedeutung dieser Gleichung dieselbe, wie im vorigen Paragraphen, ist.

Dieses analytische Resultat rührt von Holditch her (siehe den 8. Band der *Cambridge Transactions*). Es ist von Vortheil, wenn die Bewegung des schwingenden Körpers in Bezug auf seinen Schwerpunkt bekannt ist.

Beisp. 1. Das untere Ende eines schweren gleichförmigen Balkens von der Länge  $a$  gleitet auf einem gewichtslosen unausdehnbaren Seil von der Länge  $2a$ , dessen Enden an zwei festen Punkten in derselben horizontalen Linie befestigt sind, und sein oberes Ende gleitet auf einem verticalen Stab, der die Linie halbirt, welche die beiden festen Punkte verbindet. Man beweise, dass die einzige Gleichgewichtslage vertical ist und dass die Dauer einer kleinen Schwingung um

diese Lage  $\frac{2\pi a\sqrt{2}}{\sqrt{\{3g(2b-a)\}}}$  beträgt, worin  $2\sqrt{a^2 - b^2}$  den Abstand zwischen den beiden festen Punkten bedeutet. [Math. Tripos.]

Man nehme an, das untere Ende des Stabes bewege sich auf einem Kreis vom Radius  $a^2/b$ , und drücke die Coordinaten  $(x, y)$  des Mittelpunktes durch den Winkel  $\theta$  aus, den der Stab mit der Verticalen macht. Das Resultat folgt aus dem Princip der lebendigen Kraft.

Beisp. 2. Die Enden eines Stabes gleiten auf dem Umfang einer Hypocycloide mit drei Spitzen, deren Ebene vertical steht. Der Radius des umschriebenen Kreises ist  $3a$  und eine der Spitzen liegt im höchsten Punkt des Kreises. Man beweise, dass die Länge des gleichwerthigen Pendels  $\frac{4}{3}a$  ist.

[Math. Tripos, 1872.]

Zuerst beweise man, dass der Stab, während er mit seinen beiden Enden auf den seitlichen Zweigen  $BE, DE$  dieser Hypocycloide gleitet, beständig den unteren Zweig  $BD$  berührt. Sein Mittelpunkt  $R$  beschreibt einen Kreis vom Centrum  $O$  und Radius  $a$ . Setzt man  $BOR = \varphi$ , so ist der Winkel, den der Stab mit der Tangente an die Spitze  $b$  macht,  $\frac{1}{2}\varphi$ . Das Resultat erhält man dann mittelst des Principes der lebendigen Kraft.

§ 448. Momente um die Momentanaxe. Wenn ein Körper im Raum nur eine unabhängige Bewegung hat, so gibt es im Allgemeinen keine Momentanaxe. Es ist übrigens in § 225 bewiesen worden, dass man die Bewegung immer auf eine Rotation um eine Centralaxe und eine Translation längs dieser Axe zurückführen kann.

Ist  $I$  das Trägheitsmoment des Körpers für die augenblickliche Centralaxe,  $\Omega$  die Winkelgeschwindigkeit um sie,  $V$  die Translationsgeschwindigkeit in ihrer Richtung,  $M$  die Masse des Körpers, so ist nach dem Princip der lebendigen Kraft

$$\frac{1}{2} I \Omega^2 + \frac{1}{2} M V^2 = U + C,$$

wobei  $U$  die Kräftefunction und  $C$  eine Constante bedeutet. Durch Differentiation erhält man

$$I \frac{d\Omega}{dt} + \frac{1}{2} \Omega \frac{dI}{dt} + M \frac{V}{\Omega} \frac{dV}{dt} = \frac{dU}{\Omega dt}.$$

Versteht man unter  $L$  das Moment der gegebenen Kräfte um die augenblickliche Centralaxe, so ist, nach § 340,  $L = \frac{dU}{\Omega dt}$ .

Bedeutet ferner  $p$  den Pfeil der Schraubenbewegung des Körpers, so ist  $V = p \Omega$  und die Bewegungsgleichung wird daher

$$(I + Mp^2) \frac{d\Omega}{dt} + \frac{1}{2} \Omega \frac{dI}{dt} + Mp \Omega \frac{dV}{dt} = L.$$

Wenn der Körper kleine Schwingungen um eine Gleichgewichtslage ausführt, kann man das zweite und dritte Glied weglassen und erhält  $(I + Mp^2) \frac{d\Omega}{dt} = L$ .

Ist eine Momentanaxe vorhanden, so wird  $p = 0$  und man kann, wie man sieht, die Momente um die Momentanaxe genau so nehmen, als läge sie im Raum und im Körper fest.

## Zweite Methode die Bewegungsgleichungen bei kleinen Schwingungen zu bilden.

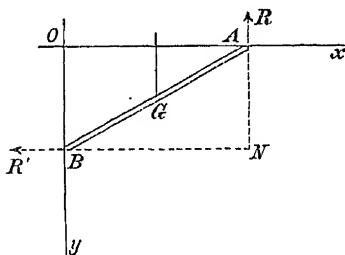
§ 449. Die allgemeinen Bewegungsgleichungen der Körper mögen gebildet sein. Ist die Lage, um welche das System schwingt, bekannt, so ist vielleicht ein Theil der in ihnen enthaltenen Grössen klein. Ihre Quadrate und höheren Potenzen kann man vernachlässigen und alle Gleichungen werden linear. Hat man darauf die unbekannten Reactionen eliminirt, so lassen sich die resultirenden Gleichungen leicht lösen.

Ist dagegen die Lage, um welche das System schwingt, unbekannt, so *braucht man nicht erst das statische Problem zu lösen*. Man kann vielmehr durch ein einziges Verfahren gleichzeitig die Ruhelagen bestimmen, sich versichern, ob sie stabil sind oder nicht und die Schwingungsdauer ermitteln. Die Methode lässt sich am besten an einem Beispiel erklären.

§ 450. Beisp. *Von den Enden eines gleichförmigen schweren Balkens AB, der die Länge 2l hat, ist das eine gezwungen, sich auf einer horizontalen Geraden Ox und das andre sich auf einer verticalen Oy zu bewegen. Wenn sich das ganze System um Oy mit gleichförmiger Winkelgeschwindigkeit*

keit  $\omega$  dreht, die Gleichgewichtslagen und die Dauer einer kleinen Schwingung zu finden.

Es seien  $x, y$  die Coordinaten von  $G$ , dem Mittelpunkt des Stabes,  $\theta$  der Winkel  $OAB$ , den der Stab mit  $Ox$  macht.  $R, R'$  seien die Componenten der Reactionen bei  $A$  und  $B$  in der Ebene  $xOy$ . Die Masse der Längeneinheit sei die Masseneinheit.



Die Beschleunigungen eines Elementes  $dr$  des Stabes, das die Coordinaten  $(\xi, \eta)$  hat, sind

$$\frac{d^2\xi}{dt^2} - \omega^2\xi \text{ parallel zu } Ox,$$

$$\frac{1}{\xi} \frac{d}{dt}(\xi^2\omega) \text{ senkrecht zur Ebene } xyO \text{ und } \frac{d^2\eta}{dt^2} \text{ parallel zu } Oy.$$

Da es nicht nöthig ist, die Momente um  $Ox, Oy$  zu nehmen oder senkrecht zur Ebene  $xOy$  zu zerlegen, so ist die Betrachtung der zweiten Beschleunigung nicht erforderlich. Die Resultanten der Effectivkräfte  $\frac{d^2\xi}{dt^2} dr$  und  $\frac{d^2\eta}{dt^2} dr$ , für den ganzen Körper genommen, sind  $2l \frac{d^2x}{dt^2}$  und  $2l \frac{d^2y}{dt^2}$  an  $G$  angreifend und ein Paar  $2lk^2 \frac{d^2\theta}{dt^2}$ , welches den Körper um  $G$  zu drehen sucht. Die Resultanten der Effectivkräfte  $\omega^2\xi dr$ , für den ganzen Körper genommen, sind eine einzelne an  $G$  angreifende Kraft

$$= \int_{-l}^{+l} \omega^2(x + r \cos \theta) dr = \omega^2 x \cdot 2l$$

und ein Paar<sup>1)</sup> um  $G$

$$= \int_{-l}^{+l} \omega^2(x + r \cos \theta) r \sin \theta dr = \omega^2 \cdot 2l \cdot \frac{l^2}{3} \sin \theta \cos \theta,$$

wobei der Abstand  $r$  in der Richtung von  $G$  nach  $A$  hin positiv genommen ist.

1) Wenn sich ein Körper in einer Ebene um eine Axe in seiner eignen Ebene mit der Winkelgeschwindigkeit  $\omega$  herumdreht, so kann man einen allgemeinen Ausdruck für die Resultanten der centrifugalen Kräfte an allen Elementen des Körpers ausfindig machen. Man nehme den Schwerpunkt  $G$  zum Coordinatenanfang und die  $y$ -Axe parallel zur festen Axe. Ist  $c$  dann der Abstand des Punktes  $\bar{x}$  von der Rotationsaxe, so sind alle centrifugalen Kräfte einer einzigen resultirenden Kraft bei  $G$  äquivalent

$$= \int \omega^2(c + x) dm = \omega^2 \cdot Mc, \quad \text{weil } \bar{x} = 0 \text{ ist,}$$

und einem einzigen resultirenden Paar

$$= \int \omega^2(c + x) y dm = \omega^2 \int xy dm, \quad \text{weil } \bar{y} = 0 \text{ ist.}$$

Wir erhalten jetzt, wenn wir in den Richtungen  $Ox$ ,  $Oy$  zerlegen und die Momente um  $G$  nehmen, die *dynamischen Gleichungen*

$$\left. \begin{aligned} 2l \frac{d^2 x}{dt^2} &= -R' + \omega^2 x \cdot 2l \\ 2l \frac{d^2 y}{dt^2} &= -R + g \cdot 2l \\ 2lk^2 \frac{d^2 \theta}{dt^2} &= Rx - R'y - \omega^2 \cdot 2l \cdot \frac{l^2}{3} \sin \theta \cos \theta \end{aligned} \right\} \quad \cdot \cdot \quad (1).$$

Wir haben ferner die *geometrischen Gleichungen*

$$x = l \cos \theta, \quad y = l \sin \theta \quad \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \quad (2).$$

Durch Elimination von  $R$ ,  $R'$  aus den Gleichungen (1) erhält man

$$x \frac{d^2 y}{dt^2} - y \frac{d^2 x}{dt^2} + k^2 \frac{d^2 \theta}{dt^2} = gx - \omega^2 xy - \omega^2 \frac{l^2}{3} \sin \theta \cos \theta \quad (3).$$

*Die Ruhelage zu finden.* Wir bemerken, dass der Stab, wenn er im Zustand der Ruhe in diese Lage gebracht wird, immer in ihr bleiben würde, und dass deshalb  $\frac{d^2 x}{dt^2} = 0$ ,  $\frac{d^2 y}{dt^2} = 0$ ,  $\frac{d^2 \theta}{dt^2} = 0$  ist. Dies gibt

$$f(x, y, \theta) = gx - \omega^2 xy - \omega^2 \frac{l^2}{3} \sin \theta \cos \theta = 0 \quad \cdot \cdot \quad (4).$$

Verbindet man (4) mit (2), so erhält man  $\theta = \frac{\pi}{2}$  oder  $\sin \theta = \frac{3g}{4\omega^2 l}$  und damit sind die Gleichgewichtslagen gefunden. Eine dieser Lagen werde durch  $\theta = \alpha$ ,  $x = a$ ,  $y = b$  dargestellt.

*Die Schwingungsbewegung zu finden.* Es sei

$$x = a + x', \quad y = b + y', \quad \theta = \alpha + \theta',$$

worin  $x'$ ,  $y'$ ,  $\theta'$  kleine Grössen sind. Diese Werthe müssen nun in Gleichung (3) eingesetzt werden. Auf der linken Seite sind  $\frac{d^2 x}{dt^2}$ ,  $\frac{d^2 y}{dt^2}$ ,  $\frac{d^2 \theta}{dt^2}$  sämmtlich klein; wir haben daher einfach  $a$ ,  $b$ ,  $\alpha$  statt  $x$ ,  $y$ ,  $\theta$  zu schreiben. Auf der rechten Seite substituirt man nach Taylor's Theorem; es wird

$$f(a + x', b + y', \alpha + \theta') = \frac{\partial f}{\partial a} x' + \frac{\partial f}{\partial b} y' + \frac{\partial f}{\partial \alpha} \theta'.$$

Wir wissen, dass das erste Glied  $f(a, b, \alpha)$  Null ist, denn dies ist eben die Gleichung (4), aus welcher sich  $a$ ,  $b$ ,  $\alpha$  ergaben. Man erhält daher

$$a \frac{d^2 y'}{dt^2} - b \frac{d^2 x'}{dt^2} + k^2 \frac{d^2 \theta'}{dt^2} = (g - \omega^2 b) x' - \omega^2 a y' - \omega^2 \frac{l^2}{3} \cos 2\alpha \cdot \theta'.$$

Setzt man aber, in den Gleichungen (2),  $\theta = \alpha + \theta'$ , so erhält man nach dem Taylor'schen Theorem



Die Gleichung zur Bestimmung der Bewegung ist mithin

$$(\ell^2 + k^2) \frac{d^2 \theta'}{dt^2} + \left( gl \sin \alpha + \frac{4}{3} \omega^2 \ell^2 \cos 2\alpha \right) \theta' = 0.$$

Ist nun  $gl \sin \alpha + \frac{4}{3} \omega^2 \ell^2 \cos 2\alpha = n$  positiv, wenn einer der beiden Werthe von  $\alpha$  eingesetzt wird, so ist die entsprechende Gleichgewichtslage *stabil* und die Dauer einer kleinen Schwingung

$$2\pi \sqrt{\frac{\ell^2 + k^2}{n}}.$$

Ist  $n$  negativ, so ist das Gleichgewicht *unstabil* und kann deshalb eine Schwingung überhaupt nicht stattfinden.

Wenn  $\omega^2 > \frac{3g}{4\ell}$ , gibt es zwei Gleichgewichtslagen des Stabes. Man findet durch Substitution, dass die Lage, bei welcher der Stab gegen die Verticale geneigt ist, stabil, die andere unstabil ist. Wenn dagegen  $\omega^2 < \frac{3g}{4\ell}$ , so ist die einzige Lage, in welcher der Stab ruhen kann, vertical und stabil.

Für  $n = 0$  befindet sich der Körper in einer Lage neutralen Gleichgewichtes. Um die kleinen Schwingungen bestimmen zu können, muss man die Glieder von höherer Ordnung als der ersten beibehalten. Nach einer bekannten Transformation ist

$$x \frac{d^2 y}{dt^2} - y \frac{d^2 x}{dt^2} = \frac{d}{dt} \left( \ell^2 \frac{d\theta}{dt} \right);$$

Die linke Seite der Gleichung (3) wird daher  $(\ell^2 + k^2) \frac{d^2 \theta}{dt^2}$  und die rechte nach dem Taylor'schen Theorem

$$\frac{d^2}{d\alpha^2} \left( gl \cos \alpha - \frac{2}{3} \omega^2 \ell^2 \sin 2\alpha \right) \frac{\theta'^2}{1 \cdot 2} + \text{etc.}$$

Für  $n = 0$  ist  $\alpha = \frac{\pi}{2}$  und  $\omega^2 = \frac{3g}{4\ell}$ . Macht man die nöthigen Substitutionen; so verschwinden die Glieder von der zweiten Ordnung und die Bewegungsgleichung wird

$$(\ell^2 + k^2) \frac{d^2 \theta'}{dt^2} = -\frac{gl}{2} \theta'^3.$$

Da die niedrigste Potenz von  $\theta'$  auf der rechten Seite ungrade ist und der Coefficient negativ, so ist das Gleichgewicht für eine Verückung nach jeder Seite seiner Lage stabil. Ist  $\alpha$  der Anfangswerth von  $\theta'$ , so hat man für die Zeit  $T$  bis zur Erreichung der Gleichgewichtslage

$$T = \sqrt{\frac{4(\ell^2 + k^2)}{gl}} \int_0^\alpha \frac{d\theta'}{\sqrt{\alpha^4 - \theta'^4}}$$

und, setzt man  $\theta' = \alpha \varphi$ ,

$$T = \sqrt{\frac{4(\ell^2 + k^2)}{gl}} \cdot \int_0^1 \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - \varphi^4}} \cdot \frac{1}{\alpha}.$$

Die Zeit bis zur Erreichung der Gleichgewichtslage variiert daher umgekehrt wie der Bogen. Ist die anfängliche Verrückung unbegrenzt klein, so wird diese Zeit unendlich gross.

Man kann dieses bestimmte Integral, welches ein elliptisches, das sogenannte lemniscatische, ist, auch anders, nämlich durch die Gammafunction ausdrücken. Es ist leicht zu zeigen, dass

$$\int_0^1 \frac{d\varphi}{\sqrt{1-\varphi^4}} = \frac{\left\{ \Gamma\left(\frac{1}{4}\right) \right\}^2}{4\sqrt{2}\pi}$$

ist. Man setze  $\varphi^4 = x$ .

§ 451. Man hätte dieses Problem auch mittelst der ersten Methode leicht lösen können. Denn der Punkt  $N$ , in welchem sich die beiden Lothe in  $A$  und  $B$  auf  $Ox$ ,  $Oy$  schneiden, ist die Momentanaxe. Nimmt man die Momente um  $N$ , so erhält man die Gleichung

$$\begin{aligned} (l^2 + k^2) \frac{d^2\theta}{dt^2} &= gl \cos \theta - \int_{-l}^{+l} \omega^2 (l+r)^2 \sin \theta \cos \theta \frac{dr}{2l} \\ &= gl \cos \theta - \frac{4l^2}{3} \omega^2 \sin \theta \cos \theta. \end{aligned}$$

Bezeichnet man die rechte Seite der Gleichung mit  $f(\theta)$ , so ergibt sich die Gleichgewichtslage aus der Gleichung  $f(\alpha) = 0$  und die Schwingungsdauer aus

$$(l^2 + k^2) \frac{d^2\theta}{dt^2} = \frac{df(\alpha)}{d\alpha} \theta'.$$

§ 452. Beisp. 1. Wenn die Masse des Stabes, der mit  $AB$  bezeichnet wurde,  $M$  ist, zu zeigen, dass die Grösse des Paares, welches das System zwingt, sich um  $Oy$  mit gleichförmiger Winkelgeschwindigkeit zu drehen,  $M \frac{4l^2}{3} \omega \frac{d\theta}{dt} \sin 2\theta$  ist.

Würde sich die Grösse des Paares ändern, wenn  $Ox$  oder  $Oy$  irgend welche Masse hätten?

Beisp. 2. Das obere Ende eines gleichförmigen Balkens von der Länge  $2l$  wird gezwungen, auf einem glatten horizontalen Stab ohne Trägheit zu gleiten und das untere auf einem glatten verticalen Stab, durch dessen oberes Ende der horizontale Stab hindurchgeht; das System rotirt frei um den verticalen Stab; man beweise, dass die Winkelgeschwindigkeit des Systems, wenn  $\alpha$  die Neigung des Balkens gegen die Verticale bei einer relativen Gleichgewichtslage bedeutet,  $\left( \frac{3g}{4l \cos \alpha} \right)^{\frac{1}{2}}$  ist, und zeige, dass der Balken, wenn er um ein Geringes aus dieser Lage verrückt wird, eine kleine Schwingung in der Zeit

$$\frac{4\pi}{\left\{ \frac{3g}{l} (\sec \alpha + 3 \cos \alpha) \right\}^{\frac{1}{2}}}$$

macht.

[Coll. Exam.]

In dem früher im Text gegebenen Beispiel wurde das System gezwungen, sich mit gleichförmiger Geschwindigkeit um die Verticale zu drehen, hier dagegen rotirt es frei. Die Winkelgeschwindigkeit um die Verticale ist daher nicht constant und ihre kleinen Variationen müssen aus dem Princip der Flächen abgeleitet werden.

## Lagrange's Methode, die Bewegungsgleichungen zu bilden.

§ 453. **Vortheile der Methode.** Die Vortheile der Lagrange'schen Methode sind verschiedener Art. Sie liefert die Bewegungsgleichungen frei von allen Reactionen und ist daher dann besonders zu empfehlen, wenn die Bewegungen verschiedener miteinander verbundener Körper zu untersuchen sind. Sie lässt auch eine grössere Auswahl von Grössen zu, die man zu Coordinaten nehmen kann. Ferner kann man, sobald die Lagrange'sche Function niedergeschrieben ist, aus ihr allein alle Bewegungsgleichungen ableiten, statt sie wie sonst einzeln aus verschiedenen Principien entwickeln zu müssen. Andererseits freilich muss die Function so berechnet werden, dass sie auch die Quadrate der kleinen Grössen enthält. Bei kleinen Schwingungen behalten wir nun im Allgemeinen nur die ersten Potenzen kleiner Grössen bei; wenn daher nur wenige Gleichungen erforderlich sind, ist es oft vorzuziehen, dieselben mittelst Zerlegung der Kräfte und Ermittlung der Momente aufzustellen.

Wie man sieht, eignet sich die Methode am besten für Schwingungen mit mehr als einem Freiheitsgrad. Aus diesem Grund wollen wir hier nur die allgemeine Art erklären, wie die Bewegungsgleichungen zu bilden sind, damit wir im Stande sind, die Methode auf die Auflösung von Problemen anzuwenden. Wir behalten uns die allgemeine Discussion der Lagrange'schen Determinante für den zweiten Theil vor.

§ 454. Die Aufgabe der Lagrange'schen Methode ist, *die Schwingungen eines Systems um seine Gleichgewichtslage* zu bestimmen. Sie findet keine Anwendung auf Schwingungen um einen Zustand stationärer Bewegung. Wenn z. B. ein schwerer Punkt mittelst eines Fadens an einem festen Punkt aufgehängt wird, so ist der Faden vertical, wenn sich das System im Gleichgewicht befindet und die Schwingungen um diese Lage lassen sich mittelst der Lagrange'schen Methode ermitteln. Bringt man aber den Massenpunkt dazu, dass er einen horizontalen Kreis beschreibt, wie bei dem konischen Pendel, so kann man Schwingungen um die stationäre Kreisbewegung mit ihrer Hülfe nicht finden. Oder: wenn ein Ring auf dem Boden in einer verticalen Ebene rollt und dabei Schwingungen von der einen Seite der Ebene auf die andere macht, so können diese mittelst der Lagrange'schen Methode nicht berechnet werden. In dem nächsten Band wird eine Methode zur Bestimmung auch von Schwingungen um einen Zustand stationärer Bewegung angegeben werden.

Für jetzt nehmen wir an, die an dem System angreifenden Kräfte hätten eine Kräftefunction und setzen auch voraus, dass die geometrischen Gleichungen die Zeit nicht explicite enthalten und ebenso wenig Differentialquotienten nach der Zeit.

Bei der Lagrange'schen Methode ist es wesentlich, dass die gewählten Coordinaten so kleine Grössen sind, dass man alle Potenzen derselben mit Ausnahme der niedrigsten, die vorkommen, weglassen kann. Man soll sie im Allgemeinen so wählen, dass sie in der Gleichgewichtslage verschwinden. Mit dieser Einschränkung ist die Wahl jedoch ganz beliebig. Wir wollen sie durch die Buchstaben  $\theta$ ,  $\varphi$ , etc. darstellen. Wenn nun das System um die Gleichgewichtslage schwingt, so bleiben diese Grössen während der Bewegung klein. Die Anzahl der Coordinaten sei  $n$ .

Wie früher mögen Accente die Differentialquotienten nach der Zeit angeben.

Ist  $T$  die lebendige Kraft des Systems, wenn es aus seiner Gleichgewichtslage gestört wird, so lässt sich  $T$ , wie in § 396, als homogene quadratische Function von  $\theta'$ ,  $\varphi'$ , etc. in der Gestalt

$$2T = A_{11}\theta'^2 + 2A_{12}\theta'\varphi' + A_{22}\varphi'^2 + \text{etc.} \quad (1)$$

ausdrücken. Hier sind die Coefficienten  $A_{11}$  etc. sämmtlich Functionen von  $\theta$ ,  $\varphi$ , etc. und wir können annehmen, sie seien in einer Reihe nach Potenzen dieser Coordinaten entwickelt. Sind nun die Schwingungen so klein, dass man alle Potenzen der kleinen Grössen mit Ausnahme der niedrigsten, die vorkommen, ausscheiden kann, so brauchen wir nur die constanten Glieder dieser Reihen beizubehalten. Man kann daher die Coefficienten  $A_{11}$ , etc. als Constante betrachten.

Ist  $U$  die Kräftefunction des Systems, wenn es aus seiner Gleichgewichtslage gestört wird, so lässt sich auch  $U$  in einer Reihe von Potenzen von  $\theta$ ,  $\varphi$ , etc. entwickeln.

Es sei danach

$$2U = 2U_0 + 2B_1\theta + 2B_2\varphi + \text{etc.} + B_{11}\theta^2 + 2B_{12}\theta\varphi + \text{etc.} \quad (2).$$

Hier ist  $U_0$  eine Constante, die offenbar der Werth von  $U$  ist, wenn  $\theta$ ,  $\varphi$ , etc. sämmtlich Null sind. Soll die Lagrange'sche Methode Erfolg haben, so ist es nothwendig, dass diese beiden Entwicklungen möglich seien.

In der Gleichgewichtslage muss nach dem Princip der virtuellen Arbeit  $\frac{\partial U}{\partial \theta} = 0$ ,  $\frac{\partial U}{\partial \varphi} = 0$ , etc.  $= 0$  sein (siehe auch § 340). Sind die gewählten Coordinaten derart, dass sie in der Gleichgewichtslage verschwinden, so folgt daraus unmittelbar  $B_1 = 0$ ,  $B_2 = 0$ , etc.  $= 0$ . Hat man die Coordinaten nicht in dieser Weise gewählt, so müssen sie doch für eine Lage des Systems, die sich dicht bei der Gleichgewichtslage befindet, verschwinden. Die Differentialquotienten von  $U$ , d. h.  $B_1$ ,  $B_2$ , etc., sind daher nothwendiger Weise *klein*. Die Glieder  $B_1\theta$ ,  $B_2\varphi$ , etc. sind mithin kleine Grössen von der zweiten Ordnung und die quadratischen Glieder von  $U$  können im Vergleich mit ihnen nicht vernachlässigt werden.

Man beachte auch, dass man die Gleichgewichtswerthe von  $\theta$ ,  $\varphi$ , etc. von vornherein finden kann, indem man die verschiedenen ersten Differentialquotienten von  $U$  gleich Null setzt. Es ist dies jedoch im Allgemeinen nicht nöthig, weil diese Werthe von  $\theta$ ,  $\varphi$ , etc. in der Folge doch erscheinen (siehe auch § 449).

Wir haben nun die in Reihen entwickelten Werthe von  $T$  und  $U$  in die  $n$  Lagrange'schen Gleichungen

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{\theta}} - \frac{\partial T}{\partial \theta} = \frac{\partial U}{\partial \theta} \quad . . . . . (3)$$

und die ähnlichen für  $\varphi$ ,  $\psi$ , etc. einzusetzen. Da der Ausdruck für  $T$  keine  $\theta$ ,  $\varphi$ , etc. enthält, so hat man

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{\theta}} = 0, \quad \frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}} = 0, \text{ etc.}$$

Die  $n$  Gleichungen (3) werden daher

$$\left. \begin{aligned} A_{11}\theta'' + A_{12}\varphi'' + \dots &= B_1 + B_{11}\theta + B_{12}\varphi + \dots \\ A_{12}\theta'' + A_{22}\varphi'' + \dots &= B_2 + B_{12}\theta + B_{22}\varphi + \dots \\ \text{etc.} &= \text{etc.} \end{aligned} \right\} \quad . . . (4).$$

Dies sind die Lagrange'schen Gleichungen zur Bestimmung kleiner Schwingungen eines Systems um eine Gleichgewichtslage.

§ 455. **Die Lösungsmethode.** Die Gleichungen sind nun aufzulösen. Wir bemerken, dass sie sämmtlich linear sind und dass deshalb  $\theta$ ,  $\varphi$ , etc. durch eine Reihe von Exponentialgrößen von der Gestalt  $Me^{at}$  richtig dargestellt werden. Da wir aber eine oscillatorische Bewegung suchen, so ist es vortheilhafter, diese Exponentialgrößen durch die entsprechenden trigonometrischen Ausdrücke zu ersetzen. Da die Gleichungen Differentialquotienten erster Ordnung nicht enthalten, so ist es möglich, wie man sich durch eine Probe überzeugen kann, ihnen mittelst der folgenden Annahme zu genügen:

$$\left. \begin{aligned} \theta &= \alpha + M_1 \sin(p_1 t + \varepsilon_1) + M_2 \sin(p_2 t + \varepsilon_2) + \text{etc.} \\ \varphi &= \beta + N_1 \sin(p_1 t + \varepsilon_1) + N_2 \sin(p_2 t + \varepsilon_2) + \text{etc.} \\ \text{etc.} &= \text{etc.} \end{aligned} \right\} \quad . . . (5).$$

Nimmt man die einzelnen trigonometrischen Glieder für sich allein, so kann man diesen Gleichungen die typische Gestalt geben

$$\theta = M \sin(pt + \varepsilon), \quad \varphi = N \sin(pt + \varepsilon), \text{ etc.} = \text{etc.}$$

Substituirt man die Werthe nun in die Gleichungen (4), so erhält man

$$\left. \begin{aligned} (A_{11}p^2 + B_{11})M + (A_{12}p^2 + B_{12})N + \text{etc.} &= 0 \\ (A_{12}p^2 + B_{12})M + (A_{22}p^2 + B_{22})N + \text{etc.} &= 0 \\ \text{etc.} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad . . . (6)$$

und durch Elimination von  $M$ ,  $N$ , etc. die Determinantengleichung

$$\begin{vmatrix} A_{11}p^2 + B_{11}, & A_{12}p^2 + B_{12}, & \text{etc.} \\ A_{12}p^2 + B_{12}, & A_{22}p^2 + B_{22}, & \text{etc.} \\ \text{etc.} & \text{etc.} & \text{etc.} \end{vmatrix} = 0 \quad . \quad . \quad . \quad (7).$$

Die Determinante ist, wie man sieht, in Bezug auf die Hauptdiagonale symmetrisch. Sind es  $n$  Coordinaten, so ist sie eine Gleichung  $n^{\text{ten}}$  Grades zur Ermittlung von  $p^2$ . In dem zweiten Theil wird gezeigt werden, dass alle Werthe von  $p^2$  reell sind.

Nimmt man irgend eine positive oder negative Wurzel, so bestimmen die Gleichungen (6) die Verhältnisse von  $N$ ,  $P$ , etc. zu  $M$  und man sieht, dass auch diese Verhältnisse sämmtlich reell sind. Sind alle Wurzeln der Determinantengleichung positiv, so geben die Gleichungen (5) die ganze Bewegung mit  $2n$  willkürlichen Constanten, nämlich  $M_1, M_2, M_3, \dots, M_n$  und  $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n$ . Diese sind durch die Anfangswerthe von  $\theta, \varphi$ , etc.,  $\theta', \varphi'$ , etc. zu bestimmen. Ist irgend eine Wurzel der Determinantengleichung negativ, so nimmt der entsprechende Sinus seine exponentielle Gestalt wieder an, wobei der Ausdruck dadurch, dass man dem Coefficienten  $M$  eine imaginäre Form gibt, reell gemacht wird. In diesem Fall findet keine Schwingung um die Gleichgewichtslage statt. Die Lage heisst dann unstabil.

Man beachte, dass für jeden positiven durch die Gleichung (7) gegebenen Werth von  $p^2$  zwei gleiche Werthe von  $p$  mit entgegengesetztem Vorzeichen existiren. Es ist übrigens nicht nöthig, hier die negativen Werthe von  $p$  in Betracht zu ziehen. Denn die Auflösung der linearen Differentialgleichungen wird durch eine Reihe von Exponentialgrössen richtig dargestellt. Nun ist jeder Sinus die Summe zweier Exponentialgrössen mit Exponenten von verschiedenem Vorzeichen. Daher sind die beiden Werthe von  $p$  in den trigonometrischen für  $\theta, \varphi$ , etc. angenommenen Ausdrücken bereits eingeschlossen.

Die Constanten  $\alpha, \beta$ , etc. in dem Ansatz (5) sind offenbar die Coordinaten der Centrallage, um die das System schwingt. Setzt man diese Werthe von  $\theta, \varphi$ , etc. in die Gleichungen (4) ein, so erhält man

$$\left. \begin{aligned} 0 &= B_1 + B_{11}\alpha + B_{12}\beta + \text{etc.} \\ 0 &= B_2 + B_{12}\alpha + B_{22}\beta + \text{etc.} \\ 0 &= \text{etc.} \end{aligned} \right\} . \quad . \quad . \quad . \quad (8).$$

Diese Gleichungen bestimmen die Werthe von  $\alpha, \beta$ , etc. Da den Bewegungsgleichungen durch diese constanten Werthe der Coordinaten ohne ein die Zeit enthaltendes Glied genügt wird, so sind  $\alpha, \beta$ , etc. die

*Coordinaten der Gleichgewichtslage des Systems.* Dies folgt auch aus den Sätzen der Statik, welche die Gleichgewichtslage eines Systems angeben, wenn die Function  $U$  bekannt ist. Danach findet man die Gleichgewichtswerthe der Coordinaten  $\theta$ ,  $\varphi$ , etc., indem man die ersten Differentialquotienten von  $U$  nach  $\theta$ ,  $\varphi$ , etc. gleich Null setzt. Die so erhaltenen Gleichungen sind offenbar identisch mit denen unter (8).

Wenn eine Wurzel, z. B.  $p_1^2$ , der Determinantengleichung (7) Null ist, so reduciren sich die entsprechenden Glieder in (5) auf Constante. Zugleich ist die Resultante der Gleichungen (8) Null, so dass entweder die Gleichungen (8) nicht unabhängig von einander oder die Werthe von  $\alpha$ ,  $\beta$ , etc. nicht so klein sind, dass ihre Quadrate vernachlässigt werden können. In dem ersten Fall nimmt der Theil der Lösung (5), welcher von der Wurzel  $p_1^2$  abhängt, eine andere Gestalt an. Setzt man  $\theta = \alpha + At$ ,  $\varphi = \beta + Bt$ , etc., so kommt man zu denselben Gleichungen (8) wie zuvor und ausserdem zu einer Reihe von Gleichungen, die sich aus (8) ergibt, wenn man  $A$ ,  $B$ , etc. für  $\alpha$ ,  $\beta$ , etc. und Null für  $B_1$ ,  $B_2$ , etc. schreibt. Wenn die Coordinaten so gewählt worden sind, dass in dem Ausdruck für  $U$ ,  $B_1 = 0$ ,  $B_2 = 0$ , etc. ist, so liefern die beiden Reihen von Gleichungen  $A/\alpha = B/\beta = \text{etc.}$  Jedenfalls aber, mag man diese Wahl getroffen haben oder nicht, sind im Allgemeinen nur  $2n - 2$  dieser  $2n$  Gleichungen unabhängig voneinander und bestimmen daher  $2n - 2$  der Constanten  $\alpha$ ,  $\beta$ , etc.,  $A$ ,  $B$ , etc., indem sie zwei z. B.  $A$  und  $\alpha$  unbestimmt lassen.

Da die Lösung durch eine Reihe von Exponentialgrössen von der Gestalt  $Me^{qt}$ , worin  $q^2 = -p^2$  ist, richtig ausgedrückt wird, so kann die Determinante in (7) so angesehen werden, als habe sie in dem Fall  $p_1^2 = 0$  zwei gleiche Wurzeln. Die Theorie gleicher Wurzeln in Differentialgleichungen führt sofort zu den oben für  $\theta$ ,  $\varphi$ , etc. gegebenen Formen; siehe auch § 462.

§ 456. **Schwingungsperioden.** Aus (5) ist ersichtlich, dass jede der  $n$  Coordinaten  $\theta$ ,  $\varphi$ , etc. in einer Reihe von so vielen Sinussen ausgedrückt ist, als es besondere Werthe von  $p^2$  gibt. Wenn daher verschiedene unabhängige Wege existiren, auf welchen sich das System bewegen kann, so hat man ebensoviele Schwingungsperioden. Sie sind offenbar gleich  $\frac{2\pi}{p_1}$ ,  $\frac{2\pi}{p_2}$ , etc. Im Allgemeinen brauchen wir nur diese Schwingungsperioden und nicht die specielle Lage, welche das System in jedem Augenblick einnimmt. In diesem Fall kann man in jedem Problem alle andern Stufen der Entwicklung weglassen und die Determinantengleichung sofort aufstellen. Man verfährt dann nach folgender Regel. *Man entwickle die Kräftefunction  $U$  und die lebendige Kraft  $T$  in aufsteigenden Potenzen der Coordinaten  $\theta$ ,  $\varphi$ , etc. und ihrer Differentialquotienten  $\theta'$ ,  $\varphi'$ , etc. und scheide dabei alle Potenzen, die höher als die zweite sind, aus. Indem man nun die Accente in dem Ausdruck für  $T$  weglässt und nur das quadratische Glied in  $U$  beibehält, setze man die Determinante von  $p^2 T + U$  gleich Null. Die Wurzeln der so gebildeten Gleichungen liefern die gesuchten Werthe von  $p$ .*

Die Art, wie diese Regel in Verbindung mit der Methode der unbestimmten Multiplicatoren anzuwenden ist, wird im zweiten Band behandelt.

§ 457. Die Lage des Systems. Soll auch die Lage des Systems zu jeder beliebigen Zeit gefunden werden, so müssen die Werthe der Integrationsconstanten bestimmt werden. Aus den Gleichungen (6) geht hervor, dass die Verhältnisse von  $M, N, P$ , etc. für irgend ein specielles trigonometrisches Glied in der Lösung (5) dieselben sind, wie die Verhältnisse der Unterdeterminanten der Elemente einer beliebigen Zeile in der Lagrange'schen Determinante (7). In diese Unterdeterminanten substituirt man selbstverständlich den Werth von  $p^2$ , welcher zu dem speciellen trigonometrischen Glied, um welches es sich handelt, gehört. Auf diese Art werden die Coefficienten aller trigonometrischen Glieder durch diejenigen ausgedrückt, welche in der Reihe für *eine* Coordinate vorkommen.

Die Resultate kann man symmetrisch auf folgende Art anordnen. Es seien  $I_1(p), I_2(p)$ , etc.,  $I_n(p)$  die  $n$  Unterdeterminanten, als Functionen von  $p$  angesehen, irgend einer Horizontal- oder Verticalreihe der Lagrange'schen Determinante. Die Lösung (5) wird dann

$$\theta = \alpha + L_1 I_1(p_1) \sin(p_1 t + \varepsilon_1) + L_2 I_1(p_2) \sin(p_2 t + \varepsilon_2) + \text{etc.},$$

$$\varphi = \beta + L_1 I_2(p_1) \sin(p_1 t + \varepsilon_1) + L_2 I_2(p_2) \sin(p_2 t + \varepsilon_2) + \text{etc.},$$

$$\psi = \gamma + L_1 I_3(p_1) \sin(p_1 t + \varepsilon_1) + L_2 I_3(p_2) \sin(p_2 t + \varepsilon_2) + \text{etc.},$$

etc. = etc.,

worin  $L_1, L_2, \dots, L_n$  willkürliche  $n$  Constante bezeichnen, welche die Verhältnisse von  $M, N$ , etc. zu den entsprechenden Unterdeterminanten darstellen. Die Lösung muss etwas modificirt werden, wenn irgend ein Werth von  $p$  Null wird (§ 462) oder alle Unterdeterminanten in einer Columne gleich Null sind. Diese Fälle werden im zweiten Band besprochen werden.

Die Werthe der  $2n$  Constanten  $L_1 \dots L_n$  und  $\varepsilon_1 \dots \varepsilon_n$  müssen aus den Anfangswerthen der  $n$  Coordinaten  $\theta, \varphi$ , etc. und ihrer Geschwindigkeiten  $\theta', \varphi'$ , etc. ermittelt werden. Zu diesem Zweck setze man  $L_m \cos \varepsilon_m = A_m$  und  $L_m \sin \varepsilon_m = B_m$ . Entwickelt man die trigonometrischen Glieder, so erhält man  $2n$  lineare Gleichungen, aus welchen sich die  $2n$  Constanten  $A_1 \dots A_n, B_1 \dots B_n$  ergeben. Wenn  $n$  gross ist, so wird die Auflösung dieser  $2n$  linearen Gleichungen langwierig. In vielen Fällen lässt sich jedoch die Methode der Multiplikatoren anwenden.

Ist die Anzahl der Coordinaten bedeutend, so kann auch die Lagrange'sche Determinante selbst unhandlich werden. Man kann dann die Coordinaten zuweilen so behandeln, dass die Benutzung der Rechnung mit endlichen Differenzen möglich wird. Ist die Anzahl der Coordinaten unendlich gross, wie z. B. bei einer schwingenden Saite, so nimmt die so erhaltene Gleichung die Grenzform einer partiellen Differentialgleichung an. In andern Fällen kann es auch vorkommen, dass zwar nur einige Wurzeln der Lagrange'schen Gleichung bekannt sind, die entsprechenden Coefficienten in der Lösung sich aber doch ermitteln lassen.

Die Lagrange'sche Determinante liefert die Grenzwerte der Perioden, wenn die Schwingungsweiten unendlich klein sind. Man kann zeigen, dass die kleinen vernachlässigten Glieder die Lagrange'schen Perioden manchmal bedeutend modificiren. Ein Beispiel davon kommt in der Mondtheorie vor. Diese und ähnliche Schwierigkeiten behalten wir uns für den zweiten Band vor.

Beisp. Man zeige, dass, wenn die Determinante (7) Null ist, die Verhältnisse der Unterdeterminanten der Elemente irgend einer Zeile den Verhältnissen der Unterdeterminanten der Elemente irgend einer andern Zeile gleich sind.



§ 458. Beispiele zu der Lagrange'schen Methode. Die folgenden Beispiele sollen zeigen, wie sich die Lagrange'sche Methode zur Ermittlung kleiner Schwingungen eines Systems verwenden lässt. Werden nur die Perioden gesucht, so kann man das Verfahren so zusammenfassen: *Man bilde die Glieder von  $T$  und  $U$ , die von den Quadraten kleiner Grössen abhängen und setze die Determinante von  $p^2 T + U$  gleich Null.*

Beisp. 1. Ein Körper von der Masse  $m$  und Länge  $2a$  ist mittelst eines Fadens  $OA$  von der Länge  $l$ , der an einem Punkt  $A$  des Körpers befestigt ist, an einem festen Punkt  $O$  aufgehängt und  $B$  ist sein Schwerpunkt. Der Körper schwingt unter dem Einfluss der Schwere in einer verticalen Ebene; man finde die Bewegung.

Sind  $\theta, \varphi$  die Winkel, welche der Faden  $OA$  und der Radius  $AB$  mit der Verticalen machen und verfährt man wie in § 147, so findet man bei Vernachlässigung der Potenzen von  $\theta, \varphi$ , welche höher als die zweite sind,

$$T = \frac{1}{2} m \{ l^2 \theta'^2 + 2al\theta'\varphi' + (k^2 + a^2)\varphi'^2 \},$$

$$U = U_0 - \frac{1}{2} mg(l\theta^2 + a\varphi^2)$$

und wenn man die Determinante von  $p^2 T + U$  bildet und durch den gemeinschaftlichen Factor  $ml$  dividirt,

$$\begin{vmatrix} p^2 l - g, & ap^2 \\ alp^2, & p^2(k^2 + a^2) - ag \end{vmatrix} = 0.$$

Daher

$$k^2 lp^4 - (al + k^2 + a^2)gp^2 + ag^2 = 0.$$

Nimmt man die Unterdeterminanten der zweiten Horizontalreihe und bezeichnet mit  $p_1^2, p_2^2$  die Wurzeln der quadratischen Gleichung, so erhält man

$$\theta = -L_1 a p_1^2 \sin(p_1 t + \varepsilon_1) - L_2 a p_2^2 \sin(p_2 t + \varepsilon_2)$$

$$\varphi = L_1 (p_1^2 l - g) \sin(p_1 t + \varepsilon_1) + L_2 (p_2^2 l - g) \sin(p_2 t + \varepsilon_2).$$

Wenn die Wurzeln der Determinantengleichung gleich sind, lässt sich erwarten, dass die Lösung eine andere Form annimmt. Da die Determinante für  $p^2 = \pm \infty$  positiv und für  $p^2 = g/l$  negativ ist, so sind die Wurzeln durch den letzteren Werth von  $p^2$  getrennt und daher, wenn sie gleich sind, durch  $p^2 = g/l$  gegeben. Da alsdann der Determinantengleichung nur genügt werden kann, wenn auch  $ap^2$  Null ist, so sind die Wurzeln nur dann gleich, wenn  $a = 0$ . Wenn aber  $a = 0$  ist, so sieht man leicht ein, dass die Wurzeln nicht gleich sein können.

Wird der Faden an den Mittelpunkt eines gleichförmigen Stabes befestigt, so ist  $a = 0$  und  $k^2$  endlich. In diesem Fall ist die eine Wurzel der Lagrange'schen Determinante Null, nämlich  $p_2^2 = 0$ , während die andere  $p_1^2 = g/l$  ist. Soll man auch die Lage des Systems finden, so hat man

$$T = \frac{1}{2} m (l^2 \theta'^2 + k^2 \varphi'^2), \quad U = U_0 - \frac{1}{2} mgl\theta^2.$$

Die Lagrange'schen Gleichungen sind daher

$$l\theta'' + g\theta = 0, \quad \varphi'' = 0,$$

hien

$$\theta = L \sin(p_1 t + \varepsilon), \quad \varphi = \beta + Bt,$$

worin  $L, \varepsilon, \beta, B$  die vier willkürlichen Constanten sind. Der Punkt  $A$  schwingt daher wie ein einfaches Pendel, während sich der Stab mit gleichförmiger Winkelgeschwindigkeit um  $A$  dreht.

Wird der Faden an das Ende eines Stabes befestigt, so lässt sich zeigen, dass das Verhältniss der Perioden nicht zwischen  $2 \pm \sqrt{3}$  liegen kann.

Beisp. 2. Zwei schwere Punkte von den Massen  $M$  und  $m$  sind an einen Faden gebunden und an einem festen Punkt  $O$  aufgehängt. Die Längen  $OM$ ,  $Mm$  des Fadens werden mit  $a$  bez.  $b$  bezeichnet. Wenn die Punkte kleine seitliche Schwingungen machen, die beiden Schwingungsperioden zu finden und zu zeigen, dass sie nicht gleich sein können. Man zeige auch, dass die eine Periode das Doppelte der andern ist, wenn  $4(M+m)(a+b)^2 = 25Mab$  ist.

Es ist manchmal von Wichtigkeit, die Perioden eines schwingenden Systems derart commensurabel zu machen, dass sich die Bewegung in einem Intervall, welches das kleinste gemeinschaftliche Vielfache der verschiedenen Perioden ist, beständig wiederholt. So kann das System z. B. den Zweck haben, die Zeit wie ein Pendel anzugeben oder einen bestimmten Ton hervorzubringen.

Beisp. 3. Ein Massenpunkt kann frei auf einem glatten kreisförmigen Draht gleiten, der an einem festen Punkt auf seinem Umfang aufgehängt ist. Das System befindet sich unter der Wirkung der Schwere im Gleichgewicht; eine kleine Geschwindigkeit wird dem Massenpunkt in der Richtung der Tangente an den Kreis mitgetheilt; man untersuche die sich ergebenden kleinen Schwingungen und zeige, dass die Perioden durch

$$p^4 - \frac{2m+3M}{2M} \frac{g}{a} p^2 + \frac{m+M}{2M} \left(\frac{g}{a}\right)^2 = 0$$

gegeben sind, worin  $m$ ,  $M$  die Massen des Punktes und des Kreises und  $a$  der Radius des Kreises sind. Man zeige auch, wie die Integrationsconstanten zu bestimmen sind.

Beisp. 4. Eine glatte dünne Kugelschale von der Masse  $M$  und dem Radius  $a$  ruht auf einer glatten schiefen Ebene und ist mittelst eines elastischen Fadens an einem Stift befestigt, welcher denselben Abstand von der Ebene, wie das Centrum der Kugel, hat, während ein Punkt von der Masse  $m$  auf der inneren Fläche der Schale liegt. In der Gleichgewichtslage ist der Faden der Ebene parallel; man finde die Schwingungszeiten des Systems, wenn es in einer verticalen Ebene leicht verrückt wird und beweise, dass der von dem Massenpunkt durchlaufene Bogen und die von dem Centrum der Schale beschriebene Strecke, von ihren Gleichgewichtslagen aus gerechnet, immer gleich sein können, wenn

$$(M + m + m \cos \alpha) gl = Ea(1 + \cos \alpha)$$

ist, worin  $E$  den Elasticitätscoefficienten des Fadens,  $l$  seine natürliche Länge und  $\alpha$  die Neigung der Ebene gegen den Horizont bedeutet. Caius Coll.

Beisp. 5. Ein dreibeiniger Tisch wird hergestellt, indem man eine schwere dreieckige Lamelle auf drei gleiche Beine setzt und dabei die Eckpunkte der Lamelle zu Stützpunkten macht; wenn die Beine gleichmässig zusammendrückbar sind und ihre Gewichte vernachlässigt werden, dann besteht das System gleichzeitiger Schwingungen der oberen Fläche aus einer verticalen und zwei Winkelschwingungen um zwei in ihrer Ebene liegende zueinander rechtwinklige Axen und die Perioden der Winkelschwingungen sind der der Verticalschwingungen gleich und das Doppelte derselben. St. Johns Coll. 1880.

Beisp. 6. Ein Stab  $AB$  von der Masse  $m$  und der Länge  $2a$  wird an zwei gleichen elastischen Seilen  $AC$ ,  $BD$  aufgehängt, welche keine merkbare Masse haben und deren unausgedehnte Länge  $l_0$  ist.  $C$  und  $D$  sind feste Punkte in derselben Horizontalen und  $CD = 2a$ . Man untersuche die kleine Schwingung des Stabes, wenn er aus seiner Gleichgewichtslage in der durch  $CD$  gehenden Verticalene verrückt wird und zeige, dass die Perioden der horizontalen und der

verticalen Schwingung des Schwerpunktes des Stabes und der Rotationsschwingung denjenigen von Pendeln gleich sind, deren Länge  $l, l - l_0$  bez.  $\frac{1}{3}(l - l_0)$  ist, unter  $l$  die Länge eines jeden Seils verstanden, wenn das System sich im Gleichgewicht befindet. Math. Tripos.

Beisp. 7. Drei gleiche Massenpunkte, die sich gegenseitig nach dem Newton'schen Gesetz anziehen, sind gezwungen, sich wie Rosenkranzperlen auf den glatten Seiten eines gleichseitigen Dreiecks zu bewegen. Im Gleichgewichtszustand befinden sie sich auf den Mittelpunkten der Seiten. Man beweise, dass das Gleichgewicht nur dann *stabil* ist, wenn die Anfangsverrückungen und die Anfangsgeschwindigkeiten gleich sind und finde, wenn sie gleich sind, die Zeit einer kleinen Schwingung.

Beisp. 8. Drei gleiche Massenpunkte, welche sich gegenseitig mit gleichen Kräften, die in allen Abständen constant bleiben, anziehen, können frei auf drei gleichen sich nicht schneidenden Kreisen vom Radius  $r$  gleiten, deren Mittelpunkte sich in den Ecken  $A, B, C$  eines gleichseitigen Dreiecks befinden und die in der Ebene des Dreiecks liegen. Man zeige, dass, wenn die Massenpunkte kleine Schwingungen um ihre Gleichgewichtslagen ausführen, zwei der Perioden gleich  $2\pi/p$  und eine dritte  $2\pi/p'$  ist, wobei

$$p^2 = \frac{F\sqrt{3}}{4r} \frac{4R - 3r}{R - r}, \quad p'^2 = \frac{F\sqrt{3}}{r} \frac{R}{R - r},$$

$R$  der Radius des dem Dreieck  $ABC$  umschriebenen Kreises und  $F$  das Verhältniss der Anziehungskraft zwischen irgend zwei Punkten zu der Masse der beiden ist.

Beisp. 9. Ein schwerer Körper, dessen Schwerpunkt  $H$  ist, hängt an einem festen Punkt  $O$ . Ein zweiter Körper, dessen Schwerpunkt  $G$  ist, wird an dem ersten in einem in der Verlängerung von  $OH$  befindlichen Punkt  $A$  befestigt. Das System schwingt frei in einer verticalen Ebene; man beweise, dass die Perioden durch die quadratische Gleichung

$$\{(MK^2 + ma^2)p^2 - (Mh + ma)g\} \{k^2p^2 - bg\} = ma^2b^2p^4$$

gegeben sind, worin  $MK^2$  und  $mk^2$  die Trägheitsmomente der beiden Körper für  $O$  bez.  $A$  bedeuten. Ferner ist  $OH = h$ ,  $OA = a$ ,  $AG = b$ . Was wird aus diesen Perioden, wenn (1) der obere, (2) der untere Körper sich auf ein kurzes Pendel von geringer Masse reducirt? Der erste Fall kommt vor, wenn die Befestigung eines Pendels an seinem Aufhängepunkt nicht vollständig starr ist, und das Pendel daher so angesehen werden kann, als hänge es an einem kurzen Faden; der zweite, wenn ein kleiner Theil der Masse eines Pendels lose ist und bei jeder Schwingung sich hin- und herbewegt.

§ 459. **Hauptcoordinaten.** *Man erkläre, was unter den Hauptcoordinaten eines dynamischen Systems in der Nähe einer Gleichgewichtslage zu verstehen ist.*

Wenn man zwei homogene quadratische Functionen einer Anzahl von Variablen hat, von denen die eine ihrem Wesen nach für alle Werthe der Variablen positiv ist, so kann man bekanntlich beide Ausdrücke durch eine reelle lineare Transformation der Variablen von den Gliedern befreien, welche die Producte der Variablen enthalten, und auch die Coefficienten der Quadrate in der positiven Function einzeln der Einheit gleich machen. Wenn die Coordinaten  $\theta, \varphi$ , etc. durch die Gleichungen

$$\left. \begin{aligned} \theta &= \lambda_1 \xi + \lambda_2 \eta + \text{etc.} \\ \varphi &= \mu_1 \xi + \mu_2 \eta + \text{etc.} \\ \text{etc.} &= \text{etc.} \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (9)$$

in  $\xi, \eta$ , etc. umgewandelt werden, so ändern sich auch  $\theta', \varphi'$ , etc. durch dieselbe Umformung in  $\xi', \eta'$ , etc. um. Auch die lebendige Kraft ist ihrem Wesen nach positiv. Daraus folgt, dass man die doppelte lebendige Kraft und die Kräftefunction durch geeignete Wahl der neuen Coordinaten in den Formen

$$\left. \begin{aligned} 2T &= \xi'^2 + \eta'^2 + \zeta'^2 + \dots \\ 2(U - U_0) &= 2b_1 \xi + 2b_2 \eta + \text{etc.} + b_{11} \xi^2 + b_{22} \eta^2 + \dots \end{aligned} \right\}$$

ausdrücken kann.

Diese neuen Coordinaten  $\xi, \eta$ , etc. heissen die *Hauptcoordinaten* des dynamischen Systems. Man hat ihnen auch viele andere Namen gegeben, wie *harmonische, einfache* und *normale* Coordinaten.

Gewöhnlich wird angenommen, wenn nicht das Gegentheil festgesetzt ist, dass die Hauptcoordinaten so gewählt sind, dass sie in der Gleichgewichtslage verschwinden. Es ist dann  $b_1 = 0, b_2 = 0$ , etc. = 0

§ 460. Wird ein dynamisches System auf Hauptcoordinaten bezogen, die nicht nothwendiger Weise in der Gleichgewichtslage verschwinden, so nehmen die Lagrange'schen Gleichungen die Gestalt

$$\xi'' - b_{11} \xi = b_1, \quad \eta'' - b_{22} \eta = b_2, \quad \text{etc.} = \text{etc.}$$

an, so dass die ganze Bewegung durch

$$\xi = a + E \sin(p_1 t + \varepsilon_1), \quad \eta = b + F \sin(p_2 t + \varepsilon_2), \quad \text{etc.}$$

gegeben ist, worin  $E, F$ , etc.,  $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ , etc. willkürliche Constante sind, die durch die Anfangsbedingungen bestimmt werden,  $p_1^2 = -b_{11}$ ,  $p_2^2 = -b_{22}$ , etc. ist und  $a, b$ , etc. die Werthe von  $\xi, \eta$ , etc. im Gleichgewichtszustand sind.

Durch Substitution der trigonometrischen Werthe von  $\xi, \eta$ , etc. in die oben gegebenen Transformationsformeln kommt man offenbar wieder auf die Gleichungen (5) des § 455 zurück, in welchen die allgemeinen Coordinaten  $\theta, \varphi$ , etc. als trigonometrische Functionen von  $t$  ausgedrückt wurden. Man erhält daher eine Reihe von Hauptcoordinaten, nämlich  $\xi_1, \eta_1$ , etc., die in der Gleichgewichtslage verschwinden, wenn man

$$\left. \begin{aligned} \theta &= \alpha + M_1 \xi_1 + M_2 \eta_1 + \dots \\ \varphi &= \beta + N_1 \xi_1 + N_2 \eta_1 + \dots \\ \text{etc.} &= \text{etc.} \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (10)$$

setzt, worin die Werthe von  $\alpha, \beta$ , etc.,  $M_1, M_2$ , etc.,  $N_1, N_2$ , etc. auf die in § 455 erklärte Art ermittelt werden können. Alle übrigen

Reihen von Hauptkoordinaten lassen sich aus diesen dadurch ableiten dass man

$$\xi = a + E\xi_1, \quad \eta = b + F\eta_1, \text{ etc.}$$

nimmt.

Sind die Anfangsbedingungen derart, dass während der ganzen Bewegung alle Hauptkoordinaten mit Ausnahme von einer constant bleiben, so sagt man, das System vollführe eine *Haupt- oder harmonische Schwingung*. Es vollführt eine *zusammengesetzte Schwingung*, wenn zwei oder mehr variabel sind. Man kann daher behaupten, dass jede mögliche Schwingung des Systems um eine Gleichgewichtslage durch die Lagrange'sche Methode in ihre einfachen Schwingungen oder die Componenten der Schwingung *zerlegt* wird.

Daraus geht der wichtige Satz hervor, dass *das Gleichgewicht eines Systems, wenn es für die Hauptschwingungen stabil ist, dies für alle Schwingungen ist.*

Das Theorem, dass die allgemeinen Schwingungen eines Systems sich in gewisse Grundschwingungen zerlegen lassen, die unabhängig voneinander gleichzeitig bestehen können, heisst manchmal *das Princip von der gleichzeitigen Existenz kleiner Schwingungen*.

§ 461. Es ist offenbar wichtig, die Besonderheiten einer Hauptschwingung, an welchen man sie auch ohne alle mathematischen Symbole erkennen kann, zu bestimmen. Diese physikalischen Besonderheiten sind:

1. Die Bewegung wiederholt sich in constanten Intervallen, d. h. nach einem solchen Intervall nimmt das System wieder dieselbe Lage im Raum ein und bewegt sich genau in derselben Weise, wie zuvor.

2. Das System geht zweimal bei jeder vollständigen Schwingung durch die Gleichgewichtslage. Denn, nimmt man  $\xi$  zur variablen Coordinate, so sieht man, dass  $\xi - a$  zweimal verschwindet, wenn sich  $p_1 t$  um  $2\pi$  vermehrt.

3. Die Geschwindigkeit eines jeden Massenpunktes des Systems wird in demselben Augenblick Null und dies tritt bei jeder vollständigen Schwingung zweimal ein. Denn  $\frac{d\xi}{dt}$  verschwindet zweimal, während  $p_1 t$  sich um  $2\pi$  vermehrt. Die Ruhelagen kann man *die äussersten Lagen* der Schwingung nennen.

4. Das System werde auf beliebige Coordinaten  $\theta, \varphi$ , etc. bezogen, deren Gleichgewichtswerthe, wie zuvor,  $\alpha, \beta$ , etc. sind. Wenn das System eine Hauptschwingung ausführt, so sind diese sämmtlich variabel, aber die Verhältnisse von  $\theta - \alpha, \varphi - \beta$ , etc. zueinander während der ganzen Bewegung constant<sup>1)</sup>. Denn aus den Transformationsformeln (10) ist ersichtlich, dass, wenn  $\eta_1, \xi_1$ , etc. sämmtlich Null sind und nur  $\xi_1$  variirt,

$$\frac{\theta - \alpha}{M_1} = \frac{\varphi - \beta}{N_1} = \text{etc.} = \xi_1 \text{ ist.}$$

1) Diese Eigenschaft wird von Lagrange erwähnt, der bei verschiedenen Gelegenheiten Hauptkoordinaten benutzt, wenn er auch den Namen nicht gebraucht.

Diesen Satz kann man auch in Worte fassen, indem man sagt, jeder Punkt des Systems befinde sich in demselben *Bewegungsstadium*.

Die Perioden der verschiedenen Hauptschwingungen können sämtlich ein kleinstes gemeinschaftliches Vielfache haben. Tritt dieser Fall ein, dann wiederholt sich der Anfangszustand immer wieder in Intervallen, die dem kleinsten gemeinschaftlichen Vielfachen gleich sind, wobei es durchaus gleichgültig ist, welche kleine Anfangsstörung dem System gegeben wird. Wenn dagegen keine zwei Schwingungsperioden commensurabel sind, so wiederholt sich der Anfangszustand nur dann, wenn das System eine Hauptschwingung ausführt. *Es gibt daher zwei Arten von schwingenden Systemen*, solche, bei welchen die Bewegung sich beständig in constanten Intervallen wiederholt, wie man auch den Körper in Bewegung setzen mag, und solche, bei welchen dies nur dann eintritt, wenn dem Körper der richtige Anfangsanstoss gegeben wird. Dies ist vielleicht eine der Ursachen, warum *einzelne Körper wohlklingender sind als andere*; denn, wenn das Intervall so kurz ist, dass das in der Luft entstehende Geräusch ein musikalischer Ton wird, so bringt ein solcher Körper, wenn er beliebig getroffen wird, einen bestimmten Ton, statt ein Gemisches getrennter Töne, hervor.

Um die Methode zur Ermittlung der Hauptschwingungen eines Systems zu erläutern, wollen wir auf das früher in § 458 gelöste Beispiel (1) zurückgreifen. Es gibt zwei Hauptschwingungen, die durch

$$\left. \begin{aligned} \theta_1 &= -L_1 a p_1^2 \sin(p_1 t + \varepsilon_1) \\ \varphi_1 &= L_1(p_1^2 l - g) \sin(p_1 t + \varepsilon_1) \end{aligned} \right\} \quad \left. \begin{aligned} \theta_2 &= -L_2 a p_2^2 \sin(p_2 t + \varepsilon_2) \\ \varphi_2 &= L_2(p_2^2 l - g) \sin(p_2 t + \varepsilon_2) \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

gegeben sind. Bei jeder Hauptschwingung schwingt daher sowohl der Faden als der Körper. Man erkennt diese beiden Schwingungen daran, dass der Faden  $OA$  und der Radius  $AB$  zugleich vertical werden, beide zugleich ihre äussersten Lagen erreichen u. s. f.

Beisp. 1. Eine Reihe von  $n$  schweren Massenpunkten wird in den Punkten  $A, B$ , etc. an einem leichten Faden befestigt und das Ganze an einem festen Punkt  $O$  aufgehängt. Wenn das System eine Hauptschwingung ausführt, so schneidet jeder Theil des Fadens, sofern er verlängern wird, die durch  $O$  gehende Verticale in einem während der Bewegung festliegenden Punkt.

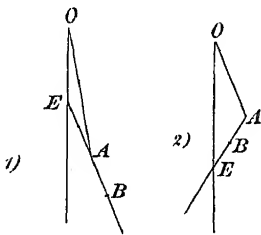
[Kelvin's Theorem, *Popular lectures* etc. 1867.]

Es seien  $\theta, \varphi, \psi$ , etc. die Neigungen der Theile  $OA, AB, BC$ , etc. des Fadens gegen die Verticale;  $OA = a, AB = b$ , etc. Man betrachte die Bewegung irgend eines Punktes  $P$  eines der Fäden z. B.  $BC$  und es sei  $BP = z$ . Der Abstand  $x$  des Punktes  $P$  von der durch  $O$  gehenden Verticalen ist  $x = a\theta + b\varphi + z\psi$ . Bei einer Hauptschwingung stehen  $\theta, \varphi, \psi$  in constantem Verhältniss zu einander; wenn daher  $z$  so gewählt wird, dass  $x$  in einem Moment gleich Null wird, so ist es immer gleich Null.

Der Satz gilt auch dann, wenn  $OA, AB$ , etc. durch Gelenke verbundene Stäbe sind oder beliebige starre Körper, die auf die in Beisp. 9, § 458 beschriebene Art aneinander befestigt sind.

Wir wollen davon auf Beisp. 1, § 458 Anwendung machen. Ist  $E$  der feste Punkt im Radius  $AB$ ,  $z$  sein Abstand von  $A$ , positiv in der Richtung nach  $B$  genommen, so ist  $l\theta + z\varphi = 0$ . Substituiert man für  $\theta/\varphi$  das Verhältniss der Unterdeterminanten der zweiten Horizontalreihe der Lagrange'schen Deter-

minante (d. h. die Verhältnisse in den Gleichungen (1) dieses Paragraphen), so erhält man  $lap^2 = z(lp^2 - g)$ . Dies bestimmt den Werth von  $z$ , der den beiden Perioden  $p^2 = p_1^2, p^2 = p_2^2$  entspricht. Die beiden Hauptschwingungen sind in der nebenstehenden Figur dargestellt, bei welcher  $z = AE$  negativ in 1), positiv in 2) ist. Die thatsächliche Schwingung findet man durch Superposition dieser beiden Bewegungsarten.



Es ist von Interesse, zu sehen, in welcher Weise die eine Hauptschwingung verschwindet, wenn entweder die Länge  $l$  des Fadens oder die linearen Dimensionen  $a$  des Körpers ohne Grenze abnehmen. Aus der Lagrange'schen Determinante ergibt sich, dass in beiden Fällen ein Werth von  $p^2$  sehr gross wird, so dass die Periode der verschwindenden Schwingung sehr kurz ist. Die sichtbare Bewegung reducirt sich daher auf eine harmonische Schwingung, die in einer endlichen Zeit vollführt wird, welche durch den andern Werth von  $p^2$  gegeben ist und ausserdem auf eine gleichzeitige zitternde Bewegung.

Die Werthe von  $lp^2$  und  $ap^2$ , wie sie die Lagrange'sche Determinante gibt, werden, wenn  $l$  bez.  $a$  verschwindet und  $p^2$  unendlich gross wird, zuletzt  $(k^2 + a^2)g/k^2$  und  $a^2g/k^2$ . Die entsprechenden Werthe von  $z$  sind die positive Grösse  $(k^2 + a^2)/a$  und Null. Die verschwindende Schwingung ist in Figur 2) dargestellt; die Punkte  $O$  und  $E$  liegen fest und die Ausdehnung der zitternden Bewegung wird geometrisch immer geringer, wenn entweder  $OA$  oder  $AE$  unbegrenzt klein wird. Bei der andern nicht verschwindenden Schwingung fällt  $E$  schliesslich mit  $O$  zusammen.

Beisp. 2. Bei den von Borda, Cassini, Arago und Biot angestellten Experimenten, um die Länge des Sekundenpendels durch Beobachtung der Schwingungsdauer einer von einem Draht getragenen Kugel zu bestimmen, wurde stets angenommen, dass der Durchmesser der Kugel, der sich in der Ruhelage in verticaler Richtung befand, während der ganzen Schwingung in derselben Geraden mit dem Draht bleibe. Man zeige, dass die Länge des so gefundenen Sekundenpendels um  $k^4/a^2$  ihrer selbst zu kurz ist, worin  $a$  den Radius der Kugel,  $k$  den Trägheitsradius und  $l$  die Länge des Fadens angibt. Bei den Experimenten war die Kugel so klein, dass diese Correction unmerkbar blieb.

Airy, *Cambr. Trans.* Vol. III.

Bei diesen Versuchen liess es sich fast nicht vermeiden, der Kugel eine kleine Drehung um den im Gleichgewicht verticalen Durchmesser zu geben. Sieht man die Kugel und den Draht als starren Körper an, der mit der Winkelgeschwindigkeit  $n$  um den Draht rotirt, so ist nach § 268 die Schwingungsdauer eines solchen systems  $2\pi/(\mu_1 - \mu_2)$ . Substituirt man die in diesem § 268 angegebenen Werthe von  $\mu_1, \mu_2$  und setzt  $-g$  statt  $g$ , so ergibt sich leicht, dass die beobachtete Länge des Pendels nahezu um  $a^4 n^2 / 25 g l^3$  ihrer selbst zu lang ist. Dies stimmt mit dem Resultat überein, zu dem Poisson in der *Connaissance des Temps*, 1816 kam. Auch diese Correction ist unmerkbar.

Beisp. 3. Wenn  $(\theta_1, \varphi_1), (\theta_2, \varphi_2)$  die beiden Werthe von  $\theta, \varphi$  für die beiden Hauptschwingungen sind, zu beweisen, dass, in Beisp. (1), § 458,  $l\theta_1\theta_2 = -a\varphi_1\varphi_2$  ist. Wenn ferner zwei gleiche Massenpunkte  $A, B$  durch einen Faden an einem festen Punkt  $O$  aufgehängt werden, zu beweisen, dass  $2a\theta_1\theta_2 = -b\varphi_1\varphi_2$  ist, worin  $OA = a, AB = b$  gesetzt ist. Diese Beziehungen zwischen den Hauptschwingungen sind specielle Fälle, die sich aus der Methode der Multiplicatoren ergeben. (Bd. 2, § 398.)

§ 462. Gleiche Wurzeln in der Lagrange'schen Determinante. Wenn ein Theil der Wurzeln der Gleichung, welche  $p^2$  bestimmt, gleich sind, so müssen, wie aus der Theorie der linearen Differentialgleichungen

bekannt ist, entweder (1) Glieder von der Form  $(At + B) \sin pt$  in den Werthen von  $\theta$ ,  $\varphi$ , etc. auftreten, oder (2) eine Unbestimmtheit in den § 455 gegebenen Coefficienten  $M$ ,  $N$ , etc. bestehen. Bezieht man das System auf Hauptkoordinaten, die in dem Gleichgewichtszustand verschwinden, so ist nach § 460 die erste Alternative im Allgemeinen ausgeschlossen. Wenn zwei Werthe von  $p^2$  gleich sind, z. B.  $b_{11}$  und  $b_{22}$ , so haben die trigonometrischen Ausdrücke für  $\xi$  und  $\eta$  gleiche Perioden, Glieder aber, welche  $t$  als Factor enthalten, treten nicht auf. *Die physikalische Besonderheit dieses Falles besteht darin, dass das System mehr als eine Reihe von Haupt- oder harmonischen Schwingungen besitzt.* Denn offenbar lassen sich  $\xi$ ,  $\eta$  mit anderen Coordinaten  $\xi_1$ ,  $\eta_1$ , die  $\xi^2 + \eta^2 = \xi_1^2 + \eta_1^2$  machen, derart vertauschen, dass die übrigen Coordinaten  $\xi$ , etc. unverändert bleiben, ohne Glieder, welche die Producte der Coordinaten enthalten, in die Ausdrücke für  $T$  oder  $U$  einzuführen. So kann man z. B.

$$\xi = \xi_1 \cos \alpha - \eta_1 \sin \alpha \quad \text{und} \quad \eta = \xi_1 \sin \alpha + \eta_1 \cos \alpha$$

setzen, worin  $\alpha$  einen durchaus beliebigen Werth hat. Die neuen Grössen  $\xi_1$ ,  $\eta_1$ ,  $\xi$ , etc. sind offenbar der Definition in § 459 entsprechend Hauptcoordinaten.

Zu beachten ist der wichtige Fall, in welchem ein oder zwei Werthe von  $p$  Null sind. Ist z. B.  $b_{11} = 0$ , so hat man  $\xi = At + B$ , worin  $A$  und  $B$  zwei unbestimmte Constante sind. Der Fall hat die physikalische Besonderheit, dass die Gleichgewichtslage, aus welcher das System gestört wird, keine isolirte ist. Denn die Gleichungen, welche die Gleichgewichtslage geben, sind  $\frac{\partial U}{\partial \xi} = 0$ ,  $\frac{\partial U}{\partial \eta} = 0$ , etc., worin  $U$  den Werth

$$2(U - U_0) = b_{11}\xi^2 + b_{22}\eta^2 + \dots$$

hat. Sie erfordern im Allgemeinen, dass  $\xi$ ,  $\eta$ , etc. sämmtlich verschwinden; ist aber  $b_{11} = 0$ , so wird ihnen für jedes beliebige  $\xi$  genügt, vorausgesetzt, dass  $\eta$ ,  $\xi$ , etc. Null sind. Jedenfalls jedoch muss  $\xi$  sehr klein sein, weil die dritten Potenzen von  $\xi$ ,  $\eta$ , etc. vernachlässigt wurden. Es folgt daraus, *dass es noch andere Gleichgewichtslagen in der unmittelbaren Nachbarschaft der gegebenen Lage gibt.* Wenn die Anfangsbedingungen der Störung nicht derart sind, dass sie die Glieder von der Form  $At + B$  zu Null machen, so kann es nöthig werden, die Glieder von höherer Ordnung zu untersuchen, um eine Annäherung an die Bewegung zu erhalten.

Diese Beweisführung beruht auf der Voraussetzung, dass die Bewegungsgleichungen die Lagrange'sche Form haben. Ist dies nicht der Fall, so kann die Existenz gleicher Wurzeln in der Fundamentaldeterminante Potenzen der Zeit ausserhalb der trigonometrischen Ausdrücke einführen. Da die Bewegung durch Einführung solcher Glieder bedeutend geändert wird, *so ist es von Wichtigkeit, von vornherein entscheiden zu können, ob sie vorhanden sind oder nicht.* Die allgemeinen Bedingungen, unter welchen keine Potenzen der Zeit bei der Auflösung eines Systems linearer Differentialgleichungen vorkommen, werden in Band 2, § 281 aufgestellt.



Beisp. 1. Ein schwerer Punkt von der Masse  $m$  ruht im Gleichgewicht im Innern eines graden glatten festen Kreiscylinders, dessen Erzeugende horizontal sind. Wenn der Punkt gestört wird, die Lagrange'schen Bewegungsgleichungen zu bilden und zu zeigen, dass bei ihrer Auflösung Glieder von der Form  $At + B$  auftreten können.

Beispiel 2. Ein rauher dünner Cylinder von der Masse  $m$  und dem Radius  $b$  kann frei im Innern eines andern dünnen Cylinders von der Masse  $M$  und dem Radius  $a$  rollen. Das ganze System wird im Gleichgewichtszustand auf eine glatte horizontale Ebene gesetzt. Es erhält eine kleine Störung; man zeige, dass  $p^3$  die drei Werthe  $p^2 = 0$ ,  $p^2 = 0$ ,  $p^2 = \frac{M+m}{2M} \frac{g}{a-b}$  hat. Man interpretire dieses Resultat. Wenn  $x$  die durchrollte Strecke,  $\varphi$  den Winkel, um welchen sich der äussere Cylinder gedreht hat, und  $\theta$  die Neigung der die Axen enthaltenden Ebene gegen die Verticale bezeichnet, zu zeigen, dass sämtliche drei Coordinaten ein gemeinschaftliches periodisches Glied haben, während sowohl  $x$  als  $\varphi$  zusätzliche unabhängige Glieder von der Form  $At + B$  haben.

Wie würden sich die Resultate ändern, wenn die horizontale Ebene vollkommen rauh wäre?

## Anfangsbewegungen.

§ 463. Man kann die Lagrange'sche Methode auch dazu benutzen, die Anfangsbewegung eines Systems zu finden, welches von einem Ruhezustand ausgeht. Siehe § 199. Wie zuvor, muss man zu Coordinaten Grössen wählen, deren höhere Potenzen verworfen werden können. Im Allgemeinen ist es am Vortheilhaftesten, sie so zu wählen, dass sie im Anfangszustand verschwinden. Man hat wie in § 454

$$2T = A_{11}\theta'^2 + 2A_{12}\theta'\varphi' + A_{22}\varphi'^2 + \text{etc.},$$

worin  $A_{11}$ , etc. Functionen von  $\theta$ ,  $\varphi$ , etc. sind. Da das System *von der Ruhe* ausgeht, so sind  $\theta$ ,  $\varphi$ , etc. im Anfang der Bewegung sämmtlich kleine Grössen. Vernachlässigt man alle Potenzen von  $\theta$ ,  $\varphi$ , etc. mit Ausnahme der niedrigsten, die vorkommen, so kann man  $A_{11}$ , etc. als Constante betrachten, deren Werthe sich dadurch ergeben, dass man für  $\theta$ ,  $\varphi$ , etc. ihre Anfangswerthe setzt.

Wir haben auch die in demselben Paragraphen gegebene Entwicklung von  $U$  nöthig, nämlich

$$2(U - U_0) = 2B_1\theta + 2B_2\varphi + \text{etc.}$$

die Anfangslage des Systems nicht dicht bei einer Gleichgewichtslage liegt, so sind die ersten Differentialquotienten von  $U$  nach  $\theta$ ,  $\varphi$ , etc. klein. Die Glieder  $B_1\theta$ ,  $B_2\varphi$ , etc. sind hier nicht kleine Grössen der zweiten Ordnung und man braucht daher die quadratischen von  $U$  nicht beizubehalten. Verfährt man genau so wie in § 54, so erhält man die Bewegungsgleichungen

$$\left. \begin{aligned} A_{11}\theta'' + A_{12}\varphi'' + \dots &= B_1 \\ A_{12}\theta'' + A_{22}\varphi'' + \dots &= B_2 \\ \text{etc.} &= \text{etc.} \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (1).$$

Mittelst dieser Gleichungen lassen sich die Anfangswerthe von  $\theta''$ ,  $\varphi''$ , etc. bestimmen.

Die Cartesischen Coordinaten  $x, y, z$  eines Punktes  $P$  des Systems kann man mittelst der geometrischen Bedingungen des Problems als Functionen von  $\theta, \varphi$ , etc. ausdrücken. (Siehe § 396.) Nimmt man z. B. an,  $x = f(\theta, \varphi, \text{etc.})$ , so ist Anfangs, da  $\theta', \varphi', \text{etc.}$  Null sind,

$$x'' = \frac{\partial f}{\partial \theta} \theta'' + \frac{\partial f}{\partial \varphi} \varphi'' + \text{etc.}$$

mit ähnlichen Ausdrücken für  $y$  und  $z$ . Die Grössen  $x'', y'', z''$  sind offenbar den Cosinussen der Anfangsrichtung der Bewegung des Punktes  $P$  proportional. Auf diese Art lässt sich die Anfangsrichtung der Bewegung eines jeden Systempunktes ermitteln.

§ 464. **Anfangskrümmungsradius.** Wie in § 200 erklärt wurde, hat man manchmal mehr als die Anfangsrichtung der Bewegung eines Punktes  $P$  des Systems nöthig. Angenommen, man brauche auch den Anfangskrümmungsradius der Bahn von  $P$ , so muss man die Werthe von  $x'', x'''$ , etc. ermitteln und sie in eine der Formeln des § 200 einsetzen. Wenn, wie zuvor,  $x = f(\theta, \varphi, \text{etc.})$  ist, so ergibt sich durch Differentiation, dass *anfänglich*

$$x'' = f_0 \theta'' + f_\varphi \varphi'' + \dots,$$

$$x''' = f_0 \theta''' + f_\varphi \varphi''' + \dots,$$

$$x^{IV} = 3(f_0 \theta''^2 + 2f_{0\varphi} \theta'' \varphi'' + \dots) + f_0 \theta^{IV} + f_\varphi \varphi^{IV} + \dots$$

ist, worin die Indices, wie gewöhnlich, die partiellen Differentialquotienten nach  $\theta, \varphi$ , etc. angeben. Ist  $y = F(\theta, \varphi, \text{etc.})$ , so existiren selbstverständlich ähnliche Ausdrücke für  $y'', \text{etc.}$  und im Raum von drei Dimensionen ebenso für  $z'', \text{etc.}$

Wenn der Punkt  $P$  so gelegen ist, dass er bei allen möglichen Bewegungen des Systems seine Bewegung nur in einer Richtung beginnen kann, so nehme man die  $x$ -Axe senkrecht zu dieser Richtung. Alsdann ist  $x'' = 0$  für alle Anfangsvariationen von  $\theta, \varphi$ , etc. Daraus folgt, dass  $f_0 = 0, f_\varphi = 0$ , etc.  $= 0$  ist. Daher wird  $x''' = 0$  und der Werth von  $x^{IV}$  hängt nur von  $\theta'', \varphi'', \text{etc.}$  und nicht von  $\theta^{IV}, \varphi^{IV}$ , etc. ab. Man braucht daher die dynamischen Gleichungen (1) nicht zu differenziren, um diese höheren Differentialquotienten zu ermitteln. Da die  $y$ -Axe der Anfangsbewegungsrichtung von  $P$  parallel ist, so ist der Werth von  $y''$  endlich. Benutzt man mithin die Formel am Ende des § 200, so ergibt sich der Anfangskrümmungsradius  $\rho$  der Bahn von  $P$

$$\rho = \frac{(F_0 \theta'' + F_\varphi \varphi'' + \dots)^2}{f_{00} \theta''^2 + 2f_{0\varphi} \theta'' \varphi'' + \dots}.$$

§ 465. Um die Sache zu vereinfachen, wollen wir annehmen, das System habe zwei Coordinaten  $\theta, \varphi$  und der Anfangskrümmungsradius der von dem Punkt  $x = f(\theta, \varphi), y = F(\theta, \varphi)$  beschriebenen Bahn werde gesucht.

Es sei

$$2T = A\theta^2 + 2B\theta\varphi' + C\varphi'^2 \quad \dots \quad (1),$$

worin  $A, B, C$  gegebene Functionen von  $\theta, \varphi$  sind. Die Lagrange'schen Gleichungen sind

$$\left. \begin{aligned} \frac{d}{dt}(A\theta' + B\varphi') - \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial \theta}(A\theta'^2 + 2B\theta\varphi' + C\varphi'^2) &= \frac{\partial U}{\partial \theta} \\ \frac{d}{dt}(B\theta' + C\varphi') - \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial \varphi}(A\theta'^2 + 2B\theta\varphi' + C\varphi'^2) &= \frac{\partial U}{\partial \varphi} \end{aligned} \right\} \quad \dots \quad (2).$$

$$A\theta'' + B\varphi'' = U_0, \quad B\theta'' + C\varphi'' = U_\varphi \quad \dots \quad (3),$$

welche die Anfangswerthe von  $\theta''$ ,  $\varphi''$  liefern. Um die Anfangswerthe von  $\theta'''$ ,  $\varphi'''$  zu finden, differenzire man (2) nach  $t$  und setze  $\theta' = 0$ ,  $\varphi' = 0$ . Offenbar erhält man  $\theta''' = 0$ ,  $\varphi''' = 0$ . Um  $\theta^{IV}$ ,  $\varphi^{IV}$  zu finden, differenzire man (2) zweimal. Beachtet man, dass für  $\theta' = 0$ ,  $\varphi' = 0$

$$\frac{d^2 P}{dt^2} = \left( \theta'' \frac{\partial}{\partial \theta} + \varphi'' \frac{\partial}{\partial \varphi} \right) P,$$

$$\frac{d^3}{dt^3} (P\theta') = \theta^{IV} P + 3\theta'' \left( \theta'' \frac{\partial}{\partial \theta} + \varphi'' \frac{\partial}{\partial \varphi} \right) P,$$

$$\frac{d^2}{dt^2} (P\theta'^2 + Q\theta'\varphi' + R\varphi'^2) = 2(P\theta''^2 + Q\theta''\varphi'' + R\varphi''^2)$$

ist, worin  $P$ ,  $Q$ ,  $R$  beliebige Functionen von  $\theta$ ,  $\varphi$  sind, so ergibt sich leicht

$$A\theta^{IV} + B\varphi^{IV} = L, \quad B\theta^{IV} + C\varphi^{IV} = M \quad \dots \quad (4).$$

Ist

$$2T_2 = A\theta''^2 + 2B\theta''\varphi'' + C\varphi''^2 \quad \dots \quad (5),$$

so erhält man  $L$  und  $M$  in der symmetrischen Form

$$\begin{aligned} L &= \left( \theta'' \frac{\partial}{\partial \theta} + \varphi'' \frac{\partial}{\partial \varphi} \right) \left( \frac{\partial U}{\partial \theta} - 3 \frac{\partial T_2}{\partial \theta''} \right) + 2 \frac{\partial T_2}{\partial \theta} \\ M &= \left( \theta'' \frac{\partial}{\partial \theta} + \varphi'' \frac{\partial}{\partial \varphi} \right) \left( \frac{\partial U}{\partial \varphi} - 3 \frac{\partial T_2}{\partial \varphi''} \right) + 2 \frac{\partial T_2}{\partial \varphi} \end{aligned} \quad \dots \quad (6).$$

Durch Ausführung der Differentiationen erhält man auch

$$L = \frac{\partial^2 U}{\partial \theta^2} \theta'' + \frac{\partial^2 U}{\partial \theta \partial \varphi} \varphi'' - 2 \frac{\partial A}{\partial \theta} \theta''^2 - \left( 3 \frac{\partial A}{\partial \varphi} + \frac{\partial B}{\partial \theta} \right) \theta'' \varphi'' - \left( 3 \frac{\partial B}{\partial \varphi} - \frac{\partial C}{\partial \theta} \right) \varphi''^2,$$

$$M = \frac{\partial^2 U}{\partial \theta \partial \varphi} \theta'' + \frac{\partial^2 U}{\partial \varphi^2} \varphi'' - \left( 3 \frac{\partial B}{\partial \theta} - \frac{\partial A}{\partial \varphi} \right) \theta''^2 - \left( 3 \frac{\partial C}{\partial \theta} + \frac{\partial B}{\partial \varphi} \right) \theta'' \varphi'' - 2 \frac{\partial C}{\partial \varphi} \varphi''^2 \quad (7).$$

Diese Werthe von  $L$ ,  $M$  enthalten nur die ersten Differentialquotienten von  $A$ ,  $B$ ,  $C$  nach  $\theta$ ,  $\varphi$  und, nachdem diese Differentiationen ausgeführt sind, hat man für  $\theta$ ,  $\varphi$  ihre Anfangswerthe  $\theta_0$ ,  $\varphi_0$  zu setzen. Daraus folgt, dass man, um die Anfangswerthe von  $\theta^{IV}$ ,  $\varphi^{IV}$  zu finden, die lebendige Kraft  $T$  in Potenzen der kleinen Grössen  $\theta - \theta_0$ ,  $\varphi - \varphi_0$  (bevor man in die Lagrange'schen Gleichungen (2) substituirt) entwickeln kann und man nur die ersten Potenzen dieser Grössen beizubehalten braucht. Da jedoch zweite Differentialquotienten von  $U$  vorkommen, so muss  $U$  bis auf die zweite Potenz kleiner Grössen berechnet werden. Dadurch, dass man  $T$  und  $U$  in Potenzen dieser kleinen Grössen entwickelt, spart man sich im Allgemeinen viele Rechnung bei der Auflösung, besonders wenn man von vornerein weiss, wie viele Potenzen beizubehalten sind. Siehe § 200.

Um den Krümmungsradius zu finden, benutze man die Formel

$$\frac{3(x''^2 + y''^2)^{\frac{3}{2}}}{\varrho} = x' y^{IV} - x^{IV} y' \quad \dots \quad (8).$$

ist

$$x'' = f_\theta \theta'' + f_\varphi \varphi'',$$

$$x^{IV} = 3(f_{\theta\theta} \theta''^2 + 2f_{\theta\varphi} \theta'' \varphi'' + f_{\varphi\varphi} \varphi''^2) + f_\theta \theta^{IV} + f_\varphi \varphi^{IV}$$

ähnlichen Ausdrücken für  $y''$  und  $y^{IV}$ . Man hat daher

$$x'' y^{IV} - x^{IV} y'' = \begin{vmatrix} f_\theta & f_\varphi \\ F_\theta & F_\varphi \end{vmatrix} (\theta'' \varphi^{IV} - \varphi'' \theta^{IV}) \\ - 3 \begin{vmatrix} f_{\theta\theta} \theta''^2 + 2f_{\theta\varphi} \theta'' \varphi'' + f_{\varphi\varphi} \varphi''^2 & f_\theta \theta'' + f_\varphi \varphi'' \\ F_{\theta\theta} \theta''^2 + 2F_{\theta\varphi} \theta'' \varphi'' + F_{\varphi\varphi} \varphi''^2 & F_\theta \theta'' + F_\varphi \varphi'' \end{vmatrix} \quad \dots \quad (9)$$

und aus (3) und (4)

$$(AC - B^2) (\theta'' \varphi^{IV} - \varphi'' \theta^{IV}) = U_\theta M - U_\varphi L \quad \dots \quad (10).$$

Die Gleichungen (8), (9), (10) bestimmen den Krümmungsradius  $\rho$  und drücken ihn durch die Anfangswerthe der Beschleunigungen  $\theta''$ ,  $\varphi''$  aus. Die letzteren werden durch die Auflösung der Gleichungen (3) bestimmt, für welche es nicht nöthig ist, die Lagrange'schen Gleichungen zu differenziren.

Ist der Punkt  $P$  so gelegen, dass er bei jeder Bewegung des Systems nur in einer Richtung seine Bewegung beginnen kann, so ist die Functionaldeterminante von  $f$ ,  $F$  in Bezug auf  $\theta$ ,  $\varphi$  Null. Das erste Glied der Gleichung (9) fehlt dann und zur Bestimmung des Krümmungsradius braucht man nicht erst  $\theta^{IV}$ ,  $\varphi^{IV}$  zu ermitteln.

§ 466. **Beispiele von Anfangsbewegungen.** Beisp. 1. Eine glatte Ebene von der Masse  $M$  kann sich frei um eine horizontale in ihr liegende und durch ihren Schwerpunkt gehende Axe drehen und der Trägheitsradius der Ebene für diese Axe ist  $k$ . Bei einer Neigung der Ebene um den Winkel  $\alpha$  gegen den Horizont wird eine Kugel von der Masse  $m$  vorsichtig auf sie gesetzt. Wenn anfänglich der Mittelpunkt der Kugel in einer durch die Axe der Ebene gehenden Verticalen liegt und wenn  $h$  seine Anfangshöhe über dieser Axe ist, zu zeigen, dass der Winkel  $\varphi$ , den die Anfangsrichtung der Bewegung des Mittelpunktes mit der Verticalen macht, durch

$$(Mk^2 + mk^2) \operatorname{tg} \varphi = Mk^2 \operatorname{cotg} \alpha$$

gegeben ist.

[Math. Tripos, 1879.]

Beisp. 2.  $n$  Stäbe von der Länge  $a_1, a_2, \dots, a_n$  sind durch Gelenke verbunden, liegen in einer Geraden und haben Anfangswinkelbeschleunigungen  $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n$  in einer Ebene. Wenn das eine Ende festliegt, zu beweisen, dass der Anfangskrümmungsradius der Bahn des freien Endes  $\frac{(\sum a \omega)^2}{\sum a \omega^2}$  ist.

[St. Johns Coll., 1881.]

Beisp. 3.  $BC$  ist der Durchmesser einer Kugel und zwei Stäbe  $AB, CD$  von derselben Länge wie  $BC$  haben Gelenke bei  $B$  und  $C$ .  $A$  wird befestigt und das System so gehalten, dass  $ABCD$  eine grade horizontale Linie ist und dann fallen gelassen. Wenn die Masse eines jeden Stabes der der Kugel gleich ist, so ist der Anfangskrümmungsradius der Bahn von  $D$  gleich  $\frac{512}{815} AB$ .

[Sir John's Coll., 1881.]

Beisp. 4. Eine Masse  $M$  ruht auf einem glatten Tisch; ein an ihr befestigter Faden geht durch ein Loch in dem Tisch und trägt an seinem andern Ende eine Masse  $m$ . Wenn  $m$  sich in einer solchen Lage in Ruhe befindet, dass seine auf das Loch als Pol und die Verticale als Anfangslinie bezogenen Polarcoordinaten  $r, \theta$  sind und dann losgelassen wird, zu beweisen, dass anfänglich

$$(M + m) r'' = mg \cos \theta, \quad r \theta'' = -g \sin \theta,$$

$$(M + m) r r^{IV} = 3mg^2 \sin^2 \theta, \quad r^2 \theta^{IV} = g^2 \sin \theta \cos \theta (M + 6m)/(M + m)$$

ist, und den Anfangskrümmungsradius der Bahn zu finden. [Coll. Ex., 1896.]

Der Anfangskrümmungsradius ergibt sich sofort, wenn man die Werthe von  $r''$  etc. in die § 200 gegebene Formel für Polarcoordinaten einsetzt.

## Die Energie als Kriterium der Stabilität.

§ 467. *Die Stabilität des Gleichgewichts.* Das Princip der Erhaltung der Energie lässt sich manchmal mit Vortheil benutzen, um zu bestimmen, ob ein System von Körpern, *die im Zustand der Ruhe sind*, sich in stabilem oder unstabilem Gleichgewicht befindet.

Das System sei in beliebiger Lage im Gleichgewicht und  $V_0$  die potentielle Energie der Kräfte in dieser Lage. Das System werde in eine der Gleichgewichtslage sehr nahe Anfangslage verrückt und habe eine sehr kleine anfängliche kinetische Energie  $T_1$  und  $V_1$  sei die potentielle Energie der Kräfte in dieser Lage. Zu irgend einer späteren Zeit seien  $T$  und  $V$  die kinetische und potentielle Energie. Nach dem Princip der Energie ist dann

$$T + V = T_1 + V_1 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1).$$

$V$  sei in der Gleichgewichtslage ein absolutes Minimum, so dass  $V$  für alle benachbarten Lagen grösser als  $V_0$  ist. Da die anfängliche gestörte Lage zu diesen benachbarten gehört, so ist  $V_1 - V_0$  eine kleine positive Grösse. Die kinetische Energie  $T$  ist aber nothwendiger Weise eine positive Grösse und da  $V > V_0$  ist, so geht aus Gleichung (1) hervor, dass  $T < T_1 + V_1 - V_0$  ist. Daher liegt während der folgenden Bewegung die lebendige Kraft zwischen Null und einer kleinen positiven Grösse und die Bewegung des Systems kann also niemals gross sein.

Da ferner  $T$  nothwendiger Weise positiv ist, so kann sich das System niemals so weit aus seiner Gleichgewichtslage entfernen, dass  $V$  grösser als  $T_1 + V_1$  wird. Die beiden Resultate lassen sich folgendermassen ausdrücken:

*Wenn ein System sich in einer Lage im Gleichgewicht befindet, in welcher die potentielle Energie der Kräfte ein Minimum oder die Arbeit ein Maximum für alle Verrückungen ist, dann erlangt das System bei einer kleinen Verrückung niemals einen grossen Betrag von lebendiger Kraft und entfernt sich niemals weit aus seiner Gleichgewichtslage. Das Gleichgewicht heisst alsdann stabil<sup>1)</sup>.*

Es wird später gezeigt werden, dass man in gewissen Fällen auf dieselbe Art bestimmen kann, ob ein gegebener Bewegungszustand ebenso wie ein Gleich-

---

<sup>1)</sup> Diesen Beweis hat Lagrange in seiner *Mécanique Analytique* auf zwei edene Arten gegeben. Bei der Form, die er im ersten Theil seines Buches *rd*  $V$  in Potenzen der Coordinaten entwickelt, die sehr klein angenommen *n*; in Section VI des zweiten Bandes macht er aber von dieser Entwicklung Gebrauch mehr und der Beweis ist fast genau so, wie er bisher im Text *n* wurde. Der Beweis im nächsten Paragraphen ist in Folge der Benutzung *u*ptcoordinaten einfacher als der Lagrange'sche. Auch Lejeune-Dirichlet *Crelle's Journal* Bd. XXXII, 1846 und in *Liouville's Journal*, Bd. XII, 1847 Beweis gegeben.

gewichtszustand stabil ist. Siehe auch den *Treatise on the Stability of motion*, Kap. VI, 1877.

§ 468. Wenn die potentielle Energie in dem Gleichgewichtszustand ein absolutes Maximum ist, so wird für alle benachbarten Lagen  $V$  kleiner als  $V_0$ . Daher ist offenbar  $T$  immer grösser als  $T_1 + V_1 - V_0$  und das System kann der Gleichgewichtslage nicht so nahe kommen, dass  $V$  grösser als  $T_1 + V_1$  wird. So weit es also die lebendige Kraft angeht, ist kein Hinderniss vorhanden, welches das System abhalten könnte, sich weit von der Gleichgewichtslage zu entfernen. Um zu bestimmen, ob es in der That der Fall ist, müssen die übrigen Bewegungsgleichungen untersucht werden.

Wenn eine Hauptschwingung existiren kann und das System im Zustand der Ruhe in eine äusserste Lage dieser Schwingung gebracht wird, so beschreibt es die vollständige Schwingung und geht daher durch die Gleichgewichtslage. Wenn jedoch  $T_1$  Null ist, so kann  $V$  nie grösser als  $V_1$  und daher niemals gleich  $V_0$  werden. Das System kann daher nicht durch die Gleichgewichtslage gehen.

Es ist nicht nöthig, diese Erörterung weiter fortzuführen, da der Gegenstand im nächsten Paragraphen eingehender besprochen wird.

§ 469. *Das Kriterium für die Stabilität lässt sich auch aus den Gleichungen ableiten, welche die kleinen Schwingungen der Systeme um eine Gleichgewichtslage bestimmen.* Wird das System auf seine Hauptcoordinaten bezogen und sind diese  $\theta, \varphi$ , etc., so hat man

$$2T = \theta'^2 + \varphi'^2 + \dots,$$

$$2(U - U_0) = b_{11}\theta^2 + b_{22}\varphi^2 + \dots,$$

worin  $b_{11}, b_{22}$ , etc. Constante sind und  $U_0$  der Werth von  $U$  in der Gleichgewichtslage ist. Nimmt man eine der Lagrange'schen Gleichungen

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \theta'} - \frac{\partial T}{\partial \theta} = \frac{\partial U}{\partial \theta}$$

als Vorbild für alle, so erhält man

$$\theta'' - b_{11}\theta = 0$$

und ähnliche Gleichungen für  $\varphi, \psi$ , etc. Ist  $b_{11}$  positiv, so liefert diese Gleichung  $\theta$  als Function reeller Exponentialgrössen und das Gleichgewicht ist für alle Störungen, die  $\theta$  alteriren, unstabil mit Ausnahme solcher, die den Coefficienten des Gliedes, welches den positiven Exponenten enthält, zu Null machen. Ist  $b_{11}$  negativ, so wird  $\theta$  durch ein trigonometrisches Glied ausgedrückt und das Gleichgewicht ist für alle Störungen, die nur  $\theta$  alteriren, stabil. Bei diesem Beweis wird vorausgesetzt, dass die Werthe von  $b_{11}, b_{22}$ , etc. nicht verschwinden.

Soll  $U$  in der Gleichgewichtslage ein Maximum für alle möglichen Verrückungen des Systems sein, so müssen  $b_{11}, b_{22}$ , etc. sämmtlich negativ werden. Bei jeder beliebigen Störung wird alsdann das System

um die Gleichgewichtslage schwingen und diese Lage stabil sein. Ist  $U$  für einen Theil der Verrückungen ein Maximum und für andere ein Minimum, so sind die Coefficienten  $b_{11}$ ,  $b_{22}$ , etc. zum Theil positiv und zum Theil negativ. Alsdann schwingt das System, wenn es in gewissen Richtungen gestört wird, um die Gleichgewichtslage und wenn die Störung in anderer Richtung geschieht, kann es sich immer weiter von der Gleichgewichtslage entfernen. Das Gleichgewicht ist daher bei allen Störungen in bestimmten Richtungen stabil, bei anderen unstabil. Ist  $U$  in der Gleichgewichtslage für alle Verrückungen ein Minimum, so sind die Coefficienten  $b_{11}$ ,  $b_{22}$ , etc. sämmtlich positiv und das Gleichgewicht mithin für Verrückungen in allen Richtungen unstabil. Man kann diese Resultate kurz so zusammenfassen:

*Das System schwingt um die Gleichgewichtslage bei allen Störungen, wenn die potentielle Energie für alle Störungen ein Minimum ist. Es schwingt bei einigen und bei anderen nicht, wenn die potentielle Energie, obwohl stationär, weder ein Maximum noch ein Minimum ist. Es schwingt bei keiner Störung, wenn die potentielle Energie für alle Verrückungen ein Maximum ist.*

Aus diesem Satz folgt, dass die Stabilität oder Unstabilität einer Gleichgewichtslage nicht von der Trägheit des Systems, sondern nur von der Kräftefunction abhängt. Man verfare so: Man gebe dem System eine hinreichende Anzahl kleiner willkürlicher Verrückungen, so dass alle möglichen Verrückungen sich aus ihnen zusammensetzen lassen, prüfe dann die von den Kräften bei diesen Verrückungen verrichtete Arbeit und bestimme daraus, ob die potentielle Energie ein Maximum, Minimum oder keins von beiden ist.

Wir haben bei diesem Beweis angenommen, dass bei der Entwicklung von  $U$  nach Potenzen von  $\theta$ ,  $\varphi$ , etc. die niedrigsten Potenzen, die nicht verschwinden, die zweiten sind. Dies braucht nicht nothwendiger Weise richtig zu sein, weil  $U$  ein Maximum oder Minimum sein kann, wenn  $\theta$ ,  $\varphi$ , etc. verschwinden, vorausgesetzt, dass die niedrigsten Potenzen, die nicht verschwinden, von grader Ordnung und derart sind, dass sie dasselbe Vorzeichen für alle Werthe von  $\theta$ ,  $\varphi$ , etc. behalten. Von dieser Unvollkommenheit ist der Beweis in § 467 frei.

Beisp. 1. Ein vollkommen freier Massenpunkt befindet sich unter der Einwirkung der Anziehung einer Anzahl festliegender Körper im Gleichgewicht. Man zeige, dass das Gleichgewicht, wenn die Anziehung dem reciproken Quadrat der Entfernung proportional ist, unstabil ist. [Earnshaw's Theorem.]

O sei die Gleichgewichtslage,  $Ox$ ,  $Oy$ ,  $Oz$  beliebige drei rechtwinklige Axen;  $V$  das Potential der Körper ist, so hat man

$$b_{11} = \frac{\partial^2 V}{\partial x^2}, \quad b_{22} = \frac{\partial^2 V}{\partial y^2}, \quad b_{33} = \frac{\partial^2 V}{\partial z^2}.$$

Der ihre Summe Null ist, so können  $b_{11}$ ,  $b_{22}$ ,  $b_{33}$  nicht sämmtlich dasselbe Zeichen haben.

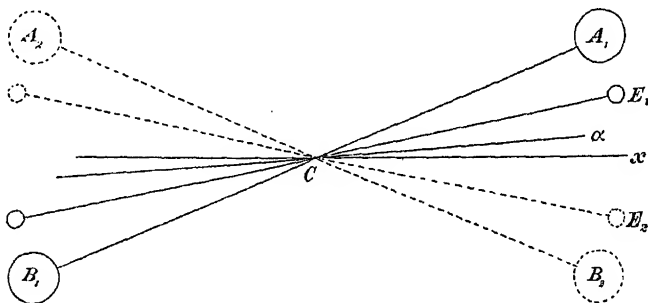
Beisp. 2. Man weise daraus nach, dass das Gleichgewicht einer Anzahl von Massenpunkten, die sich gegenseitig abstossen und in einem Gefäss eingeschlossen

sind, nur dann stabil sein kann, wenn sie sämmtlich auf der einschliessenden Fläche liegen. [Sir W. Thomson, jetzt Lord Kelvin, *Cambr. Math. Journal*, 1845. Sonderdruck VIII, S. 100.]

## Das Cavendish'sche Experiment.

§ 470. Als Beispiel für die Art, in welcher sich die Theorie der Schwingungen praktisch verwenden lässt, haben wir das Cavendish'sche Experiment gewählt. Es hat den Zweck, die Masse der Erde mit der eines gegebenen Körpers zu vergleichen. Die Art der Ausführung mittelst einer Torsionswage wurde zuerst von Rev. John Michell vorgeschlagen. Als er starb, ehe er die Versuche beginnen konnte, nahm Cavendish den Plan wieder auf und veröffentlichte das Resultat seiner Arbeiten in den *Phil. Trans.* 1798. Da die Anzahl der Versuche nur gering war, hielt man es für angezeigt, eine neue Bestimmung zu machen. Dementsprechend bewilligte die englische Regierung im Jahr 1837 die Summe von 10 000 Mark zur Bestreitung der Kosten der Experimente. Die Theorie und die analytischen Formeln lieferte Sir G. Airy, während Baily die Anordnung des Operationsplanes und die Aufgabe, die Versuche anzustellen, übernahm. Baily machte mehr als zweitausend Versuche mit Kugeln von verschiedenem Gewicht und verschiedener Grösse, die auf mannigfache Art aufgehängt waren und beschrieb sie ausführlich in den *Memoirs of the Astronomical Society*, Vol. XIV, 1834. Die Experimente wurden im Allgemeinen auf die folgende Art ausgeführt:

§ 471. Zwei kleine gleiche Kugeln werden an die Enden eines dünnen Stabes, der sogenannten Torsionswage, befestigt und der Stab selbst mit seinem Mittelpunkt  $C$  an einem Faden aufgehängt.



Zwei grosse Kugelmassen  $A, B$  werden auf den Enden eines Brettes, das sich frei um seinen Mittelpunkt  $O$  drehen kann, befestigt. Der Punkt  $O$  befindet sich vertical unter  $C$  und liegt so, dass die vier Schwerpunkte der vier Kugeln in einer horizontalen Ebene sind.



Winkel mit der Torsionswage macht, so nimmt der Stab eine Gleichgewichtslage an, die sogenannte neutrale Lage, in welcher der Faden keine Torsion hat. Sie möge in der Figur mit  $C\alpha$  dargestellt werden. Werden alsdann die Massen  $A$  und  $B$  um  $O$  in eine Lage  $B_1A_1$  gedreht, welche keinen sehr grossen Winkel mit der neutralen Lage der Torsionswage macht, so ziehen die Attractionskräfte der Masse  $A$  und  $B$  auf die Kugeln den Torsionsstab aus seiner neutralen Lage in eine neue Gleichgewichtslage, in welcher die Anziehung durch die Torsion des Fadens balancirt wird. Sie wird in der Figur durch  $CE_1$  dargestellt. Der Ausschlagwinkel  $E_1C\alpha$  und die Schwingungsdauer des Stabes um seine Gleichgewichtslage werden beobachtet.

Alsdann wird das Brett  $AB$  wieder rechtwinklig zur neutralen Lage des Stabes eingestellt und in der entgegengesetzten Richtung herumgedreht, bis die Massen  $A$  und  $B$  in eine Lage  $A_2B_2$  in der Nähe des Stabes, aber auf die entgegengesetzte Seite von  $A_1B_1$  kommen. Die Torsionswage vollführt dann Schwingungen um eine andere Gleichgewichtslage  $CE_2$  unter dem Einfluss der Anziehung der Massen und der Torsion des Fadens. Wie zuvor wird die Schwingungsdauer und der Ausschlagwinkel  $E_2C\alpha$  beobachtet.

Um die Beobachtungsfehler zu eliminiren, wird dieses Verfahren öfter wiederholt und werden die mittleren Resultate genommen. Die Lagen  $B_1A_1$  und  $A_2B_2$ , in welche die Massen abwechselnd gebracht werden, sind so genau als möglich während aller Versuche dieselben. Die neutrale Lage  $C\alpha$  des Stabes halbirt nahezu den Winkel zwischen  $B_1A_1$  und  $A_2B_2$ , da aber, wie man gefunden hat, diese neutrale Lage möglicher Weise in Folge von Aenderungen in der Torsionskraft des Fadens kleine Lagenänderungen erleidet, so darf sie bei keinem Experiment als mit der Halbirlinie des Winkels  $A_1CB_2$  zusammenfallend angesehen werden.

Es sei  $Cx$  eine im Raum festliegende Linie, von welcher aus die Winkel gemessen werden mögen.  $b$  sei der Winkel  $xC\alpha$ , den die neutrale Lage des Stabes mit  $Cx$  macht;  $A$  und  $B$  die Winkel, welche die abwechselnden Lagen  $B_1A_1$  und  $A_2B_2$  der Geraden, welche die Mittelpunkte der Massen verbindet, mit  $Cx$  bildet und es sei  $a = \frac{1}{2}(A+B)$ . Ferner möge  $x$  der Winkel sein, den die Torsionswage mit  $Cx$  zur Zeit  $t$  macht.

Nimmt man an, die Massen befänden sich in der Lage  $A_1B_1$ , so ist das Moment ihrer Anziehung auf die beiden Kugeln und den Stab um  $CO$  eine Function des Winkels zwischen dem Stab und der Linie  $A_1B_1$  allein. Es möge durch  $\varphi(A-x)$  dargestellt werden. Der ganze Apparat ist in einem hölzernen Gehäuse eingeschlossen, um ihn vor Luftzug zu bewahren. Die Anziehung dieses Gehäuses kann nicht vernachlässigt werden. Da sie bei verschiedenen Lagen des Stabes ver-

schieden sein kann, so sei ihr Moment um  $CO$  durch  $\psi(x)$  gegeben. Die Torsionskraft des Fadens ist ferner dem Winkel, um welchen er gedreht worden ist, nahezu proportional. Ihr Moment um  $CO$  sei  $E(x - b)$ .

Ist nun  $I$  das Trägheitsmoment der Kugeln und des Stabes für die Axe  $CO$ , so lautet die Bewegungsgleichung

$$I \frac{d^2 x}{dt^2} = \varphi(A - x) + \psi(x) - E(x - b).$$

Es ist ferner  $a - x$  eine kleine Grösse; sie werde mit  $\xi$  bezeichnet. Substituirt man für  $x$  und entwickelt nach dem Taylor'schen Satz in Potenzen von  $\xi$ , so ist

$$-I \frac{d^2 \xi}{dt^2} = \varphi(A - a) + \psi(a) - E(a - b) + \{\varphi'(A - a) - \psi'(a) + E\} \xi.$$

Setzt man

$$n^2 = \frac{\varphi'(A - a) - \psi'(a) + E}{I}$$

und

$$e = a + \frac{\varphi(A - a) + \psi(a) - E(a - b)}{In^2},$$

so erhält man

$$x = e + L \sin(ni + L'),$$

worin  $L$  und  $L'$  zwei beliebige Constante sind. Daraus ergibt sich, dass der Winkel, den die Torsionswage in der Gleichgewichtslage mit der  $x$ -Axe macht,  $e$  ist und die Schwingungsdauer um die Gleichgewichtslage  $2\pi/n$  beträgt.

Wir wollen annehmen, die Massen würden jetzt in die andere Lage  $A_2 B_2$  gebracht; das Moment ihrer Anziehung der Kugeln und des Stabes ist nun  $-\varphi(x - B)$ ; die Bewegungsgleichung wird daher

$$I \frac{d^2 x}{dt^2} = -\varphi(x - B) + \psi(x) - E(x - b).$$

Ist  $a = x - \xi$  und setzt man für  $B$  seinen Werth  $2a - A$ , so ergibt sich auf dieselbe Art, wie zuvor,

$$x = e' + N \sin(nt + N'),$$

worin  $n$  denselben Wert, wie oben, hat und

$$e' = a + \frac{-\varphi(A - a) + \psi(a) - E(a - b)}{In^2}$$

ist.

In diesen Ausdrücken sind die Anziehung  $\psi(a)$  des Gehäuses, der Torsionscoefficient  $E$  und der Winkel  $b$  unbekannt. Sie verschwinden aber sämmtlich, wenn man  $e'$  von  $e$  abzieht. Man hat

$$\frac{\varphi(A - a)}{I} = \frac{e - e'}{2} \cdot \left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 \quad \dots \quad (A),$$

worin  $T$  die Zeit einer vollständigen Schwingung der Torsionswage um eine der beiden gestörten Gleichgewichtslagen bedeutet. Auf diese

Art lässt sich die Anziehung  $\varphi(A - a)$  ermitteln, wenn der Winkel  $e - e'$  zwischen den beiden Gleichgewichtslagen und die Schwingungsdauer um beide beobachtet werden kann.

§ 472. Mit Unrecht hat man dem Cavendish'schen Experiment manchmal vorgeworfen, es werde dabei angenommen, die Anziehung der Kugeln  $A$  und  $B$  sei gross genug, um gemessen zu werden, während doch die viel grössere Anziehung der Gegenstände in der Umgebung, wie z. B. des Hauses etc. vernachlässigt würde. Dies ist nicht der Fall. Die Anziehung aller festliegenden Körper ist in der des Gehäuses eingeschlossen. Sie werden daher nicht vernachlässigt, sondern *eliminiert*. Gerade um diese Elimination vorzunehmen, müssen sowohl  $e' - e$  als die Schwingungsdauer beobachtet werden. In der That werden so zwei Gleichungen gebildet und aus ihnen diese Anziehung, die wir nicht nöthig haben, eliminiert.

§ 473. Die Function  $\varphi(A - a)$  ist das Moment der auf die Kugeln und den Stab wirkenden Anziehungskräfte der Massen und des Brettes, wenn der Stab in eine Lage  $Cf$  gebracht wird, welche den Winkel  $A_1CB_2$  zwischen den abwechselnden Lagen der Massen halbirt. Es sei  $M$  die Masse eines jeden der Körper  $A$  und  $B$ ,  $m$  die einer der kleinen Kugeln,  $m'$  die des Stabes. Die auf  $m$  wirkende Anziehung von  $M$  sei durch  $\mu \frac{Mm}{D^2}$  dargestellt, worin  $D$  den Abstand ihrer Mittelpunkte bedeutet. Sind  $(p, q)$  die Coordinaten des Mittelpunktes von  $A_1$  auf  $Cf$  als  $x$ -Axe bezogen, so ist das Moment um  $C$  der auf die beiden Kugeln wirkenden Anziehungskraft der beiden Massen

$$2\mu Mm \left\{ \frac{cq}{\{(p-c)^2 + q^2\}^{\frac{3}{2}}} - \frac{cq}{\{(p+c)^2 + q^2\}^{\frac{3}{2}}} \right\},$$

worin  $c$  den Abstand des Mittelpunktes einer jeden kleinen Kugel von dem Centrum  $C$  der Bewegung bedeutet. Dieses Moment werde mit  $\mu MmP$  bezeichnet. Das Moment der auf den Stab wirkenden Anziehungskräfte der Massen lässt sich durch Integration ermitteln und sei  $\mu Mm'Q$ , worin  $Q$  eine bekannte Function der linearen Dimensionen des Apparates ist. Auch die Anziehung des Brettes kann man in Rechnung ziehen. Man erhält so

$$\varphi(A - a) = \mu M(mP + m'Q),$$

und wenn  $r$  der Radius einer der Kugeln ist,

$$I = 2m \left\{ c^2 + \frac{2}{5} r^2 \right\} + m' \frac{(c-r)^2}{3},$$

das mit  $I = mP' + m'Q'$  bezeichnet werden möge, worin  $P'$  und  $Q'$  be-

kannte Functionen der linearen Dimensionen des Stabes und der Kugeln sind. Durch Substitution in die Gleichung (A) ergibt sich mithin

$$\mu M \cdot \frac{mP + m'Q}{mP' + m'Q'} = \frac{e - e'}{2} \cdot \left(\frac{2\pi}{T}\right)^2.$$

Ist  $E$  die Masse der Erde,  $R$  ihr Radius und  $g$  die Schwerkraft, so ist  $g = \mu \frac{E}{R^2}$ .<sup>1)</sup> Substituirt man für  $\mu$ , so kommt

$$\frac{M}{E} = \frac{e - e'}{2} \cdot \left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 \cdot \frac{1}{gR^2} \cdot \frac{\frac{m'}{m} P' + Q'}{\frac{m}{m'} P + Q'}.$$

Das Verhältniss  $\frac{m}{m'}$  wurde dem Verhältniss der Gewichte der Kugel und des Stabes, *welche im luftleeren Raum gewogen wurden*, als gleich angenommen; offenbar würde es aber genauer gewesen sein, sie in der Luft zu wiegen. Denn, da die Massen die Luft sowohl wie die Kugeln anziehen, so ist der Druck der Luft auf der Seite einer Kugel, die der anziehenden Masse näher liegt, grösser als auf der weiter weg gelegenen Seite, wobei der Unterschied der beiden Druckkräfte der Anziehung der Masse auf die von der Kugel verdrängte Luft gleich ist.

§ 474. Mittelst dieses Verfahrens wurde die Ermittlung der Masse der Erde auf die Bestimmung zweier Elemente reducirt, (1) der Schwingungsdauer des Torsionsstabes und (2) des Winkels  $e - e'$  zwischen seinen beiden Gleichgewichtslagen, wenn er unter dem Einfluss der Massen in ihren abwechselnden Lagen steht. Um sie zu beobachten, wurde ein kleiner Spiegel an den Stab im Punkt  $C$  befestigt, dessen Ebene nahezu senkrecht auf dem Stab stand. Eine Scala war in eine verticale Platte eingravirt, die von dem Spiegel 108 engl. Zoll entfernt war, und das Bild der Scala im Spiegel wurde durch ein Fernrohr beobachtet, das sich grade über der Scala befand. Das Fernrohr war mit drei verticalen Fäden in seinem Brennpunkt versehen. Wenn sich der Torsionsstab um seine Axe drehte, sah man das Bild der Scala in dem Fernrohr sich horizontal über die Fäden weg bewegen und die Zahl der Scala, welche mit dem mittleren Faden zusammenfiel, bildete in jedem Moment die Ablesung. Die Scala bestand aus verticalen Strichen, die  $\frac{1}{13}$  engl. Zoll von einander entfernt waren und die Zahlen von 20 bis 180 trugen, um negative Ablesungen zu

1) Bei Baily's Experiment wurde ein genauerer Werth von  $g$  benutzt. Versteht man unter  $\varepsilon$  die Abplattung des Erdellipsoids, unter  $m$  das Verhältniss der Centrifugalkraft am Aequator zur Schwere am Aequator, unter  $\lambda$  die geographische Breite des Ortes und unter  $R$  den Polarradius der Erde, so ist

$$g = \mu \frac{E}{R^2} \left\{ 1 - 2\varepsilon - \left( \frac{5}{2}m - \varepsilon \right) \cos^2 \lambda \right\}.$$

vermeiden. Der Winkel, um den sich der Stab gedreht hatte, wenn das Bild der Scala den Zwischenraum zwischen zwei Theilstrichen zurücklegte, war daher  $\frac{1}{18} \cdot \frac{1}{108} \cdot \frac{1}{2} = 73'',46$ . Die Theilstriche wurden aber durch Diagonallinien geschnitten und durch horizontale Linien in zehn gleiche Theile zerlegt, so dass man nicht nur den zehnten Theil einer Abtheilung klar unterscheiden, sondern nach einiger Uebung auch noch Brüche dieser Zehntel ablesen konnte. Der Schwingungsbogen des Torsionsstabes war so klein, dass das Quadrat seines Bogenmasses vernachlässigt werden konnte; da er sich aber über mehrere Theilungen erstreckte, so liess er sich offenbar genau beobachten. Eine eingehende Beschreibung der Art, wie die Beobachtungen ausgeführt wurden, würde hier zu weit führen; wir verweisen den Leser auf den Bericht Baily's.

Bei dieser Untersuchung ist von der Wirkung des Widerstandes der Luft auf den Schwingungsbogen keine Notiz genommen worden. Sie wurde wenigstens zum Theil durch eine besondere Manier, das Mittel aus den Beobachtungen zu nehmen, eliminirt. Auf dieselbe Art wurde auch die Bewegung der neutralen Lage des Torsionsstabes berücksichtigt.

Wir haben auch nicht in Betracht gezogen, welche relativen Dimensionen man den verschiedenen Theilen des Instrumentes am besten gibt, damit es bei möglichster Haltbarkeit doch die genauesten Resultate liefere. Solche Betrachtungen gehören nicht in eine allgemeine Abhandlung der Dynamik. Bei den ursprünglichen Versuchen waren die anziehenden Massen  $A$  und  $B$  gross und wurden in die Nähe der kleinen Kugeln  $m$  und  $m'$  gebracht. Da eine rasche Schwingung des Stabes nicht zulässig war, so nahm man das Trägheitsmoment  $I$  des Stabes und der Kugeln gross und die Torsionskraft des Fadens klein. Die Grösse des Instrumentes war nicht handlich. C. V. Boys hat vorgeschlagen, eine Quarzfaser als tragenden Faden zu benutzen, wodurch der ganze Apparat so klein gehalten werden kann, dass die beiden Hauptschwierigkeiten, die Temperatur gleichmässig zu erhalten und grosse Kugeln als anziehende Massen zu verwenden, sich bedeutend reduciren. Siehe die *Proceedings of the Royal Society*, Mai, 1889.

§ 475. Unter der Annahme, dass die Dichtigkeit des Wassers, bei welcher ein Cubikdecimeter ein Kilogramm wiegt, die Einheit der Dichtigkeit sei, ergab sich als Endresultat aller Versuche für die mittlere Dichtigkeit der Erde der Werth 5,6747.

Die wichtigsten Versuche, welche nach demselben Plan, aber später als die von Baily angestellt wurden, sind Cornu's und Baille's Experimente. Siehe *Comptes Rendus*, Tome LXXVI, 1873 und Tome LXXXVI, 1878. Sie brachten verschiedene Verbesserungen an dem Apparat an, die wir hier nicht beschreiben können und fanden als mittlere Dichtigkeit 5,56. Sie glaubten einen Irrthum in Baily's Art, wie er seine Dichtigkeit nahm, entdeckt zu haben und berechneten sein Resultat, wenn der Irrthum corrigirt wurde, auf 5,55.

§ 476. Man hat auch noch zwei andere Methoden zur Ermittlung der mittleren Dichtigkeit der Erde benutzt. Im Jahr 1772 schlug

der englische Astronom Dr. Maskelyne vor, die Masse der Erde mit der eines Berges zu vergleichen, indem man die Abweichung eines Bleiloths in Folge der Anziehung des letzteren beobachtet. Der Berg Schehallien wurde dazu gewählt und man fand, dass die Dichtigkeit der Erde etwas weniger als fünfmal die des Wassers betrage. Siehe *Phil. Trans.* 1788 und 1811. Nach andern Beobachtungen in der Nähe von Arthur's Seat gab der englische Oberstlieutenant James von der Artillerie-Inspection die mittlere Dichtigkeit zu 5,316 an. Siehe *Phil. Trans.* 1856.

Die andere von Sir G. Airy benutzte Methode bestand darin, die Schwerkraft in der Tiefe eines Bergwerks mit der an der Oberfläche durch Beobachtung der Schwingungsdauer eines Pendels zu vergleichen. Man fand für die mittlere Dichtigkeit den Werth 6,566. Siehe *Phil. Trans.* 1856.

Innerhalb der letzten zehn Jahre hat man die Dichtigkeit der Erde mittelst einer sehr empfindlichen Wage zu ermitteln gesucht, die durch Annäherung grosser anziehender Massen gestört wurde. Die Experimente leiteten Jolly in München und Poynting in Manchester. Das Resultat war 5,69. Siehe Poynting's *Adams Prize essay* 1894.

### Beispiele

(den „Examination Papers“ entnommen, die auf der Universität Cambridge und in den Colleges gegeben wurden).

1. Ein gleichförmiger Stab von der Länge  $2c$  ruht in stabilem Gleichgewicht mit seinem unteren Ende auf dem Scheitel einer Cycloide, deren Ebene vertical und deren Scheitel nach unten liegt, und geht durch einen kleinen glatten festen Ring, der sich auf der Axe im Abstand  $b$  vom Scheitel befindet. Man zeige, dass der Stab, wenn das Gleichgewicht leicht gestört wird, kleine Schwingungen mit seinem unteren Ende auf dem Bogen der Cycloide in der Zeit  $4\pi \sqrt{\frac{a\{c^2 + 3(b-c)^2\}}{3g(b^2 - 4ac)}}$  macht, worin  $2a$  die Länge der Axe der Cycloide ist.

2. Ein kleiner glatter Ring gleitet auf einem kreisförmigen Draht vom Radius  $a$ , der gezwungen ist, sich um eine verticale Axe in seiner eigenen Ebene im Abstand  $c$  von dem Mittelpunkt des Drahtes mit der gleichförmigen Winkelgeschwindigkeit  $\omega$  zu drehen, die durch  $\omega^2(c\sqrt{2} + a) = g\sqrt{2}$  gegeben ist; man zeige, dass sich der Ring in einer Lage stabilen relativen Gleichgewichtes befindet, wenn der durch ihn gehende Radius des kreisförmigen Drahtes mit dem Horizont einen Winkel von  $45^\circ$  macht; man zeige auch, dass der Ring, wenn er ein wenig verschoben wird, eine kleine Schwingung in der Zeit

$$2\pi \left\{ \frac{a\sqrt{2}}{g} \cdot \frac{c\sqrt{2} + a}{c\sqrt{8} + a} \right\}^{\frac{1}{2}}$$

ausführt.

3. Eine gleichförmige Stange von der Länge  $2a$ , die mittelst zweier gleicher paralleler Seile, von denen jedes die Länge  $b$  hat, an zwei Punkten in derselben horizontalen Linie hängt, lässt man einen kleinen Winkel um die durch ihren Mittelpunkt gehende Verticale beschreiben; man zeige, dass die Dauer einer kleinen

Schwingung  $2\pi \sqrt{\frac{b k^2}{g a^2}}$  ist.

eine Bewegung in einer verticalen Ebene zulässt, rotiren um eine verticale durch das Gelenk gehende Axe und ein Faden, dessen Länge doppelt so gross, als jeder Stab, ist, wird an ihren Enden befestigt und trägt in seinem Mittelpunkt ein Gewicht. Wenn  $M, M'$  die Massen eines Stabes und des Massenpunktes sind und  $2a$  die Länge eines Stabes, zu beweisen, dass die Winkelgeschwindigkeit um die

verticale Axe, wenn die Stäbe und der Faden ein Quadrat bilden,  $\sqrt{\frac{3g}{2a\sqrt{2}} \cdot \frac{M+2M'}{M}}$

ist; ferner zu beweisen, dass, wenn das Gewicht in verticaler Richtung um ein Geringes herabgedrückt und das System alsdann sich selbst überlassen wird,

die Zeit einer kleinen Schwingung  $2\pi \sqrt{\frac{4a\sqrt{2}}{15g} \cdot \frac{M+3M'}{M+2M'}}$  ist.

5. Ein Ring vom Gewicht  $W$  gleitet auf einem Stab, der mit der Verticalen den Winkel  $\alpha$  macht und ist mittelst eines elastischen Fadens an einem Punkt in der Ebene des Stabes befestigt. Der Punkt ist so gelegen, dass sein kleinster Abstand vom Stab der natürlichen Länge des Fadens gleichkommt. Man beweise, dass, wenn  $\theta$  die Neigung des Fadens gegen den Stab in der Gleichgewichtslage

bezeichnet,  $\cotg \theta - \cos \theta = \frac{W}{w} \cos \alpha$  ist, worin  $w$  den Elasticitätsmodulus des Fadens bezeichnet. Wenn ferner der Ring ein wenig verschoben wird, so beträgt

die Zeit einer kleinen Schwingung  $2\pi \sqrt{\frac{Wl}{wg} \cdot \frac{1}{1 - \sin^2 \theta}}$ , wobei  $l$  die natürliche Länge des Fadens bedeutet.

6. Eine kreisförmige Röhre vom Radius  $a$  enthält einen elastischen Faden, der an ihrem höchsten Punkt befestigt ist, dessen Länge  $\frac{1}{8}$  der Peripherie der Röhre gleichkommt und an dessen anderem Ende ein schwerer Massenpunkt befestigt wird, der die Länge des Fadens, wenn er vertical herabhinge, verdoppeln würde. Das System dreht sich um den verticalen Durchmesser mit der Winkel-

geschwindigkeit  $\sqrt{\frac{g}{a}}$ . Man finde die relative Gleichgewichtslage und beweise,

dass die Zeit einer kleinen Schwingung des Massenpunktes, wenn er leicht gestört wird,  $\frac{2\pi\sqrt{\pi}}{\sqrt{\pi+4}} \sqrt{\frac{a}{g}}$  beträgt.

7. Das untere Ende  $A$  eines schweren gleichförmigen Stabes  $AB$  ist an einer verticalen Axe befestigt und ein elastischer Faden verbindet  $B$  mit einem andern Punkt  $C$  der Axe, so, dass  $AC = \frac{AB}{\sqrt{2}} = a$  ist; das Ganze lässt man um

$AC$  mit einer solchen Winkelgeschwindigkeit rotiren, dass der Faden sich auf das Doppelte seiner natürlichen Länge ausdehnt und horizontal liegt, wenn sich das System in relativem Gleichgewicht befindet, und überlässt es dann sich selbst. Wenn der Stab in einer verticalen Ebene leicht gestört wird, zu beweisen, dass

die Zeit einer kleinen Schwingung  $2\pi \sqrt{\frac{4a}{21g}}$  ist, vorausgesetzt, dass der Stab schwer genug ist, um den Faden auf seine doppelte Länge auszudehnen. § 452.

8. Drei gleiche elastische Fäden  $AB, BC, CA$  umgeben einen Kreisumfang und die Enden bei  $A$  sind befestigt. Bei  $B$  und  $C$  sind zwei gleiche Massenpunkte von der Masse  $m$  angebunden. Wenn  $l$  die natürliche Länge eines jeden Fadens ist, wobei von ihnen angenommen wird, dass sie beständig ausgedehnt sind, und  $\lambda$  der Elasticitätsmodulus, zu zeigen, dass die Massenpunkte bei einer Störung

des Gleichgewichtes sich nach den Intervallen  $\pi \sqrt{\frac{ml}{\lambda}}$  in gleichen Abständen von  $A$  befinden.

9. Ein Punkt von der Masse  $M$  wird in die Nähe des Mittelpunktes eines glatten kreisförmigen horizontalen Tisches vom Radius  $a$  gelegt und Fäden an ihm befestigt, die über  $n$  glatte Rollen laufen, welche in gleichen Abständen auf dem Umfang des Kreises angebracht sind; an dem andern Ende eines jeden Fadens ist ein Punkt von der Masse  $M$  angebunden, man zeige, dass die Zeit einer kleinen

Schwingung des Systems  $2\pi \left( \frac{2+n}{n} \frac{a}{g} \right)^{\frac{1}{2}}$  ist.

10. Zwei Scheiben gleiten in einer kreisförmigen, Luft enthaltenden Röhre von gleichförmiger Bohrung und passen genau in die Aushöhlung. Sie nehmen im Anfang eine solche Lage ein, dass die Linie, die ihre Mittelpunkte verbindet, durch das Centrum der Röhre geht, und die Luft in der Röhre hat anfänglich ihre natürliche Dichtigkeit. Die eine Scheibe wird so in Bewegung gesetzt, dass die Anfangsgeschwindigkeit ihres Centrums eine kleine Grösse ist. Wenn die Trägheit der Luft vernachlässigt wird, zu beweisen, dass der Punkt auf der Axe der Röhre, der gleichen Abstand von den Centren der Scheiben hat, sich gleich-

förmig bewegt und dass die Schwingungsdauer jeder Scheibe  $2\pi \sqrt{\frac{Ma\pi}{4P}}$  ist, worin  $M$  die Masse einer jeden Scheibe,  $a$  den Radius der Axe der Röhre und  $P$  den Druck der Luft auf die Scheibe in ihrem natürlichen Zustand bezeichnet.

11. Ein gleichförmiger Stab von der Masse  $M$  und Länge  $2a$  kann sich um eine feste horizontale Axe an seinem einen Ende drehen; an das andere Ende ist ein Faden von der Länge  $l$  befestigt, dessen zweiter Endpunkt einen Punkt von der Masse  $m$  trägt. Wenn während einer kleinen Schwingung des Systems die Neigung des Fadens gegen die Verticale stets doppelt so gross, wie die des Balkens bleibt, so ist  $M(3l - a) = 6m(l + a)$ . § 458.

12. Eine Kegeloberfläche, deren halber Winkel an der Spitze  $\alpha$  ist, liegt fest und ihre Axe bildet mit der Verticalen den Winkel  $\theta$ ; ein grader glatter Kegel, dessen halber Winkel an der Spitze  $\beta$  ist, wird so in ihr Inneres gelegt, dass die Spitzen zusammenfallen. Man zeige, dass die Zeit einer kleinen Schwingung

$2\pi \sqrt{\frac{a \sin(\alpha - \beta)}{g \sin \theta}}$  ist, worin  $a$  den Abstand des Schwingungsmittelpunktes des Kegels von der Spitze bedeutet.

13. Eine Anzahl Körper, deren Massenpunkte sich mit Kräften anziehen, die dem Abstand proportional sind, sind im Stande, sich auf gewissen Curven und Flächen zu bewegen. Man beweise, dass man die Lagen stabilen Gleichgewichtes findet, wenn man die Summe der Trägheitsmomente  $A, B, C$  des Systems für drei Axen, die rechtwinklig zueinander sind und durch seinen Schwerpunkt gehen, zu einem Minimum macht. § 469.

14. Ein Massenpunkt bewegt sich innerhalb eines Dreiecks  $ABC$  und wird senkrecht zu den Seiten mit Kräften angezogen, von denen jede  $\mu$ -mal seinem lothrechten Abstand von ihnen gleich ist. Man zeige, dass seine Bewegung durch zwei periodische Ausdrücke von der Form  $P \sin \{t\sqrt{(2\mu + a)}\}$  gegeben ist, worin  $(2 - 1)(2 - 2) + 2 \cos A \cos B \cos C = 0$  ist.

Man zeige, dass die Wurzeln dieser quadratischen Gleichung reell und positiv sind.

Man untersuche den Fall, in welchem das Dreieck gleichseitig ist und verificire das obige Resultat, ohne von dem früheren Beweis Gebrauch zu machen.



15. Die Kraft, mit der sich zwei kleine Massen anziehen, ist dem reciproken Quadrat des Abstandes proportional und in der Entfernung  $a$  einem sehr kleinen Bruch  $\frac{1}{n}$  des Gewichts einer jeden Masse gleich. Sie sind mittelst zweier Fäden von der Länge  $l$  an zwei Punkten in einer horizontalen Ebene aufgehängt und haben den Abstand  $a$  voneinander. Man lässt sie kleine Schwingungen in derselben verticalen Ebene ausführen; zu beweisen, dass die Bewegung einer jeden aus zwei harmonischen Bewegungen zusammengesetzt ist, deren Perioden sich nahezu wie  $1 : 1 + \frac{2l}{na}$  verhalten.

---

## Kapitel X.

### Specielle Probleme.

#### Schwingungen eines schaukelnden Körpers im Raum von drei Dimensionen.

§ 477. *Ein schwerer Körper schwingt in einem Raum von drei Dimensionen mit einem Freiheitsgrad auf einer festliegenden rauhen Fläche von beliebiger Form derart, dass keine Rotation um die gemeinschaftliche Normale stattfindet. Man finde die Bewegung.*

§ 478. **Die relative Indicatrix.** Es sei  $O$  der Berührungspunkt, wenn der schwere Körper sich im Gleichgewicht befindet. Die gemeinsame Normale sei die  $z$ -Axe und die beiden andern Axen mögen senkrecht auf einander stehen und in der gemeinsamen Berührungsebene liegen. Den Gleichungen für die in der Nähe von  $O$  liegenden Theile der Flächen kann man die Gestalt

$$z = \frac{1}{2}(ax^2 + 2bxy + cy^2) + \text{etc.},$$

$$z' = \frac{1}{2}(a'x^2 + 2b'xy + c'y^2) + \text{etc.}$$

geben. Man lasse eine Ordinate sich so um den Coordinatenanfang  $O$  drehen, dass der Theil  $z - z'$  zwischen den Flächen constant und einer unbegrenzt kleinen Grösse  $\Delta$  gleich ist. Sie beschreibt auf der  $xy$ -Ebene einen unendlich kleinen Kegelschnitt, dessen Gleichung

$$(a - a')x^2 + 2(b - b')xy + (c - c')y^2 = 2\Delta$$

ist. Jeder ihm ähnliche und ähnlich gelegene Kegelschnitt, der in der Berührungsebene liegt und dessen Centrum sich in  $O$  befindet, heisst *die relative Indicatrix* der beiden Flächen.

Ist  $OR$  ein Radiusvector dieser Indicatrix, so variirt der Unterschied der Krümmungen der beiden durch die Normalebene  $zOR$  gemachten Schnitte (oder ihre Summe, wenn sie in entgegengesetzten Richtungen gemessen werden) umgekehrt wie das Quadrat von  $OR$ . Dies folgt aus der Definition der Kegelschnitte nach einem bekannten Satz der Raumgeometrie. So seien z. B.  $(r, z)$ ,  $(r, z')$  die Coordinaten

zweier Punkte auf den beiden Krümmungskreisen in demselben Abstand von der  $z$ -Axe. Schliesslich wird  $2\rho z = r^2$  und  $2\rho' z' = r^2$ ;  $z - z'$  ist aber gleich  $\Delta$ ; eliminirt man daher  $z$  und  $z'$ , so variirt, wie man sieht, der Unterschied der Krümmungen umgekehrt wie  $r^2$ .

$OR$  sei die Tangente an den rollenden Bogen, welcher durch die geometrischen Bedingungen des Problems bestimmt wird;  $\rho, \rho'$ , die Krümmungsradien der Schnitte, welche die Normalebene durch  $OR$  erzeugt, seien positiv, wenn die Krümmungen in entgegengesetzter Richtung stattfinden, und es möge  $\frac{1}{s} = \frac{1}{\rho} + \frac{1}{\rho'}$  sein.  $s$  kann dann der Radius der relativen Krümmung heissen.

Die drei folgenden Sätze sind in der Dynamik von Nutzen.

§ 479. 1. Satz. Die Momentanaxe. Sind  $OI$  und  $Oy$  zwei conjugirte Durchmesser der relativen Indicatrix und ist  $Oy$  eine Tangente an den rollenden Bogen, so ist  $OI$  die Momentanaxe und wenn  $\theta$  den unbegrenzt kleinen Winkel bezeichnet, der um die Momentanaxe beschrieben wird, so ist der rollende Bogen  $\sigma$  gleich  $\theta s \sin yOI$ .

Um es zu beweisen, trage man in der  $yz$ -Ebene auf den Flächen zwei Längen  $OP$  und  $OP'$  ab, von denen jede  $\sigma$  gleich ist. In der Grenze ist dann  $P'P$  der Normalen  $Oz$  parallel.  $P'P$  möge die  $xy$ -Ebene in  $M$  schneiden. Zieht man eine andre Ordinate  $Q'QN$ , die unbegrenzt nahe an  $P'PM$  liegt, so dass  $PP' = QQ'$  wird, so ist  $MN$  ein Bogenelement der relativen Indicatrix, welche durch  $M$  geht und daher parallel zu  $OI$ , dem zu  $OM$  conjugirten Durchmesser. Ferner ist  $PQP'Q'$  ein Parallelogramm.

Die Ebenen  $OPQ, OP'Q'$  sind schliesslich Berührungsebenen in  $P$  und  $P'$  und müssen sich in einer Geraden  $OJ$  schneiden, die parallel zu  $PQ$  oder  $P'Q'$  ist. Dreht man dann den Körper um  $OJ$ , so werden die Berührungsebenen in  $P$  und  $P'$  zur Deckung gebracht und der eine Körper rollt auf dem andern.  $OJ$  ist daher die Momentanaxe.

Daraus nun, dass  $MN$  die Projection von  $PQ$  oder  $P'Q'$  auf die  $xy$ -Ebene ist, folgt, dass  $OI$ , welches parallel mit  $MN$  läuft, die Projection von  $OJ$ , der Parallelen zu  $PQ$  oder  $P'Q'$  ist. Weil ferner die parallelen Linien  $PQ$  und  $P'Q'$  als Tangenten an die Flächen unbegrenzt kleine Winkel mit der  $xy$ -Ebene machen, so bildet auch  $OJ$  einen unbegrenzt kleinen Winkel mit  $OI$ . Wenn  $\varphi$  diesen kleinen Winkel und  $\theta$  den Rotationswinkel um  $OJ$  bezeichnet, so wird die Bewegung des Körpers durch die Rotationen  $\theta \sin \varphi$  um  $Oz$  und  $\theta \cos \varphi$  um  $OI$  dargestellt. Da  $\theta$  unbegrenzt klein ist, so ist die erstere eine Grösse zweiter Ordnung und zu vernachlässigen. Die letztere reducirt sich auf  $\theta$ .

Um den zweiten Theil des Satzes zu beweisen, zerlege man die letztere Rotation in eine Rotation  $\theta \cos yOI$  um  $Oy$  und eine andre  $\theta \sin yOI$  um  $Ox$ . Die erste hat keine Wirkung auf den längs  $Oy$  rollenden Bogen, die letzte liefert offenbar  $\sigma = s\theta \sin yOI$ .

§ 480. 2. Satz. Der Stabilitätscylinder. Man trage auf der gemeinschaftlichen Normalen  $Oz$  die Länge  $s \sin^2 yOI$  ab und beschreibe einen Kreiscylinder, der diese Länge zum Durchmesser seiner Basis hat und dessen Axe  $OI$  parallel läuft. Liegt der Schwerpunkt des Körpers innerhalb dieses Cylinders, so ist das Gleichgewicht stabil,

liegt er ausserhalb und über der  $xy$ -Ebene, so ist es unstabil. Der Cylinder kann also *Stabilitätscylinder* genannt werden.

Es folgt dies unmittelbar aus dem zweiten Ausdruck für das Moment der Schwere um  $OI$  in dem nächsten Satz.

§ 481. 3. Satz. Die Schwingungsdauer. Wird der Schwerpunkt mit  $G$  und der Trägheitsradius des Körpers für  $OI$  mit  $K$  bezeichnet, so findet man die Länge  $L$  des gleichwerthigen einfachen Pendels aus

$$\frac{K^2}{L} = s \cos GOz \cdot \sin^2 y OI - OG \cdot \sin^2 GOI$$

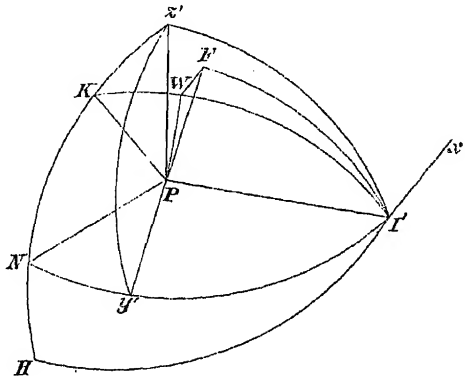
und wenn die Verlängerung von  $OG$  den Stabilitätscylinder in  $V$  schneidet, so ist

$$\frac{K^2}{L} = GV \sin^2 GOI.$$

Daraus ergibt sich, dass die Schwingungsdauer des Körpers dieselbe ist, wie in dem Fall, wenn die feste Fläche eben ist und die Krümmungen des oberen Körpers an dem Berührungspunkt so geändert werden, dass die relative Indicatrix die nämliche bleibt, wie zuvor.

§ 482. Der Beweis wird geführt, indem man die Momente um die Momentanaxe nimmt, siehe § 448. Das Verfahren lässt sich ungefähr so angeben. Im Gleichgewicht ist  $O$  der Berührungspunkt und  $OG$  vertical; bei dem Rollen des Körpers auf der Fläche z. B. in der Richtung  $y'P$  sei, zur Zeit  $t$ ,  $P$  der Berührungspunkt und  $O'$ ,  $G'$  die von den Punkten  $O$  und  $G$  des Körpers im Raum eingenommenen Lagen. Diese Punkte sind in der Figur nicht angegeben,  $O$  und  $O'$  liegen aber offenbar zwischen  $y'$  und  $P$  unbegrenzt dicht aneinander und so, dass  $OO'$  senkrecht auf  $Py'$  steht, während  $G'$  sich von  $G$ , von einem Punkt in  $PI'$  aus gesehen, etwas nach der rechten Seite hin entfernt. Man ziehe  $PW$  vertical und  $PF$  parallel und gleich  $O'G'$ . Ist  $PI'$  die Momentanaxe zur Zeit  $t$ , so ist  $\theta$  der Winkel zwischen den Ebenen  $WPI'$  und  $FPI'$ .

Um das Moment des Gewichtes um  $PI'$  zu finden, zerlege man die Schwere parallel und senkrecht zu  $PI'$ . Die erste Componente hat kein Moment um  $PI'$ , die letztere ist  $g \sin WPI'$  und möge parallel zur Geraden  $KP$  wirken. Das gesuchte Moment ist das Product aus der Componenten der Schwere und dem kürzesten Abstand zwischen der Richtung dieser Kraft und der Geraden  $PI'$ . Dieser kürzeste Abstand ist der Summe der Projectionen (mit den richtigen Vorzeichen) von  $PO'$ ,  $O'G'$  auf eine sowohl auf  $KP$  als auf  $PI'$  senkrecht stehende Gerade gleich. Diese Gerade sei  $PH$ . Die Projectionen findet man mit Hülfe der sphärischen Trigonometrie. Die Figur möge die sphärischen Dreiecke darstellen, welche von den Bogen, die den verschiedenen Winkeln am Mittelpunkt  $P$  gegenüber liegen, auf einer Kugel gebildet werden.



$Pg'$  sei ferner eine Tangente an  $PO'$  den rollenden Bogen und  $Pz'$  die Normale zur Fläche im Punkt  $P$ . Die Projection von  $PO'$  auf  $PH$  ist

$$\sigma \cos y' PH = \sigma \cos y' PN \cos NPH = \sigma \sin y' PI' \cos KPz'.$$

Die Projection von  $O'G'$  ist dieselbe, wie die von  $PF$ , nämlich

$$PF \cos HPI' = -PF \sin WPI' = -OG \cdot \theta \sin WPI'.$$

Die Differentialgleichung ist daher

$$K^2 \frac{d^2\theta}{dt^2} = -\theta g \{ s \cdot \sin^2 y' PI' \cdot \sin WPI' \cdot \cos KPz' - OG \cdot \sin^2 WPI' \}.$$

Man ersetze nun  $\sin WPI' \cdot \cos KPz'$  durch das gleichwerthige  $\cos WPz'$ . In den kleinen Gliedern, die den Factor  $\theta$  enthalten, kann man die Accente entfernen und  $P, W$  durch  $O, G$  ersetzen. Man erhält so unmittelbar das eine Resultat.

Um zu dem andern zu kommen, schreibe man die Momentengleichung in der Form

$$K^2 \frac{d^2\theta}{dt^2} = -\theta g \sin^2 WPI' \left\{ s \cdot \sin^2 y' PI' \frac{\cos KPz'}{\cos KPV} - OG \right\}.$$

Wenn aber  $D$  der Durchmesser des Stabilitätscylinders ist, dessen Axe parallel  $PI'$  läuft und wenn  $PW$  den Cylinder in  $V$  schneidet, so hat man

$$PV \cdot \cos KPW = D \cdot \cos KPz'.$$

Substituirt man dies in die Gleichung, so erhält der Ausdruck in der Klammer die Form  $PV - OG$ , was in der Grenze gleich  $GV$  ist. So findet man das zweite Resultat.

Man kann auch die Perioden mit Hülfe der lebendigen Kraft ermitteln.

## Schwingungen von Kegeln in dem Raum von drei Dimensionen.

§ 483. *Schwingungen von Kegeln in erster Näherung. Ein schwerer Kegel von beliebiger Gestalt schwingt auf einer festliegenden rauhen Kegelfläche, wobei die beiden Spitzen zusammenfallen. Man soll die Dauer einer kleinen Schwingung finden.*

Die Bewegung eines Kegels um seine Spitze als festen Punkt wird man am geeignetsten mit Hülfe der sphärischen Trigonometrie erörtern.

Es sei  $O$  die gemeinschaftliche Spitze,  $G$  der Schwerpunkt des beweglichen Kegels,  $OG = h$ . Wir nehmen an, die sphärischen Dreiecke würden auf der mit dem Centrum  $O$  und dem Radius  $h$  beschriebenen Kugel construirt.  $OI$  sei die Momentanaxe des beweglichen Kegels, d. h. die gemeinschaftliche Erzeugende, längs welcher sich die beiden Kegel berühren. Sie schneide die Kugel in  $I$ .  $OW$  sei eine nach oben gezogene Verticale, welche dieselbe Kugel in  $W$  trifft. Es seien die Bogen  $WI = z$ ,  $GI = r$ . In der Gleichgewichtslage fallen die drei Geraden  $OW, OG, OI$  in dieselbe verticale Ebene und so sind sie in der Figur dargestellt.

Es sei  $n$  die Neigung der verticalen Ebene  $G O I$  gegen die Normalebene auf die beiden Kegel durch  $O I$ .  $\varrho, \varrho'$  seien die halben Winkel an der Spitze der beiden graden osculirenden Kreiskegel, welche sich längs  $O I$  berühren, und seien positiv, wenn die Krümmungen entgegengesetzte Richtung haben. In der Figur schneiden ihre zugehörigen Axen die Kugel in  $C$  und  $D$ .

Ist  $K$  der Trägheitsradius des beweglichen Kegels für  $O I$ , so ist die Länge  $L$  des gleichwerthigen einfachen Pendels durch

$$\frac{K^2}{h L} = \sin(z - r) \cos n \frac{\sin \varrho \sin \varrho'}{\sin(\varrho + \varrho')} - \sin r \sin z$$

gegeben.

Man erhält dieses Resultat, wenn man die Momente um die Momentanaxe nimmt, § 448. Ist  $G'$  die Lage des Schwerpunktes zur Zeit  $t$  und  $\theta$  der Winkel zwischen den Ebenen  $G O I, G' O I$ , so hat man

$$K^2 \frac{d^2 \theta}{dt^2} = M. \quad (1),$$

worin  $M$  das Moment der an  $G'$  angreifenden Beschleunigung  $g$  um die Momentanaxe zur Zeit  $t$  ist.

Ist  $OP$  eine benachbarte Erzeugende des festliegenden Kegels und  $\sigma$  der Winkel  $P O I$ , so muss das Moment  $M'$  um  $OP$  der an  $G'$  angreifenden Beschleunigung  $g$  eine Function von  $\theta$  und  $\sigma$  sein. Man hat daher bis zu kleinen Grössen erster Ordnung genau

$$M' = A \sigma + B \theta. \quad (2),$$

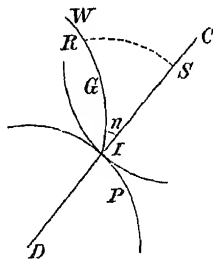
worin  $A$  und  $B$  zwei Ausdrücke sind, die von der Gestalt des Kegels abhängen.

Schliesslich erhält man, wenn  $OP$  die Momentanaxe zur Zeit  $t$  ist,  $M' = M$  und

$$\sigma \sin(\varrho + \varrho') = \theta \sin \varrho \sin \varrho'. \quad (3).$$

Durch Elimination von  $\sigma$  oder  $\theta$  aus diesen Gleichungen ergibt sich die Schwingungsdauer.

Die Beziehungen (2) und (3) werden in den §§ 484 und 485 auf elementare Art abgeleitet. Das Verfahren entspricht Schritt für Schritt dem bei der Schwingung der Cylinder angewandten (§ 441), der Hauptunterschied besteht darin, dass die in der Figur für die Cylinder benutzten Geraden hier durch sphärische Bogen ersetzt werden. Der Beweis für die Beziehung (3) bietet keine Schwierigkeit dar; in dem allgemeinen Fall aber, in dem der rollende und der festliegende Kegel beliebige Gestalt haben, wird die für die Beziehung (2) erforderliche Figur ziemlich verwickelt. In speciellen Fällen, wie wenn die festliegende Fläche eine Ebene oder der rollende Kegel ein Umdrehungskegel ist, wird das Verfahren bedeutend einfacher, wie an einigen Beispielen in § 486 gezeigt werden soll. Der Beweis, der sich für



den einzelnen grade in Betracht gezogenen Fall am besten eignet, wird dabei noch einmal kurz skizzirt.

**Eine andre Methode.** *Betrachtet man die Theile von  $M'$ , die  $\theta$  und  $\sigma$  zu verdanken sind, getrennt, so erhält man ihre Werthe ohne eine complicirtere Figur nöthig zu haben, als die in diesem Paragraphen gegebene. Der Beweis ist wie folgt.*

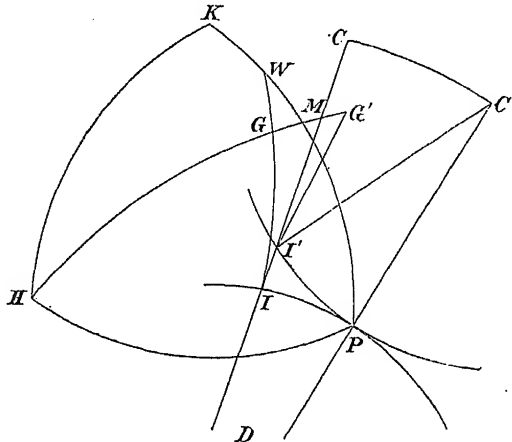
Nimmt man (1) an, es sei  $\sigma = 0$ , so ist  $M'$  das Moment um  $OI$  der an  $G$  parallel zur Verticalen  $WO$  angreifenden Beschleunigung  $g$ . Da der Körper um  $OI$  den Winkel  $\theta$  beschreibt, so ist der Bogen  $GG' = h\theta \sin GI$ . Zerlegt man  $g$  parallel und senkrecht zu  $OI$ , so ist die letztere Componente  $g \sin WI$  und ihr Moment um  $OI$  ist  $g \sin WI \cdot GG'$ . Substituirt man für die sphärischen Bogen  $WI$  und  $GI$  ihre Werthe  $z$  und  $r$ , so wird das Moment  $-gh\theta \sin r \sin z$ .

Nimmt man (2) an, es sei  $\theta = 0$ , so ist  $M'$  das Moment um die benachbarte Erzeugende  $OP$  der an  $G$  parallel zu  $WO$  angreifenden Beschleunigung  $g$ . Zerlegt man  $g$  in der Richtung von und senkrecht zu  $GO$ , so ist die letztere Componente  $g \sin WG$  und sie greift an  $G$  in der Richtung der Tangente an den Bogen  $GI$  an. Um ihr Moment um  $OP$  zu finden, suchen wir ihre Componente senkrecht zur Ebene  $OGP$  und multipliciren sie mit  $h \sin GP$ . Das Moment ist daher das Product von  $g \sin WG$ ,  $\sin IGP$  und  $h \sin GP$ . Da sowohl  $\sigma \cos n$  als  $IGP \cdot \sin GP$  Ausdrücke für den senkrechten Abstand des Punktes  $P$  von dem Bogen  $GI$  sind, so wird das gesuchte Moment  $= gh\sigma \sin(z-r) \cos n$ , worin  $z-r$  statt  $WG$  geschrieben wurde.

Der vollständige Werth von  $M$  ist daher

$$M = gh\{\sigma \cos n \sin(z-r) - \theta \sin r \sin z\}.$$

§ 484. Bei dem Rollen des schweren Kegels auf der Fläche nimmt der Punkt auf der Kugel, der sich bei  $I$  im Gleichgewicht befindet, die Lage  $I'$  ein und  $P$  ist der neue Berührungspunkt. Der Bogen  $IG$  möge die Lage  $I'G'$  erhalten und das Centrum  $C$  des osculirenden Kegels sich nach  $C'$  begeben.



sei der durchrollte Bogen und  $\theta$  der Winkel, um den sich der Kegel hat. Da dieser Winkel in der Grenze derselbe wie  $CPC'$  ist, so hat man  $\sin \varphi$ . Sowohl  $CC' \operatorname{cosec}(\varphi + \varphi')$  als  $\sigma \operatorname{cosec} \varphi'$  sind dem Winkel  $IDP$

Man hat daher  $\sigma = \theta \frac{\sin \varphi \sin \varphi'}{\sin(\varphi + \varphi')}$ .

§ 485. Die Verticale  $OW$  trifft die Kugel in  $W$ . Um das Moment des Gewichtes um  $OP$  zu finden, muss man die Schwere parallel und senkrecht zu  $OP$  zerlegen. Die erste Componente hat kein Moment, die zweite ist  $g \sin WP$ . Die letztere möge parallel zur Geraden  $KO$  wirken. Das gesuchte Moment ist das Product aus dieser Componenten der Schwere und der Projection von  $OG'$  auf die Gerade  $OII$ , die senkrecht sowohl auf  $OK$  als  $OP$  steht. Die Seiten des sphärischen Dreiecks  $HKP$  sind daher sämmtlich rechte Winkel. Im Gleichgewichtszustand liegt  $G$  in der verticalen Ebene  $WOI$  und beim Rollen des Kegels bewegt sich  $G$  nach  $G'$ , so dass der Bogen  $GG'$  senkrecht auf  $WI$  und gleich  $0 \sin r$  ist. Er möge  $WP$  in  $M$  treffen. Die gesuchte Projection ist

$$h \cos IIG' = -h \cdot MG',$$

da  $HM$  ein rechter Winkel ist. Weil  $PI$  mit  $PH$  einen Winkel macht, der in der Grenze gleich  $n$  wird, so hat man in der Grenze

$$\frac{GM}{\sigma \cos n} = \frac{\sin WG}{\sin WI} = \frac{\sin(z-r)}{\sin z}.$$

Das gesuchte Moment, das den Kegel zurück in seine Gleichgewichtslage drängt, ist  $gh \sin z (GM - GG')$ , das durch Substitution die Gestalt

$$M = gh \{ \sigma \cos n \sin(z-r) - 0 \sin r \sin z \}$$

erhält. Setzt man dieses Moment mit verändertem Vorzeichen gleich  $K^2 d^2 \theta / dt^2$ , so folgt daraus das zu beweisende Resultat unmittelbar.

Zu dieser Gleichung kommt man auch mittelst der in § 509 angegebenen analytischen Methode. Dort wird das hier benutzte geometrische Verfahren durch Differentiationen ersetzt, die man bis zu jedem höheren Grad der Annäherung ausdehnen kann.

§ 486. Beispiele. Beisp. 1. Wenn der obere Körper ein grader Kegel mit dem halben Winkel  $\varrho$  an der Spitze ist und auf irgend einer Kegelfläche liegt, so wird  $n = 0$  und  $r = \varrho$ . Der obige Ausdruck erhält dann die Form

$$\frac{K^2}{hL} = - \frac{\sin(z+\varrho') \sin^2 \varrho}{\sin(\varrho+\varrho')}.$$

Beisp. 2. Ein grader Kegel mit dem Winkel  $2\varrho$  an der Spitze und der Höhe  $a$ , der mit seiner Spitze an einem festen Punkt an einer rauhen verticalen Wand aufgehängt ist, macht kleine Schwingungen; man beweise, dass die Länge des gleichwerthigen Pendels  $\frac{a}{5} \frac{1 + 5 \cos^2 \varrho}{\cos \varrho}$  beträgt.

Der Kegel, wenn er sich im Gleichgewicht befindet, möge die Ebene in der Verticalen  $Oz$  berühren. Zur Zeit  $t$  sei die Erzeugende  $ON$  die Berührungslinie und  $\angle ON = \sigma$ ;  $OA$  sei die Axe. Zerlegt man die Schwere in der Richtung von und senkrecht zu der Linie  $ON$  und nimmt die Momente um die Momentanaxe  $ON$ , so hat man

$$K^2 \frac{d^2 \theta}{dt^2} = -g \sin \sigma \cdot \frac{3}{4} a \sin \varrho.$$

Wenn nun der Kegel um  $ON$  den Winkel  $\frac{d\theta}{dt} dt$  beschreibt, so rückt der Mittelpunkt  $A$  der Basis um den Bogen  $a \sin \varrho \cdot \frac{d\theta}{dt} dt$  voran; ist nun  $AH$  senkrecht auf  $ON$ , so rückt auch  $H$  um ebensoviel voran.  $H$  legt aber den Bogen  $OH \cdot d\sigma$ , das heisst  $a \cos \varrho d\sigma$  zurück. Man hat daher  $d\theta/dt \operatorname{tg} \varrho = \frac{d\sigma}{dt}$ . Setzt man diesen Werth von  $d\theta/dt$  in die obige Gleichung ein und entnimmt den Werth



von  $K^2$  dem § 17, Beisp. 7, so findet man die Länge des gleichwerthigen Pendels ohne Schwierigkeit.

Beisp. 3. Ein grader Kegel mit dem Winkel  $2\varrho$  an der Spitze und der Höhe  $a$  schwingt auf einer vollkommen rauhen Ebene, die mit der Verticalen den Winkel  $z$  macht; die Länge des gleichwerthigen Pendels ist

$$\frac{a(1 + 5 \cos^2 \varrho)}{5 \cos \varrho \cos z}.$$

Man zerlege die Schwere in  $g \cos z$  in der Richtung die Ebene abwärts und eine dazu senkrechte Componente, die zu vernachlässigen ist. Man verfähre dann weiter, wie bei der vorigen Aufgabe.

Beisp. 4. Ein grader Kegel, dessen Winkel an der Spitze  $2\varrho$  und dessen Höhe  $a$  ist, wird durch eine seine Axe enthaltende Ebene getheilt. Die eine Hälfte ruht im Gleichgewicht mit ihrer Axe auf der Erzeugenden eines festliegenden graden Kegels mit dem Winkel  $2\varrho'$  an der Spitze und die Spitzen fallen zusammen; man beweise, dass die Länge  $L$  des gleichwerthigen Pendels durch

$$\{9\pi^2 + 16 \operatorname{tg}^2 \varrho\}^{\frac{1}{2}} \frac{2a \operatorname{tg}^2 \varrho}{5L} - 3\pi \sin z \operatorname{tg} \varrho' - 4 \operatorname{tg} \varrho \frac{\sin(\varrho' + z)}{\cos \varrho'}$$

gegeben ist, worin  $z$  die Neigung der Berührungslinie gegen die nach oben positiv angenommene Verticale bedeutet.

§ 487. **Bedingung für die stabile Gleichgewichtslage von Kegeln in erster Näherung.** *Die Stabilitätsbedingung zu bestimmen, wenn ein schwerer Kegel im Gleichgewicht auf einem vollkommen rauhen im Raum festliegenden Kegel ruht.*

Offenbar muss die Länge  $L$  des gleichwerthigen Pendels, wie sie in § 483 gefunden wurde, eine positive Grösse sein. Dies führt zu der folgenden Construction, die in der Figur auf S. 441 dargestellt ist. Man trage auf der gemeinschaftlichen Normalen  $CI$  der Kegel die Länge  $IS = s$  ab, so dass  $\cotg s = \cotg \varrho + \cotg \varrho'$  ist. Zieht man von  $S$  aus den Bogen  $SR$  senkrecht zu  $IGW$ , so ist

$$\cos n = \cotg s \cdot \operatorname{tg} IR.$$

$L$  ist alsdann positiv und das Gleichgewicht stabil, wenn der Schwerpunkt des beweglichen Kegels entweder unter der gemeinschaftlichen Erzeugenden der beiden Kegel oder über ihr unter einem solchen Winkel  $r$  liegt, dass

$$\cotg r > \cotg z + \cotg IR \text{ ist.}$$

Ist die Spitze  $O$  sehr weit entfernt, so werden die Kegel Cylinder. Alsdann reducirt sich die Stabilitätsbedingung, wenn der Bogen  $z$  ein Quadrat ist, auf  $r < IR$ , was mit der Bedingung in § 442 übereinstimmt.

## Grosse tautochrone Bewegungen.

§ 488. Wenn die Schwingungen eines Systems nicht klein sind, so lässt sich die Bewegungsgleichung nicht immer auf eine lineare Form reduciren und eine allgemeine Regel für ihre Auflösung kann

nicht gegeben werden. Die Schwingung kann aber noch tautochron sein und es ist manchmal wichtig festzustellen, ob es der Fall ist. Verschiedene Methoden zur Entscheidung dieser Frage liefern die folgenden Paragraphen.

Schwingt ein Massenpunkt auf einer gegebenen glatten Curve entweder in einem luftleeren Raum oder in einem Mittel, dessen Widerstand der Geschwindigkeit proportional ist, so ist, wie wir wissen, die Schwingung um die Gleichgewichtslage tautochron, wenn die Tangentialkraft  $P = m^2s$  ist, worin  $s$  die Länge des von der Gleichgewichtslage aus gemessenen Bogens und  $m$  eine Constante bedeutet, § 434. Wenn daher irgend eine rectificirbare Curve gegeben ist, so lässt sich die richtige Kraft, welche eine tautochrone Bewegung hervorbringt, sofort angeben. So ist *die Kettenlinie* eine tautochrone Curve, wenn eine Kraft  $m^2y$  in der Richtung der Ordinate angreift, da die Componente längs der Tangente offenbar  $m^2s$  ist. *Die logarithmische Spirale* ist für eine Centralkraft  $\mu r$  tautochron, die nach dem Pol gerichtet ist, weil die Componente längs der Tangente  $m^2s$  ist, wenn  $m^2 = \mu \cos^2 \alpha$  gesetzt wird; daher bleibt die Zeit bis zur Ankunft am Pol für alle Bogen dieselbe. Ebenso sind *die Epicycloide* und *Hypocycloide* tautochrone Curven für eine Centralkraft, die entweder die Richtung nach dem Centrum des festliegenden Kreises oder von diesem Centrum weg hat und dem Abstand proportional ist; denn, da  $r^2 = As^2 + B$ , so variirt die Componente längs der Tangente, nämlich  $\mu r dr/ds$  wie  $s$ . In allen diesen Fällen ist die Zeit bis zur Ankunft in der Gleichgewichtslage die kleinste positive Wurzel aus der Gleichung  $\operatorname{tg} nt = -n/k$  (§ 434), worin  $2kv$  der Widerstand und  $n^2 + k^2 = m^2$  ist. Die ganze Zeit von einer Lage momentaner Ruhe bis zur nächsten ist  $\frac{\pi}{n}$ .

§ 489. Wenn die Bewegungsgleichung  $\frac{d^2x}{dt^2} = F\left(\frac{dx}{dt}, x\right)$  ist und darin  $F$  eine homogene Function vom ersten Grad vorstellt, so ist für jede Ruhelage des Systems die Zeit bis zur Ankunft in die Lage, welche durch  $x = 0$  definiert wird, dieselbe.

Die homogene Function möge  $xf\left(\frac{1}{x} \frac{dx}{dt}\right)$  geschrieben werden. Es seien  $x$  und  $\xi$  die Coordinaten zweier Systeme, welche vom Zustand der Ruhe in zwei verschiedenen Lagen ausgehen und es sei anfänglich  $x = a$ ,  $\xi = \kappa a$ . Wie man sieht, verwandelt sich die Differentialgleichung des einen Systems in die des andern, wenn man  $\xi = \kappa x$  setzt. Wenn daher die Bewegung des einen Systems durch  $x = \varphi(t, A, B)$  gegeben ist, so ist es die des andern durch  $\xi = \kappa \varphi(t, A', B')$ . Zur Bestimmung der willkürlichen Constanten  $A, B$  und  $A', B'$  hat man genau dieselben Bedingungen, dass nämlich für  $t = 0$ ,  $\varphi = a$  und  $d\varphi/dt = 0$  sein muss. Da nur eine Bewegung aus einer einzelnen Reihe von Anfangsbedingungen folgen kann, so hat man  $A' = A$  und

$B' = B$ . Daher bleibt während der ganzen Bewegung  $\xi = \kappa x$  und  $x$  und  $\xi$  verschwinden somit gleichzeitig. Daraus folgt, dass die Bewegungen der beiden Systeme vollkommen ähnlich und die Zeiten gleich sind.

Dasselbe Resultat erhält man durch Integration der Differentialgleichung. Setzt man  $dx/dt = px$ , so findet man nach der Elimination von  $x$ , dass die Variablen  $p$  und  $t$  getrennt werden können, indem man zeigt, dass  $p$  eine Function von  $t + B$  ist. Daher wird durch eine leichte Integration  $x = A\varphi(t + B)$ . Für  $t = 0$  ist  $dx/dt = 0$  und daher  $\varphi'(B) = 0$ . Auf diese Art findet man  $B$ , und  $x$  verschwindet für jeden Werth von  $A$ , wenn  $\varphi(t + B) = 0$  ist.

Es ist zu beachten, dass, wenn die Kraft eine homogene Function von  $x$  und der Geschwindigkeit ist, die Bewegung nur in einem gewissen Sinn tautochron ist. Es kann vorkommen, dass das System erst nach unendlich langer Zeit in der durch  $x = 0$  bestimmten Lage ankommt oder dass die Zeit bis zur Ankunft imaginär ist. Nimmt man z. B. an, die homogene Function sei  $m^2x$ , worin  $m^2$  positiv ist, so bewegt sich das System vom Zustand der Ruhe aus immer von der Lage  $x = 0$  hinweg. Der Werth von  $x$  wird offenbar durch eine Exponentialfunction von  $x$  dargestellt, welche nie aufhört mit der Zeit zu wachsen. Man muss daher bei der Anwendung des Satzes sich vergewissern, ob die durch die Gleichung  $\varphi(t + B) = 0$  gegebene Zeit reell ist oder nicht.

Im Allgemeinen lässt sich dieses aus den bekannten Verhältnissen eines jeden einzelnen Falles bestimmen. Die beiden folgenden allgemeinen Regeln können als Führer bei der Entscheidung dienen. Soll die Zeit vor der Ankunft in der Lage  $x = 0$  reell und endlich und die nämliche von allen Anfangslagen aus sein, so muss die Lage  $x = 0$  offenbar eine Gleichgewichtslage sein. Denn wäre es nicht der Fall und man brächte das System im Zustand der Ruhe unbegrenzt nahe an diese Lage, so würde die Zeit bis zur Ankunft Null sein, es sei denn, die Beschleunigung wäre auch Null. Die Ankunftsstelle muss ferner eine Lage stabilen Gleichgewichtes sein für alle Verrückungen oder wenigstens für die auf derjenigen Seite der Gleichgewichtslage, auf welcher die Bewegung stattfinden soll.

#### § 490. Der Lagrange'sche Satz. Wenn

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \left(\frac{dx}{dt}\right)^2 \frac{f'(x)}{f(x)} + F\left\{\frac{dx}{dt}, f(x)\right\}$$

die Bewegungsgleichung ist, worin  $F$  eine homogene Function ersten Grades und  $f(x)$  eine beliebige Function von  $x$  bedeutet, so lässt sich zeigen, dass für jede Lage, in die man das System bringen kann, die Zeit bis zur Ankunft in der durch  $f(x) = 0$  bestimmten Lage die nämliche ist.

Dies ist der Lagrange'sche allgemeine Ausdruck für eine Kraft, welche eine tautochrone Bewegung verursacht. Er theilte die Formel in den Abhandlungen der Berliner Academie, 1765 und 1770 und an andern Orten mit. Einen andern sehr complicirten Beweis, der Variationen sowohl als Differentiationen nöthig machte, gab D'Alembert. Lagrange scheint geglaubt zu haben, sein Ausdruck für eine tautochrone Kraft sei sowohl nöthig als hinreichend. Dagegen haben Fontaine und Bertrand gezeigt, dass er zwar ausreicht aber nicht nothwendig ist. Gleichzeitig reducirte der Letztere den Beweis auf wenige einfache Sätze. In der neuesten Zeit hat Brioschi einen allgemeineren Ausdruck als den Lagrange'schen gegeben; er scheint aber keine Fälle tautochroner Bewegung zu enthalten, die nicht auch schon die Lagrange'sche Formel lieferte.

Auf die folgende Art kann man zu dem Lagrange'schen Resultat gelangen. Die Bewegung vom Zustand der Ruhe aus ist in Bezug auf den Punkt  $x = 0$  tautochron, wenn

$$\frac{d^2x}{dt^2} = xF\left(\frac{1}{x} \frac{dx}{dt}\right)$$

die Bewegungsgleichung ist. Setzt man  $x = \varphi(y)$ , so ergibt sich leicht

$$\varphi' \frac{d^2y}{dt^2} + \varphi'' \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 = \varphi F\left(\frac{\varphi'}{\varphi} \frac{dy}{dt}\right),$$

worin  $\varphi$  statt  $\varphi(y)$  gesetzt ist und die Accente wie gewöhnlich die Differentialquotienten bezeichnen. Substituirt man  $\frac{\varphi'}{\varphi} = f(y)$ , so hat man

$$\frac{d^2y}{dt^2} = \frac{f'}{f} \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 - \frac{1}{f} \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + fF\left(\frac{1}{f} \frac{dy}{dt}\right),$$

worin  $f$  an Stelle von  $f(y)$  geschrieben wurde. Die beiden letzten Glieder dieses Ausdrucks sind eine homogene Function ersten Grades von  $f$  und  $dy/dt$  und damit ist die Lagrange'sche Formel bewiesen. Dieser Beweis rührt von Bertrand her.

Die Bewegung geht von der Ruhe aus mit irgend einem Anfangswerth von  $x$  und endigt, wenn  $x = 0$  ist. Wird daher  $x = \varphi(y)$  gesetzt, so beginnt, wie ersichtlich, die Bewegung in der zweiten Gleichung mit  $dy/dt = 0$  und mit einem beliebigen Anfangswerth von  $y$  und endigt, wenn  $\varphi(y) = 0$  ist. Nun verschwindet im Allgemeinen  $dx/dt$  nicht für  $x = 0$ , da das System mit Geschwindigkeit in der Gleichgewichtslage ankommt. Weil aber  $dx/dt = \varphi'(y) dy/dt$  ist, so verschwindet auch  $\varphi'(y)$  nicht für  $x = 0$ . Daraus folgt, da  $\varphi = \varphi' \cdot f(y)$  ist, dass die Bewegung aufhört, wenn  $f(y) = 0$  ist.

§ 491. Die Wirkung eines widerstehenden Mittels. Wenn die Bewegung der Lagrange'schen Formel entsprechend in einem luftleeren Raum tautochron ist, so ist sie es auch in einem Mittel, dessen Widerstand der Geschwindigkeit proportional ist. Ein solcher Widerstand hat nur die Wirkung, dass er ein Zusatzglied, nämlich  $2kv$ , ersten Grades in die willkürliche Function  $F$  einführt. Der Satz rührt von Lagrange her.

Ist der Widerstand  $2kv + k'v^2$ , so gebe man der Lagrange'schen Gleichung die Gestalt

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{f'(x)}{f(x)} v^2 + A \frac{v^2}{f(x)} + Bv + f(x).$$

Setzt man den Coefficienten von  $v^2$  gleich  $k'$ , so ergibt sich durch Integration  $f(x) = Ce^{k'x} + \frac{A}{k'}$ . Wenn  $x$  von der Gleichgewichtslage aus, in welcher nach dem Lagrange'schen Satz  $f(x) = 0$  ist, gemessen wird, so muss  $A = -k'C$  sein. Daraus folgt, dass für dieses

*Widerstandsgesetz die Bewegung tautochron wird, wenn die gegebene Kraft  $P = C(e^{k'x} - 1)$  ist. Dies stimmt mit den von Euler und Laplace erhaltenen Resultaten überein.*

§ 492. Man kann einen leichten unabhängigen Beweis für diesen Satz geben. Um die Sache zu vereinfachen, sei das System ein Massenpunkt, der sich von der Ruhe aus auf einer glatten gegebenen Curve nach dem Punkt  $A$  der Gleichgewichtslage hin unter der Einwirkung einer Tangentialkraft  $P$  bewegt. Die Bewegungsgleichung ist

$$\frac{dv}{dt} - k'v^2 + 2kv = -P,$$

welcher man die Form geben kann

$$\frac{d}{dt}(e^u v) + 2k(e^u v) = -Pe^u,$$

vorausgesetzt, dass  $du/dt = -k'v$ , d. h.  $u = -k's$  ist. Setzt man  $e^u ds = dw$ , so wird

$$\frac{d^2w}{dt^2} + 2k \frac{dw}{dt} + Pe^{-k's} = 0.$$

Die Zeit bis zur Ankunft am Punkt  $w = 0$  ist unabhängig von dem Bogen, wenn man  $Pe^{-k's} = m^2w$  setzt, § 434. Nun ist  $w = -\frac{1}{k'}e^{-k's} + C$  und wenn  $s$  von der Lage aus gemessen wird, in der  $w = 0$  ist, so hat man  $k'C = 1$ . Daher ist  $P = \frac{m^2}{k'}(e^{k's} - 1)$ , was mit dem zuvor erhaltenen Resultat übereinstimmt.

Die Zeit bis zur Ankunft in die Lage  $w = 0$  wird durch die kleinste positive Wurzel der Gleichung  $\operatorname{tg} nt = -n/k$  bestimmt, worin  $n^2 = m^2 - k^2$  ist. Sollte  $k^2 > m^2$  sein, so gelangt der Massenpunkt in die Lage  $w = 0$  nach einer unendlich grossen Zeit, § 434.

Laplace bemerkt, dass der Ausdruck für die Kraft  $P$  von dem Coefficienten  $k$  desjenigen Theiles des Widerstandes, welcher der Geschwindigkeit proportional ist, nicht abhängt, und dass ebenso die Zeit bis zur Ankunft in der Gleichgewichtslage von dem Coefficienten  $k'$  des Theiles des Widerstandes, der wie das Quadrat der Geschwindigkeit variiert, unabhängig ist. *Mécanique céleste*, Bd. I, S. 38.

Beisp. 1. Man finde eine glatte Curve derart, dass die Bewegung eines schweren Massenpunktes in einem Mittel, dessen Widerstand  $2kv + k'v^2$  ist, tautochron wird. Da die Schwere die allein wirkende Kraft ist, so setzen wir

$$P = \frac{m^2}{k'}(e^{k's} - 1) = g \frac{dy}{ds}, \quad \text{also:} \quad gy = \frac{m^2}{k'^2}(e^{k's} - k's).$$

Beisp. 2. Man finde die Curve auch für den Fall, dass die gegebene Kraft nach dem Coordinatenanfang gerichtet und gleich  $\mu r^n$  ist.

§ 493. **Die Bewegung auf einer rauhen Cycloide.** Ein schwerer Massenpunkt gleitet von der Ruhe aus auf einer rauhen Cycloide, deren Axe vertical steht, in einem Mittel, dessen Widerstand der Geschwindigkeit proportional ist; man zeige, dass die Bewegung tautochron ist.

Der tiefste Punkt der Cycloide sei  $O$ ,  $P$  der Massenpunkt,  $OP = s$  so, dass der Bogen von  $O$  aus in einer der Bewegung entgegengesetzten

Richtung gemessen wird. Die Normale in  $P$  mache mit der Verticalen den Winkel  $\psi$ ,  $\rho$  sei Krümmungsradius im Punkt  $P$  und  $a$  der Durchmesser des Erzeugungskreises. Dann ist, nach bekannten Eigenschaften der Cycloide,  $s = 2a \sin \psi$ ,  $\rho = 2a \cos \psi$ . Es sei  $\mu$  der Reibungscoefficient,  $g$  die beschleunigende Kraft der Schwere und die Masse sei die Einheit. Wenn alsdann  $R$  der Druck auf den Massenpunkt ist, positiv genommen, wenn seine Richtung nach Innen geht und  $v$  die Geschwindigkeit, so hat man

$$\frac{dv}{dt} = \mu R - g \sin \psi - 2kv, \quad \frac{v^2}{\rho} = R - g \cos \psi \quad . \quad . \quad (1).$$

Durch Elimination von  $R$  wird die Bewegungsgleichung

$$\frac{dv}{dt} - \frac{\mu}{\rho} v^2 + 2kv + \frac{g}{\cos \psi} \sin(\psi - \varepsilon) = 0 \quad . \quad . \quad (2),$$

worin  $\tan \varepsilon = \mu$ . Man kann ihr die Form geben

$$\frac{d}{dt}(e^u v) + 2k(e^u v) + \frac{g}{\cos \psi} e^u \sin(\psi - \varepsilon) = 0,$$

wenn  $\frac{du}{dt} = -\mu \frac{v}{\rho}$ , d. h.  $u = -\mu \psi$  ist. Setzt man  $e^u ds = dw$ , so wird

$$\frac{d^2 w}{dt^2} + 2k \frac{dw}{dt} + \frac{g}{\cos \psi} e^{-\mu \psi} \sin(\psi - \varepsilon) = 0.$$

Nun ist

$$w = \int e^{-\mu \psi} \cdot 2a \cos \psi d\psi = 2a \cos \varepsilon e^{-\mu \psi} \sin(\psi - \varepsilon).$$

Die Gleichung reducirt sich daher auf

$$\frac{d^2 w}{dt^2} + 2k \frac{dw}{dt} + \frac{g}{2a \cos^2 \varepsilon} w = 0.$$

Die Bewegung ist daher tautochron, § 434. Auf welchen Punkt der Cycloide man den Massenpunkt im Zustand der Ruhe auch setzen mag, er wird stets den durch  $w = 0$ , d. h.  $\psi = \varepsilon$  bestimmten Punkt  $A$  in derselben Zeit erreichen. Dieser Punkt  $A$ , in welchem die tautochrone Bewegung endigt, ist offenbar eine äusserste Gleichgewichtslage, in welcher der Grenzwert der Reibung der Schwere grade das Gleichgewicht hält.

Die Zeit bis zur Ankunft in  $A$  wird durch die kleinste positive Wurzel der Gleichung  $\tan nt = -n/k$  gegeben, worin

$$n^2 + k^2 = g/2a \cos^2 \varepsilon$$

ist, während die ganze Zeit von einer momentanen Ruhelage bis zur nächsten  $\pi/n$  ist.

So lange sich der Massenpunkt in derselben Richtung bewegt, behält die Constante  $\mu$  dasselbe Vorzeichen, § 159. Die Bewegung ist daher durch

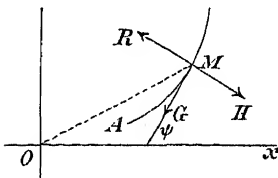
$$e^{-\mu\psi} \sin(\psi - \varepsilon) = Ae^{-k\psi} \sin(n\psi + B)$$

gegeben, worin, wie zuvor,  $n^2 + k^2 = g/2a \cos^2 \varepsilon$  und  $A$  sowie  $B$  Constante sind. Wenn der Massenpunkt in der nächsten Ruhelage ankommt, so beginnt er entweder zurückzukehren oder bleibt daselbst im Zustand der Ruhe, je nachdem der Werth von  $\psi$  in diesem Punkt grösser oder kleiner als der Reibungswinkel ist.

Der Tautochronismus der Bewegung lässt sich auch aus dem Lagrange'schen Theorem ableiten. Verfährt man wie in § 491 und setzt den Coefficienten von  $v^2$  gleich  $\frac{\mu}{\rho}$ , so erhält man einen Werth für  $f(s)$ , welcher die Lagrange'sche Gleichung zur Gleichung des Massenpunktes auf der Cycloide macht.

§ 494. **Historisches.** Dass eine glatte Cycloide in luftleerem Raum Tautochrone ist, hat zuerst Huygens in seinem *Horologium oscillatorium*, 1673 bewiesen. Newton dehnte den Satz auf den Fall aus, in welchem der Widerstand  $2kv$  ist und bewies auch, dass eine glatte Epicycloide für eine Centralkraft tautochron ist, welche variirt, wie der Abstand. Dass die Schwingungen auf einer Cycloide tautochron sind, wenn die Curve rauh ist, hat Bertrand aus der Lagrange'schen Formel abgeleitet. Liouville, Bd. XIII, 1848. Er schreibt den Satz Necker zu, der ihn in den *Mémoires des savants étrangers*, Bd. IV, 1763 veröffentlichte. Euler bestimmte praktisch die Kraft, welche eine glatte Curve tautochron macht, wenn der Widerstand  $k'v^2$  ist, *Mechanica* 1736. Sein Resultat dehnte später Laplace auf den Fall aus, in welchem der Widerstand  $2kv + k'v^2$  ist, *Mécanique céleste*, Bd. 1, S. 36. Puiseaux schrieb eine Abhandlung über glatte tautochrone Curven in luftleerem Raum und ebenso für schwere Körper, wenn der Widerstand  $k'v^2$  ist, Liouville, Bd. IX, 1844. Er bemerkt, er habe den Gebrauch von Reihen, ähnlich denen von Poisson in seiner *Mécanique* angewandten, vermieden; § 197. Er bespricht den Tautochronismus im luftleeren Raum, wenn die Kraft centrale Richtung hat und wie der Abstand variirt, und zeigt, dass die Curve eine Epicycloide, Hypocycloide oder eine gewisse Spirale ist. Hâton de la Goupillièrre beweist, dass die Epicycloide, wenn rauh, ebenfalls tautochron ist und weist kurz darauf hin, dass der Tautochronismus auch bei einem Widerstand  $2kv$  bestehen bleibt, Liouville, Bd. XIII. Darboux zeigt in einer Anmerkung zu der *Mécanique* von Despeyrous, 1884, dass, wenn die Reibung in Rechnung gezogen wird, die einzigen tautochronen Curven die von Puiseaux besprochenen sind.

§ 495. **Die Bewegung auf einer beliebigen rauhen Curve.** Ein Massenpunkt bewegt sich, von der Ruhe ausgehend, auf einer rauhen Curve von gegebener Gestalt in einem Mittel, dessen Widerstand  $k'v^2$  ist, unter der Wirkung von Kräften, die nur von der Lage des Punktes abhängen. Zu beweisen, dass die nothwendige Bedingung dafür, dass die Zeit bis zur Ankunft in der Gleichgewichtslage von dem beschriebenen Bogen nicht abhängt,



$$m^2 \rho = \frac{dP}{d\psi} - (\pi + k' \rho) P$$

ist, worin  $P = G - \mu H$ , den Ueberschuss der Tangentialkraft  $G$  über den Theil  $\mu H$  der Reibung und  $m$  eine Constante bedeutet. Man finde auch die für die Zurücklegung des Weges erforderliche Zeit.

Es sei  $A$  der Punkt, in dem die tautochrone Bewegung endigt,  $M$  die Lage des Massenpunktes zur Zeit  $t$ ,  $AM = s$ , so dass also  $s$  von  $A$  aus in der Richtung gemessen wird, die der Bewegung entgegengesetzt ist. Die Tangente in  $M$  möge mit der  $x$ -Achse

den Winkel  $\psi$  machen und  $\psi$  möge gleichzeitig mit  $s$  wachsen. Die Tangential- und Normalcomponenten der Kraft seien  $G$  und  $H$ , die Richtung der Tangentialcomponente  $G$  geht nach  $A$  zu und die der Normalcomponente  $H$  nach auswärts d. h. der Richtung entgegengesetzt, in welcher  $\varrho$  gemessen wird. Wir nehmen an,  $\varrho$  bleibe für den ganzen Bogen positiv.

Die Bewegungsgleichungen sind daher

$$\frac{v^2}{\varrho} = R - H, \quad v \frac{dv}{ds} = \mu R - G + k v^2 \quad \dots \quad (1).$$

Da der Massenpunkt von der Ruhe ausgeht, so sind, wie man sieht,  $R$  und  $H$  Anfangs gleich und haben daher dasselbe Vorzeichen. Wir wollen annehmen,  $H$  sei während der ganzen Bewegung positiv, so dass die gegebene Kraft den Punkt nach auswärts drängt. Daraus folgt, dass auch  $R$  während der ganzen Bewegung positiv ist. *Die Reibung wird daher fortwährend durch  $\mu R$  dargestellt ohne jede Unstetigkeit in dem Vorzeichen von  $\mu$ , wie sie eintreten würde, wenn  $R$  das Vorzeichen wechselte ohne eine entsprechende Änderung in der Richtung der Reibung.* (Siehe § 159.) Durch Elimination von  $R$  findet man

$$v \frac{dv}{ds} = \mu \frac{v^2}{\varrho} + k v^2 - (G - \mu H) \quad \dots \quad (2).$$

Es sei  $P = G - \mu H$  die ganze gegebene Kraft, welche den Massenpunkt längs der Tangente gegen den Punkt  $A$  drängt. Es lässt sich beweisen, dass  $P$  während der ganzen Bewegung, bis der Punkt  $A$  erreicht ist, positiv sein muss. Wäre  $P$  in irgend einem Punkt  $B$  Null, so würde der Massenpunkt, wenn er im Zustand der Ruhe nach  $B$  gebracht wird, dort im Gleichgewicht verharren und die Zeit bis zur Ankunft in  $A$  würde daher von allen Punkten aus nicht dieselbe sein. Man ersieht daraus auch, dass im Punkt  $A$  die Kraft  $P$  Null sein muss. (Siehe § 490.) Setzt man  $ds/d\psi$  für  $\varrho$ , so wird Gleichung (2)

$$\frac{dv^2}{d\psi} - 2(\mu + k\varrho) v^2 = -2\varrho P;$$

daher

$$v^2 e^{-2\mu\psi - 2k's} = c^2 - \int_{\alpha}^{\psi} 2\varrho P e^{-2\mu\psi - 2k's} d\psi,$$

worin  $\alpha$  den Winkel bezeichnet, den die Tangente in  $A$  mit der  $x$ -Axe macht. Da  $\psi$  während der ganzen Bewegung grösser als  $\alpha$  ist, so muss die Integrationsconstante  $c^2$  positiv sein.

Es ist zu beachten, dass das Integral auf der rechten Seite von der Lage des Punktes, von welchem der Massenpunkt ausgeht, unabhängig ist und nur von der Gleichung zwischen der Bogenlänge und dem Neigungswinkel der Tangente der Curve und dem Punkt  $A$  abhängt. Wir wollen das Integral mit  $z^2$  bezeichnen und uns  $z$  als Coordinate des Massenpunktes denken. Es ist dann  $z = c$ , wenn der Punkt von der Ruhe ausgeht, und  $z = 0$ , wenn er in dem durch  $\psi = \alpha$  bestimmten Punkt  $A$  ankommt.

Ist die Curvengleichung gegeben, so kann man sich vorstellen,  $\psi$  und  $s$  seien als Functionen von  $z$  ausgedrückt. Setzt man dann

$$e^{-\mu\psi - k's} ds = \varphi(z) dz,$$

so ist die Uebergangszeit  $T$  von  $z = c$  bis  $z = 0$ , wie man leicht sieht,

$$T = \int_0^c \frac{\varphi(z) dz}{\sqrt{(c^2 - z^2)}}.$$



Um die Form der Function  $\varphi$  zu finden, welche dieses Resultat von dem Bogen unabhängig macht, setze man den Differentialquotienten von  $T$  nach  $c$  gleich Null. Substituirt man  $z = c\xi$ , so wird

$$T = \int_0^1 \frac{\varphi(c\xi) d\xi}{V(1-\xi^2)}, \quad \text{daher} \quad \frac{dT}{dc} = \int_0^1 \frac{\varphi'(c\xi) \xi d\xi}{V(1-\xi^2)} = 0.$$

Das Integral kann nur dann für alle Werthe von  $c$  Null sein, wenn  $\varphi'(c\xi) = 0$  ist. Wäre  $\varphi'(c\xi)$  nicht Null, so könnte man dadurch, dass man  $c$  klein genug annimmt, bewirken, dass  $\varphi'(c\xi)$  dasselbe Vorzeichen von  $\xi = 0$  bis  $\xi = 1$  behält; jedes Element des Integrals würde auf diese Weise dasselbe Vorzeichen haben und ihre Summe könnte nicht Null sein. Setzt man nun  $\varphi(z) = \frac{1}{m}$ , so wird die Uebergangszeit  $T = \pi/2m$ .

Schreibt man der Kürze wegen  $u = -\mu\psi - k's$ , so ist  $P$  aus den beiden Gleichungen

$$m e^u = \frac{dz}{ds}, \quad 2 \int_{\alpha}^{\psi} \varrho P e^{2u} d\psi = z^2$$

zu ermitteln. Integriert man die erste von  $\psi = \alpha$  bis  $\psi$ , d. h.  $z = 0$  bis  $z$ , und setzt in die zweite ein, so erhält man  $\left\{ m \int e^u ds \right\}^2 = 2 \int P e^{2u} ds$ . Durch Differentiation und Reduction ergibt sich

$$P = m^2 e^{-u} \int_{\alpha}^{\psi} e^u \varrho d\psi \quad \text{und daher} \quad m^2 \varrho = \frac{dP}{d\psi} - (\mu + k' \varrho) P.$$

Daraus, dass  $P$  für  $\psi = \alpha$  verschwindet, ergibt sich die Bestätigung des Satzes, dass der Punkt, in welchem die tautochrone Bewegung endigt, eine Gleichgewichtslage sein muss; § 489.

Beisp. Man zeige, dass dieses Gesetz für die Kraft in dem Lagrange'schen Ausdruck für tautochrone Kräfte enthalten ist.

Vergleicht man die Lagrange'sche Gleichung in § 491 mit Gl. (2) dieses Paragraphen Glied für Glied, so findet man einen Ausdruck für  $f(s)$ , d. h.  $-P$ , welcher mit dem obigen übereinstimmt.

Dadurch, dass die Bedingung des Tautochronismus aus dem Lagrange'schen Ausdruck abgeleitet wurde, haben wir bewiesen, dass die Bedingung *ausreichend* die Art, wie der Beweis in diesem Paragraphen geführt wurde, zeigt, dass auch *nothwendig* ist.

. Beisp. *Euler's Theorem*. Ein Massenpunkt bewegt sich auf einer Curve unter der Wirkung einer Tangentialkraft  $P$ , die eine Function des  $s$  des Massenpunktes von der Gleichgewichtslage  $A$  ist, und die zur Ankunft in  $A$  von einer beliebigen Ruhelage aus hängt von dem Abstand  $s$  ab. Man beweise, dass, wenn die Bewegung im luftleeren Raum endet,  $P = cs$  und dass  $P$  in einem Mittel, dessen Widerstand  $k'v^2$  ist,  $P = c(e^{k's} - 1)$  ist.

Der Satz wird am besten auf die Art wie in § 495 bewiesen und nicht als specieller Fall aus dem allgemeinen Theorem abgeleitet.

§ 497. Man bestimme, wie die Zeit bis zur Ankunft in der Gleichgewichtslage  $A$  in § 495 sich ändern würde, wenn der Widerstand in  $2kv + k'v^2$  umgeändert wird.

Die Bewegungsgleichung (2) des § 495 wird jetzt

$$\frac{dv}{dt} = \mu \frac{v^2}{\varrho} + k'v^2 - 2kv - P$$

und kann, wie in § 495, geschrieben werden

$$\frac{d}{dt}(e^u v) + 2k(e^u v) + e^u P = 0,$$

vorausgesetzt, dass  $u = -\mu\psi - k's$  ist. Setzt man  $e^u ds = dw$ , so wird

$$\frac{d^2 w}{dt^2} + 2k \frac{dw}{dt} + e^u P = 0.$$

Die Zeit bis zur Ankunft in dem durch  $w=0$  bestimmten Punkt  $A$  wird unabhängig von dem Bogen, wenn man das letzte Glied  $m^2 w$  gleich setzt. Es ist dann  $P = m^2 e^{-u} \int e^u ds$ , also derselbe Werth von  $P$  wie zuvor. Die Zeit bis zur Ankunft in der Gleichgewichtslage ist jetzt durch die kleinste positive Wurzel der Gleichung  $\tan nT = -n/k$  gegeben, worin  $n^2 = m^2 - k^2$ , während die Zeit von einer Ruhelage bis zur nächsten  $\pi/n$  ist, § 434.

§ 498. *Epicycloiden u. s. w.* Unter der Annahme, dass die Curve rauh, der Widerstand  $2kv$ , die Kraft central und gleich  $\lambda r$  und die tautochrone Periode gegeben sei, zu beweisen, dass die Differentialgleichung der Bahn  $\varrho = ip$  ist, worin  $i(1 + m^2/\lambda) = 1 + \mu^2$  und  $\lambda$  positiv ist, wenn die Kraft abstossend wirkt. Die Constante  $m$  ist eine Function der Periode, deren Werth in § 497 angegeben wurde; ist der Widerstand Null, so wird die tautochrone Periode  $\pi/2m$ . Man bestimme auch die in der Gleichung enthaltenen Curven.

In diesem Fall ist  $G = -\lambda dp/d\psi$ ,  $H = \lambda p$ ; siehe die Fig. S. 450. Da  $k=0$  ist, so nimmt die Bedingung für den Tautochronismus die einfachere Form  $\mu^2 \varrho = dP/d\psi - \mu P$  an. Setzt man für  $P$  seinen Werth  $G - \mu H$  ein, so erhält man sofort das gewünschte Resultat.

Um die Curven  $\varrho = ip$  zu erhalten, beachte man, dass bei der Epicycloide, wenn  $a$  und  $b$  die Radien des festen bez. rollenden Kreises sind,  $\frac{\varrho}{p} = 1 - \frac{a^2}{(a+2b)^2}$  ist, während bei der Hypocycloide  $b$  negativ ist.

(1) Wenn  $i$  einen negativen Werth hat, so ist die Curve eine Hypocycloide. Dazu gehört, dass  $m^2/\lambda$  algebraisch kleiner als  $-1$  ist, während  $\mu$  jeden beliebigen Werth haben kann. Die Centrakraft ist daher eine anziehende Kraft.

(2) Ist  $i$  positiv und kleiner als die Einheit, so ist die Curve eine Epicycloide. Dazu gehört, dass  $m^2/\lambda > 0$  und  $\mu^2 < m^2/\lambda$ ; die Centrakraft stösst daher ab.

(3) Ist  $i$  positiv und grösser als die Einheit, so nimmt die Curve andere Formen an. Setzt man  $i = 1 + \alpha^2$ , so wird ihre Differentialgleichung offenbar  $d^2 p/d\psi^2 = \alpha^2 p$ . Lässt man die  $x$ -Axe um den Coordinatenanfang rotiren und dabei den geeigneten Winkel beschreiben, so lässt sich das Integral auf eine der Formen

$$p = \frac{1}{2} A (e^{\alpha\psi} \pm e^{-\alpha\psi}), \quad p = A e^{\pm \alpha\psi}$$

reduciren. Da bei jeder Curve die Projection des Radiusvectors auf die Tangente  $dp/d\psi$  ist, so hat man

$$r^2 = p^2 + (dp/d\psi)^2, \quad \cotg(\psi - \theta) = dp/pd\psi.$$

Man kann daher die Polarcoordinaten  $r, \theta$  durch  $\psi$  als Hülfswinkel ausdrücken. Zeichnet man nun die Curven auf, so kommt man zu zwei Arten von Spiralen, je nachdem man die oberen oder unteren Vorzeichen nimmt und ausserdem zu einer logarithmischen Spirale, wenn der Winkel  $\beta$  durch die Gleichung  $\sin^2 \beta = 1/i$  gegeben ist.

Da die beiden Arten von Spiralen nicht durch den Coordinatenanfang gehen, so findet man den Gleichgewichtspunkt, in welchem die tautochrone Bewegung endigt, dadurch, dass man  $\tan \varphi = 1/\mu$  macht, unter  $\varphi$  den spitzen Winkel verstanden, den der Radiusvector mit der Tangente bildet. Bei der logarithmischen Spirale ist der Coordinatenanfang der Gleichgewichtspunkt, denn die Centrakraft

verschwindet in ihm. Bei der ersten Art von Spirale variirt der Winkel  $\varphi$ , d. h.  $\psi \sim \theta$ , von  $\frac{1}{2}\pi$  für  $\psi = 0$  bis  $\text{arc tg } 1/\alpha$ , wenn  $\psi$  unendlich gross wird, und bei der zweiten Art variirt  $\varphi$  von Null bis  $\text{arc tg } 1/\alpha$ . Daher hat die erste oder die zweite Art von Spirale einen Gleichgewichtspunkt und ist tautochron, je nachdem  $\mu < \text{oder } > \alpha$ ; wobei der Bogen, der zu beschreiben ist, auf der Seite der Gleichgewichtslage liegen muss, auf welcher  $\text{tg } \varphi < 1/\mu$  ist. Die logarithmische Spirale wird ebenfalls tautochron sein und der Bogen am Kräftecentrum endigen, wenn  $\mu > \alpha$ .

Aus dem gegebenen Werth von  $i$  geht hervor, dass  $\mu^2 - \alpha^2 = i m^2/\lambda$ ; daher ist  $m^2/\lambda$  positiv oder negativ, d. h. die Centralkraft stösst ab oder zieht an, je nachdem  $\mu > \alpha$  oder  $< \alpha$  ist. Da  $i > 1$ , so muss im ersten Fall  $\mu^2 > m^2/\lambda$  sein.

Man hat also die folgenden Fälle: (1) die Kraft zieht an; ist  $m^2/\lambda < -1$ , so ist die Curve eine Hypocycloide; ist  $m^2/\lambda > -1$  aber  $< 0$ , so ist die Curve die erste Spirale oder die logarithmische Spirale, je nach der Lage des Punktes, in welchem die Bewegung endigen soll; (2) die Kraft stösst ab, d. h.  $m^2/\lambda > 0$ ; die Curve ist eine Epicycloide oder die zweite Spirale, je nachdem  $\mu^2 < \text{oder } > m^2/\lambda$ . Ist  $m^2/\lambda = -1$ , so wird der Krümmungsradius  $\rho$  unendlich gross und die Curve eine grade Linie.

§ 499. Beisp. 1. Ein System, das einen Freiheitsgrad hat, ist durch  $2T = M^2 \theta'^2$ ,  $U = f(\theta)$  definit. Man beweise, dass die Bewegung tautochron ist, wenn  $U = C \left\{ \int M d\theta \right\}^2$ . [Man setze  $M d\theta = ds$  und benutze § 496.] [Appell.]

Beisp. 2. Ein System, das zwei Freiheitsgrade hat, ist durch

$$2T = A\theta'^2 + 2B\theta'\varphi' + C\varphi'^2, \quad U = F(\theta, \varphi)$$

definit, worin  $A, B, C$  gegebene Functionen von  $\theta, \varphi$  sind. Man stelle den Zwang fest, der in das System eingeführt werden muss, damit die Bewegung tautochron werde. [Man nehme an  $\varphi = f(\theta)$  und benutze Beisp. 1.]

[Appell, Comptes Rendus, 1892.]

Beisp. 3. Wenn die Bewegungsgleichung  $\frac{dv^2}{ds} = pv^2 + q$  ist, worin  $p$  und  $q$  gegebene Functionen von  $s$  sind, zu beweisen, dass die Bedingung für den Tautochronismus  $pq - 2dq/ds = 4m^2$  ist. (Man folge der Methode in § 494.)

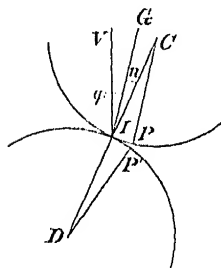
[Appell, Traité de Mécanique, Bd. 1, 1893.]

## Schwingungen von Cylindern und Kegeln in zweiter Annäherung.

§ 500. Stabilitätsbedingung für Cylinder bei Annäherungen höherer Ordnungen. Wenn wie in § 441 ein schwerer Cylinder im Gleichgewicht auf einer Seite eines festliegenden rauhen Cylinders ruht, so besteht die Stabilitätsbedingung darin, dass der Schwerpunkt innerhalb eines gewissen Kreises, des sogenannten Stabilitätskreises, liegen muss. Liegt der Schwerpunkt auf dem Umfang dieses Kreises, so heisst das Gleichgewicht zunächst *neutral*, im Allgemeinen jedoch ist es entweder stabil oder unstabil und ist nur ein höherer Grad der Annäherung erforderlich, um zwischen beiden Zuständen zu unterscheiden. Jeder Grad der Annäherung lässt sich einfach dadurch erreichen, dass man eine gewisse Grösse so oft differenzirt, bis man zu einem Resultat kommt, welches von Null verschieden ist. Das Vorzeichen dieses Resultates entscheidet über die Stabilität oder Unstabilität des Gleichgewichtes. Die Grösse des Resultates in Verbindung mit gewissen anderen Elementen setzt uns in den Stand, die Bewegungsgleichung zu bilden.

§ 501. Im Gleichgewichtszustand liegt der Schwerpunkt in der durch den Berührungspunkt gehenden Verticalen. Der Körper möge sich um irgend einen Winkel  $\theta$

gedreht haben, so dass in der Figur  $G$  die Lage des Schwerpunktes und  $I$  der Berührungspunkt ist.  $IV$  möge die Verticale sein,  $CID$  die gemeinschaftliche Normale der beiden Cylinder,  $C$  und  $D$  die Krümmungsmittelpunkte ihrer



Querschnitte. Es sei  $q = CI$ ,  $q' = DI$  und  $\frac{1}{z} = \frac{1}{q} + \frac{1}{q'}$ , so dass  $z$  der Radius der relativen Krümmung ist.

Es möge  $IG = r$ , die Winkel  $GIC = n$ ,  $GIV = q$  und  $IP = ds$  sein. Man hat dann die vier folgenden Hilfs-gleichungen

$$\begin{aligned} \frac{dr}{ds} &= \sin n, & \frac{dn}{ds} &= \frac{\cos n}{r} - \frac{1}{q} \\ \frac{dq}{ds} &= \frac{1}{z} - \frac{\cos n}{r}, & \frac{ds}{d\theta} &= z. \end{aligned}$$

Da  $GI$  der Radiusvector der oberen Curve auf einen in Bezug auf ihn festliegenden Coordinatenanfang  $G$  bezogen und  $\frac{\pi}{2} - n$  der Winkel ist, den dieser Radiusvector mit der Tangente in  $I$  bildet, so ergibt sich die erste dieser Hilfs-gleichungen von selbst. Um die zweite zu erhalten, beachte man, dass  $C$  der Krümmungsmittelpunkt ist, der Abstand  $CG$  daher ebenso wie der Krümmungsradius constant bleibt, wenn sich  $I$  die kleine Strecke  $ds$  längs des Bogens bewegt. Nun ist

$$GC^2 = r^2 + q^2 - 2qr \cos n$$

und daher

$$0 = (r - q \cos n) dr + qr \sin n du.$$

Substituiert man für  $dr$  seinen Werth aus der ersten Hilfsgleichung, so erhält man unmittelbar die zweite. Was die dritte angeht, so bemerke man, dass  $q + n$  der Winkel ist, den die Normale  $DI$  an die untere im Raum festliegende Curve mit einer Geraden bildet, die ebenfalls im Raum festliegt. Daher ist  $\frac{dq}{ds} + \frac{dn}{ds} = \frac{1}{q}$ , woraus die dritte Gleichung folgt, wenn man die zweite zu Hülfe nimmt. Die vierte Gleichung wurde in § 441 bewiesen; der Beweis lässt sich folgendermassen zusammenfassen. Sind  $CP$ ,  $DP'$  die beiden Normalen, welche sich in einer Geraden befinden, wenn sich der Körper um den Winkel  $d\theta$  gedreht hat, so ist  $d\theta = PCI + P'DI$ , woraus sich  $d\theta = ds \left( \frac{1}{q} + \frac{1}{q'} \right) = \frac{ds}{z}$  ergibt.

§ 502. Im Gleichgewichtszustand muss sich der Schwerpunkt des Körpers vertical über dem Stützpunkt befinden. Daher ist  $\varphi = 0$ . In jeder andern Lage des Körpers ist der Werth von  $\varphi$  durch die Reihe

$$\frac{d\varphi}{ds} s + \frac{d^2\varphi}{ds^2} \frac{s^2}{1 \cdot 2} + \text{etc.}$$

gegeben.

Wenn in dieser Reihe der erste Coefficient, welcher nicht verschwindet, positiv und von ungrader Ordnung ist, so bewegt sich offenbar die Linie  $IG$  nach derselben Seite der Verticalen, nach welcher sich auch der Körper bewegt. Das Gleichgewicht ist daher unstabil für Verrückungen nach beiden Seiten der Gleichgewichtslage. Ist der Coefficient negativ, so ist es stabil. Ist das Glied dagegen von einer graden Ordnung, so ändert es mit  $s$  sein Vorzeichen nicht; das Gleichgewicht ist daher für eine Verrückung nach der einen Seite stabil, nach der andern unstabil.

Der erste Differentialquotient ist durch die dritte Hilfsgleichung gegeben; den zweiten findet man aus dieser, wenn man sie differenzirt und für  $\frac{dn}{ds}$  und  $\frac{dr}{ds}$

aus den andern substituirt; den dritten durch Wiederholung des Verfahrens und so jeden der übrigen, wenn es nöthig ist.

§ 503. Verschwindet der erste Differentialquotient  $\frac{d\varphi}{ds}$  nicht, so ist das Gleichgewicht stabil oder unstabil, je nachdem sein Vorzeichen negativ oder positiv ist. Dies führt zu der Bedingung, dass  $r$  kleiner bez. grösser als  $z \cos n$  sein muss, was mit der in § 441 gegebenen Regel übereinstimmt.

Ist  $\frac{d\varphi}{ds} = 0$ , so hat man  $r = z \cos n$  und der Schwerpunkt liegt mithin auf dem Umfang des Stabilitätskreises. Durch Differentiation ergibt sich

$$\frac{d^2\varphi}{ds^2} = \frac{1}{ds} \left( \frac{1}{z} \right) + \frac{2 \sin n \cos n}{r^2} - \frac{\sin n}{r \varrho} \quad \dots \quad (1)$$

und wenn man für  $r$  und  $z$  ihre Werthe einsetzt

$$\frac{d^2\varphi}{ds^2} = \frac{d}{ds} \left( \frac{1}{\varrho} + \frac{1}{\varrho'} \right) + \operatorname{tg} n \left( \frac{1}{\varrho} + \frac{1}{\varrho'} \right) \left( \frac{1}{\varrho} + \frac{2}{\varrho'} \right).$$

Ist dieser Differentialquotient nicht Null, so ist das Gleichgewicht für Verrückungen nach der einen Seite der Gleichgewichtslage stabil, für solche nach der andern Seite unstabil.

Ist dagegen auch  $\frac{d^2\varphi}{ds^2} = 0$ , so differenzire man (1) noch einmal. Nach einigen Reductionen findet man

$$\frac{d^3\varphi}{ds^3} = \frac{d^2}{ds^2} \left( \frac{1}{z} \right) + \frac{1}{z \varrho} \left( \frac{1}{\varrho} + \frac{2}{\varrho'} \right) - \frac{\operatorname{tg} n}{z} \frac{d}{ds} \left( \frac{1}{\varrho} \right) - \frac{3 \operatorname{tg}^2 n}{z^2} \left( \frac{1}{\varrho} + \frac{2}{\varrho'} \right).$$

Das Gleichgewicht ist stabil oder unstabil, je nachdem der Ausdruck negativ oder positiv ist.

Ist der Querschnitt ein Kreis oder eine Gerade, so lassen sich diese Ausdrücke sehr vereinfachen.

§ 504. Beisp. 1. Ein schwerer Körper ruht in neutralem Gleichgewicht auf einer rauhen Ebene, die mit dem Horizont den Winkel  $n$  macht. Man zeige,

das Gleichgewicht, wenn  $\frac{d\varphi}{ds}$  nicht gleich  $\operatorname{tg} n$  ist, stabil für Verrückungen

einen Seite und unstabil für solche nach der andern Seite ist. Wenn diese

g aber besteht, so ist das Gleichgewicht stabil oder unstabil, je nachdem

oder negativ ist.  $ds$  wird dabei positiv genommen in der Richtung

welche die Ebene *hinabgeht*.

Man zeige, dass damit auch gesagt ist, dass das Gleichgewicht stabil oder unstabil ist, je nachdem der Mittelpunkt des Kegelschnittes innigster Berührung des oberen Körpers ausserhalb oder innerhalb des Stabilitätskreises liegt.

Beisp. 2. Wenn eine convexe Kugeloberfläche auf der Spitze einer festliegenden convexen Kugeloberfläche in zunächst neutralem Gleichgewicht ruht, so ist das Gleichgewicht in der That unstabil. Wenn aber die concave Seite der unteren Fläche nach oben geht, so ist das Gleichgewicht stabil oder unstabil, je nachdem ihr Radius grösser oder kleiner als der doppelte der oberen Fläche ist und wird in der That neutral, wenn ihr Radius doppelt so gross als der der oberen Fläche wird.

Die bewegliche Kugelfläche muss in diesem Beispiel natürlich so äquilibrirt werden, dass sich ihr Schwerpunkt in einer Höhe über dem Stützpunkt

befindet, für welche das Gleichgewicht bei einer ersten Annäherung neutral ist. Wenn z. B. der Radius der unteren Fläche doppelt so gross als der ihrige ist, so liegt ihr Schwerpunkt auf ihrer Oberfläche, d. h. in einem Abstand vom Berührungspunkt, der doppelt so gross als ihr Radius ist. Der Schwerpunkt liegt ausserhalb oder innerhalb der oberen Fläche, je nachdem der Radius der unteren mehr oder weniger als das doppelte desjenigen der oberen beträgt und wenn die untere Fläche eben ist, so liegt der Schwerpunkt im Centrum. In diesem letzteren Fall ist ferner das Gleichgewicht in der That neutral.

§ 505. *Schwingungen von Cylindern bei Annäherungen höherer Ordnungen. Bis zu einem beliebigen Grad der Annäherung die allgemeine Bewegungsgleichung eines Cylinders zu bilden, der um eine Gleichgewichtslage schwingt.*

Behält man die bisherige Bezeichnung bei, so ist mit Bezug auf die Fig. S. 455 die Gleichung der lebendigen Kraft

$$(k^2 + r^2) \left( \frac{d\theta}{dt} \right)^2 = C + 2U,$$

worin  $U$  die Kräftefunction und  $k$  den Trägheitsradius des Körpers für seinen Schwerpunkt bedeutet. Differenzirt man sie nach  $\theta$ , wie in § 448, so wird

$$(k^2 + r^2) \frac{d^2\theta}{dt^2} + r \frac{dr}{d\theta} \cdot \left( \frac{d\theta}{dt} \right)^2 = \frac{dU}{d\theta}.$$

Die rechte Seite der Gleichung ist nach § 340 das Moment der Kräfte um die Momentanaxe und daher in unserm Fall  $gr \sin \varphi$ . Substituirt man für  $\frac{dr}{d\theta}$  aus den Hilfsleichungen in § 501, so wird die Bewegungsgleichung mithin

$$(k^2 + r^2) \frac{d^2\theta}{dt^2} + rz \sin n \left( \frac{d\theta}{dt} \right)^2 = gr \sin \varphi.$$

Man verfare so, wie in § 502. Man entwickle jeden Coefficienten nach dem Taylor'schen Theorem nach Potenzen von  $\theta$ , welches man so zu wählen hat, dass es in der Gleichgewichtslage verschwindet. Dazu hat man die successiven Differentiale dieser Coefficienten bis auf eine beliebige Ordnung nöthig und muss sie durch die Anfangswerthe von  $\varphi$ ,  $n$  und  $r$  allein ausdrücken. Die ersten Differentiale sind in den Hilfsleichungen, § 501, enthalten. Um die andern zu finden, differenzire man diese Hilfsleichungen successive so lange, bis man so viele Differentialquotienten erhalten hat, als erforderlich sind.

§ 506. *Die Gleichung bei erster Näherung zu bilden.* Die Anfangs- oder Gleichgewichtswerthe von  $n$  und  $r$  seien  $\alpha$  und  $h$ . Die Gleichung ist dann

$$(h^2 + k^2) \frac{d^2\theta}{dt^2} = gr \sin \varphi.$$

Man hat  $r \sin \varphi$  bis zur ersten Potenz von  $\theta$  zu finden. Nun erhält man durch Substitution aus den Hilfsleichungen

$$\frac{d}{d\theta} (r \sin \varphi) = \frac{dr}{d\theta} \sin \varphi + r \frac{d\varphi}{d\theta} \cos \varphi = z \sin n \sin \varphi + rz \cos \varphi \left( \frac{1}{z} - \frac{\cos n}{r} \right)$$

und durch Reduction daher

$$\frac{d}{d\theta} (r \sin \varphi) = r \cos \varphi - z \cos(\varphi - n).$$

Im Gleichgewicht liegt  $G$  in der durch den Berührungspunkt gehenden Verticalen und ist daher der Anfangswerth von  $\varphi$  Null. Die Bewegungsgleichung ist mithin

dieselbe wie in § 441.

§ 507. *Die Gleichung bei zweiter Annäherung zu bilden.* Der bereits gefundene erste Differentialquotient von  $r \sin \varphi$  muss noch einmal differenziert werden und nur die Glieder sind beizubehalten, welche für  $\varphi = 0$  nicht verschwinden. Man hat

$$\frac{d^2}{d\theta^2} (r \sin \varphi) = z^2 \left\{ z \cos \alpha \frac{d}{ds} \frac{1}{z} + \frac{\sin 2\alpha}{h} - \frac{\sin \alpha}{\rho} \right\}.$$

Die Bewegungsgleichung bei zweiter Annäherung ist daher

$$\begin{aligned} (k^2 + h^2 + 2hz \sin \alpha \cdot \theta) \frac{d^2 \theta}{dt^2} + hz \sin \alpha \left( \frac{d\theta}{dt} \right)^2 = \\ = - (z \cos \alpha - h) g \theta + g z^2 \left\{ z \cos \alpha \frac{d}{ds} \frac{1}{z} + \frac{\sin 2\alpha}{h} - \frac{\sin \alpha}{\rho} \right\} \frac{\theta^2}{2} \end{aligned}$$

und kann auf die Form gebracht werden

$$\frac{d^2 \theta}{dt^2} + a^2 \theta = - b^2 \left( \frac{d\theta}{dt} \right)^2 + c \theta^2,$$

worin

$$a^2 = \frac{z \cos \alpha - h}{k^2 + h^2} g, \quad b^2 = \frac{hz \sin \alpha}{k^2 + h^2},$$

$$c = 2a^2 b^2 + \frac{1}{2} g \frac{z^2}{k^2 + h^2} \left\{ z \cos \alpha \frac{d}{ds} \frac{1}{z} + \frac{\sin 2\alpha}{h} - \frac{\sin \alpha}{\rho} \right\} \text{ ist.}$$

Nimmt man an,  $a$  sei von Null verschieden, so erhält man die Auflösung

$$\theta = A \sin(at + B) + \frac{c - a^2 b^2}{2a^2} A^2 + \frac{c + a^2 b^2}{6a^2} A^2 \cos 2(at + B),$$

worin  $A$  und  $B$  zwei unbestimmte Constante sind und das erste Glied die erste Annäherung darstellt. Daraus geht hervor, dass die erste Annäherung im Wesentlichen genau ist, es sei denn, dass  $a$  klein, d. h. das Gleichgewicht nahezu neutral wäre. Die kleinen Glieder haben die Wirkung, dass sie die Schwingungsweite nach der unteren Seite des Gleichgewichtes um ein Geringes grösser als die nach der oberen machen.

§ 508. *Schwingungen von Kegeln bei Annäherungen höherer Ordnungen.* Die allgemeine Bewegungsgleichung für einen schweren Kegel zu finden, der auf einem festliegenden vollkommen rauhen Kegel rollt.

Wir wollen ebenso verfahren und dieselbe Bezeichnung benutzen, wie in § 483. Ein Unterschied existirt jedoch. Da sich der bewegliche Kegel nicht im Gleichgewicht befindet, so liegt sein Schwerpunkt nicht in der Verticalebene  $WOI$ . Wie zuvor seien die Bogen  $IG = r$ ,  $IW = z$  und die Winkel  $GIC = n$ ,  $WIC = \psi$ .

Ist  $\Omega$  die Winkelgeschwindigkeit des beweglichen Kegels um seine Momentanaxe  $OI$ , so hat man nach § 448

$$K^2 \frac{d\Omega}{dt} + \frac{1}{2} \Omega \frac{dK^2}{dt} = L \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1),$$

worin  $L$  das Moment der Schwere um  $OI$  bezeichnet.

Bei dem Rollen des Kegels bewegt sich der Punkt  $I$  auf dem Durchschnitt des festen Kegels mit der Kugel.  $IP = ds$  sei der in der Zeit  $dt$  beschriebene

Bogen. Am vorteilhaftesten ist es,  $s$  zur Coordinate zu nehmen, durch welche die Lage des Kegels bestimmt wird.

Auf dieselbe Art wie in § 484 findet man

$$\Omega = \frac{ds \sin(\varphi + \varphi')}{dt \sin \varphi \sin \varphi'} \dots \dots \dots (2).$$

Um nun das Moment der Schwere um  $OI$  zu ermitteln, gehen wir wieder so vor, wie in § 485. Zerlegt man die Schwere in der Richtung und senkrecht zu  $OI$ , so hat die erstere Componente kein Moment, während die letztere  $g \sin z$  ist. Diese letztere möge parallel zur Geraden  $KO$  wirken,  $KWI$  ist alsdann ein Bogen in einer verticalen Ebene. Das gesuchte Moment ist dann das Product aus den Componenten der Schwere und der Projection von  $OG$  auf  $OH$ , wenn  $H$  der Pol des Bogens  $KWI$  ist. Das Moment ist daher  $gh \sin z \cos HG$ . Um  $\cos HG$  zu finden, verlängere man  $HG$  bis zum Durchschnitte  $M$  mit  $KWI$ . In dem rechtwinkligen Dreieck  $GIM$  ist dann

$$\sin GM = \sin GI \sin GIM.$$

Das Moment  $L$  ist daher

$$L = -gh \sin r \sin z \sin(n - \psi) \dots (3).$$

Wenn die Form der Kegel bekannt ist, so kann man  $K$ ,  $r$ ,  $z$ ,  $n$  und  $\psi$  durch  $s$  oder irgend eine andere beliebige Coordinate ausdrücken. Die Bewegungsgleichung ist dann bekannt.

Die Ausführung geschieht mittelst der vier folgenden Hilfspgleichungen:

$$\left. \begin{aligned} \frac{dr}{ds} &= \sin n, & \frac{dz}{ds} &= \sin \psi \\ \frac{dn}{ds} &= \cotg r \cos n - \cotg \varphi \\ \frac{d\psi}{ds} &= \cotg z \cos \psi + \cotg \varphi' \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (4).$$

Der Beweis derselben wird dem Leser überlassen. Man erhält sie auf dieselbe Art, wie früher bei dem Cylinder, mit dem einzigen Unterschied, dass man sphärische Dreiecke statt ebener zu benutzen hat.

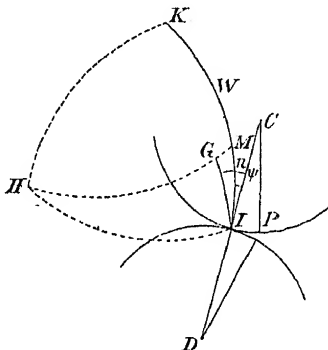
§ 509. *Bis zu einem beliebigen Grad der Annäherung die Bewegungsgleichung eines graden Kegels zu finden, der um eine Gleichgewichtslage schwingt.*

Da der Kegel grade ist, so hat man  $K^2$  constant. Die Bewegungsgleichung ist daher  $K^2 \frac{d\Omega}{dt} = L$ , worin  $\Omega$  und  $L$  die in den Gleichungen (2) und (3) in § 508 gegebenen Werthe haben.

Wir bemerken, dass in der Gleichgewichtslage  $L = 0$  und daher  $n = \psi$  ist. Die Coordinate  $s$  möge so gewählt sein, dass auch sie in dieser Lage verschwindet. Man hat daher nun  $\Omega$  und  $L$  nach Potenzen von  $s$  zu entwickeln. Dazu benutze man das Taylor'sche Theorem und erhält so

$$L = \left( \frac{dL}{ds} \right) s + \left( \frac{d^2 L}{ds^2} \right) \frac{s^2}{1 \cdot 2} + \dots,$$

worin die Klammern angeben, dass  $s$  nach der Ausführung der Differentiation gleich Null zu setzen ist. Diese Differentiationen lassen sich sämtlich ohne





Schwierigkeit ausführen, wenn man den in (3) für  $L$  gegebenen Ausdruck benutzt und beständig die Werthe für  $\frac{dr}{ds}$ ,  $\frac{dz}{ds}$ , etc. aus den Hülfsleichungen (4) substituirt. Man kann  $\mathcal{Q}$  auf dieselbe Art behandeln.

Die Bildung der Bewegungsgleichung wird auf diese Art auf die Differentiation eines bekannten Ausdrucks und die Substitution bekannter Functionen reducirt.

Man kann diese Methode benutzen, um die Bewegungsgleichung bis zur ersten Potenz zu erhalten. Man hat so

$$K^2 \frac{d\mathcal{Q}}{dt} = -gh \frac{d}{ds} \{ \sin r \sin z \sin(n - \psi) \} s.$$

Substituirt man für  $\mathcal{Q}$  und behält auf der rechten Seite nur die Glieder bei, die für  $\psi = n$  nicht verschwinden, so erhält man

$$\frac{K^2}{gh} \frac{d^2 s}{dt^2} = - \left\{ \sin(z - r) \cos n \frac{\sin \varrho \sin \varrho'}{\sin(\varrho + \varrho')} - \sin r \sin z \right\} s,$$

was mit dem Resultat in § 433 übereinstimmt.

Ist der Kegel kein grader, so kann man  $K^2$  durch  $r$  und  $n$  ausdrücken und auf dieselbe Art verfahren.

§ 510. Beisp. Ein schwerer grader Kegel ruht in neutralem Gleichgewicht auf der Oberfläche eines andern graden Kegels, der im Raum festliegt und ihre beiden Spitzen fallen zusammen. Man zeige, dass die Bewegungsgleichung mit Einschluss der Quadrate kleiner Grössen

$$\frac{K^2}{gh} \frac{d^2 s}{dt^2} = - \frac{\sin \varrho \sin \varrho'}{\sin(\varrho + \varrho')} \frac{\sin(r - z) \sin(\varrho - r)}{\sin r \sin \varrho} \{ \cotg z + 2 \cotg r - \cotg \varrho \} \frac{s^2}{6}$$

ist.

## Noten.

### 1) Ueber die vier äquivalenten Punkte eines Körpers.

In § 44 wurde gezeigt, dass man vier Massenpunkte von gleicher Masse finden kann, welche das nämliche Trägheitsmoment, wie ein beliebiger Körper besitzen, und angegeben, wie man ihre Lage mittelst eines Tetraeders bestimmen kann. Aus § 42, Beisp. 3 lässt sich jedoch noch eine andere Construction ableiten, der ein Ellipsoid zu Grunde liegt.

In § 42 handelt es sich kurz um das Folgende. Das Legendre'sche Ellipsoid für den Schwerpunkt des Körpers ist, wie in § 29 erklärt wurde, von gleichem Moment einerseits wie der Körper, und andererseits auch vier gleichen Massenpunkten, von denen jeder die Masse  $\frac{3M}{20} \frac{1}{n^2}$  hat und an seine richtige

Stelle gebracht ist, und einem fünften Massenpunkt äquivalent, der den Rest der ganzen Masse des Körpers hat und im Schwerpunkt  $O$  liegt. Setzt man nun die beliebige Grösse  $n^2$  gleich  $3/5$ , so ist die Masse des fünften Punktes Null.

Um die vier äquivalenten Punkte eines Körpers zu ermitteln, construirt man ein Ellipsoid, das dem Legendre'schen Ellipsoid für den Schwerpunkt  $O$  ähnlich ist, dessen Dimensionen aber in dem Verhältniss  $1 : \sqrt{3/5}$  reducirt sind. Die gesuchten Punkte sind vier auf diesem Ellipsoid liegende Punkte derart, dass ihre excentrischen Linien (§ 40) gleiche Winkel miteinander machen; mit andern Worten, sie liegen in den vier Eckpunkten des in das Ellipsoid eingeschriebenen Tetraeders von kleinstem Volumen.

Ist der Körper gegeben, so kann man das Ellipsoid gleichen Momentes aus seiner Definition in § 29 ableiten und die vier Massenpunkte dann an ihre richtige Stelle bringen. Wenn *umgekehrt* die Lage der vier Massenpunkte, sagen wir  $ABCD$ , bekannt ist, so ist das Ellipsoid gleichen Moments für ihren Schwerpunkt dem das Tetraeder  $ABCD$  umschreibenden Ellipsoid ähnlich, dessen Mittelpunkt im Schwerpunkt liegt und dessen lineare Dimensionen in dem Verhältniss  $\sqrt{3/5} : 1$  vergrössert sind. Wie in § 43, ist das Ellipsoid gleichen Moments auch dem eingeschriebenen Ellipsoid ähnlich, welches jede Seitenfläche in ihrem Schwerpunkt berührt, dessen lineare Dimensionen aber im Verhältniss  $1 : \sqrt{15}$  grösser sind. Es ist auch dem Ellipsoid ähnlich, welches jede Kante in ihrem Mittelpunkt berührt und dessen lineare Dimensionen man in dem Verhältniss  $1 : \sqrt{5}$  vergrössert hat.

Die Halbaxen des eingeschriebenen Ellipsoids sind in § 46 durch eine Gleichung dritten Grades bestimmt worden, deren Coefficienten Functionen der Seitenflächen und Kanten des Tetraeders sind. Die Lage der Axen ist auch geometrisch bestimmt worden. Die Hauptträgheitsmomente ergeben sich daraus leicht.

Man kann die Anzahl der äquivalenten Punkte nur dann auf weniger als vier reduciren, wenn eine Ebene vorhanden ist, für welche das Trägheitsmoment des Körpers Null wird. Die äquivalenten Punkte liegen selbstverständlich in dieser Ebene. *Wenn der Körper eine Lamelle ist, die in der  $xy$ -Ebene liegt, so wird das Legendre'sche Ellipsoid eine dünne Scheibe (stark abgeplattetes Ellipsoid), die von der Ellipse*

$$\frac{X^2}{\Sigma m x^2} + \frac{Y^2}{\Sigma m y^2} = \frac{5}{M}$$

begrenzt wird. Reducirt man die Liniendimensionen dieses Ellipsoids im Verhältniss  $1 : \sqrt{3/5}$ , so ist die 5 auf der rechten Seite durch eine 3 zu ersetzen. Einen der Massenpunkte kann man passender Weise auf das Ende  $C$  der  $Z$ -Axe der reducirten Scheibe setzen; er liegt mithin schliesslich im Schwerpunkt  $O$ . Die übrigen drei befinden sich dann auf einem elliptischen Schnitt, welcher der  $xy$ -Ebene parallel ist und die Verlängerung von  $CO$  derart in einem Punkt  $N$  trifft, dass der Schwerpunkt aller vier Punkte in  $O$  liegt. Offenbar ist  $ON = \frac{1}{3} OC$  und ist der elliptische Schnitt dem Hauptschnitt durch die  $xy$ -Ebene ähnlich, hat aber lineare Dimensionen, die in dem Verhältniss  $3:2\sqrt{2}$  reducirt sind.

Die Lamelle ist jetzt gleichen Momentes mit vier Massenpunkten. Soll der im Schwerpunkt liegende eliminirt werden, so sind die Massen der übrigen drei von  $\frac{1}{4}M$  auf  $\frac{1}{8}M$  zu bringen und mithin ihre Abstände vom Schwerpunkt in dem Verhältniss von  $2 : \sqrt{3}$  zu vermindern. Die drei Massenpunkte liegen somit auf einer Ellipse, welche man erhält, wenn man die linearen Dimensionen der die reducirt Scheibe begrenzenden Ellipse in dem aus den beiden obigen Verhältnissen zusammengesetzten Verhältniss, d. h. in dem Verhältniss von  $\sqrt{3} : \sqrt{2}$  reducirt. Die Ellipse, auf welcher die drei Punkte liegen, ist daher durch

$$\frac{X^2}{\Sigma m x^2} + \frac{Y^2}{\Sigma m y^2} = \frac{2}{M}$$

gegeben. Damit stimmt das Resultat überein, zu dem wir in § 44 auf anderem Weg kamen.

## 2) Ueber den Beweis der Lagrange'schen Gleichungen.

Der Beweis der Lagrange'schen Gleichungen in den §§ 397 bis 399 lässt sich etwas anders führen, wenn man als Lemma eine Verallgemeinerung des in dem ersten Beispiel des letztgenannten Paragraphen gegebenen Theorems benutzt.

**Lemma.**  $L$  sei irgend eine Function der Variablen  $x, y$ , etc.,  $x', y'$ , etc. und  $t$ . Wenn man  $x, y$ , etc. als Functionen irgend welcher unabhängiger Variablen  $\theta, \varphi$ , etc. und  $t$  ausdrückt, so wird

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \theta'} - \frac{\partial L}{\partial \theta} = \left( \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial x'} - \frac{\partial L}{\partial x} \right) \frac{\partial x}{\partial \theta} + \left( \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial y'} - \frac{\partial L}{\partial y} \right) \frac{\partial y}{\partial \theta} + \text{etc.} \quad (\text{A}).$$

Um den Beweis zu führen, setze man

$$x = f(t, \theta, \varphi, \text{etc.}) \quad (1),$$

daher

$$x' = f_t + f_\theta \theta' + \text{etc.} \quad (2),$$

mit ähnlichen Ausdrücken für  $y, z$ , etc., worin die etc. sich auf die übrigen

Variablen  $\varphi, \psi$ , etc. beziehen und die Indices partielle Differentialquotienten angeben.

Da  $\theta$  in den Ausdruck  $L$  sowohl durch  $x, y$ , etc., als  $x', y'$ , etc. eingeführt wird, während  $\theta'$  nur mittelst  $x', y'$ , etc. auftritt, so erhält man die partiellen Differentialquotienten

$$\frac{\partial L}{\partial \theta} = \frac{\partial L}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial \theta} + \frac{\partial L}{\partial x'} \frac{\partial x'}{\partial \theta} + \text{etc.}, \quad \frac{\partial L}{\partial \theta'} = \frac{\partial L}{\partial x'} \frac{\partial x'}{\partial \theta'} + \text{etc.} \quad (3).$$

Differenziert man (2), so ergibt sich

$$\frac{\partial x'}{\partial \theta'} = f_{\theta} = \frac{\partial x}{\partial \theta}$$

und daraus

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \theta'} - \frac{\partial L}{\partial \theta} &= \left( \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial x'} - \frac{\partial L}{\partial x} \right) \frac{\partial x}{\partial \theta} + \text{etc.} \\ &+ \frac{\partial L}{\partial x'} \left( \frac{d}{dt} f - \frac{\partial x'}{\partial \theta} \right) + \text{etc.} \end{aligned}$$

Da

$$\frac{d}{dt} f = f_{\theta t} + f_{\theta \theta'} \theta' + \text{etc.} = \frac{\partial x'}{\partial \theta}$$

ist, so verschwinden nach (2) die Glieder in der zweiten Zeile. Das Lemma ist somit ohne die Annahme bewiesen worden, dass die Beziehungen zwischen den Variablen  $x, y$ , etc. und  $\theta, \varphi$ , etc. von  $t$  unabhängig sind.

Um nun mit diesem Lemma die Lagrange'schen Gleichungen zu beweisen, setze man  $L = T + U$ , worin

$$2T = \Sigma m(x'^2 + y'^2 + z'^2)$$

ist und  $x, y, z$  die Coordinaten des Massenpunktes  $m$  darstellen.

Man erhält

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \theta'} - \frac{\partial L}{\partial \theta} = \Sigma m \left( x'' - \frac{\partial U}{\partial x} \right) \frac{\partial x}{\partial \theta} + \text{etc.} \quad (4).$$

Die rechte Seite dieser Gleichung ist, wenn sie mit  $\delta\theta$  multiplicirt wird, das virtuelle Moment aller Kräfte  $m \left( x'' - \frac{\partial U}{\partial x} \right)$  für eine Verrückung  $\delta\theta$ , während man die entsprechenden Verrückungen von  $x, y$ , etc. durch Differentiation der Gleichung (1) nach  $\theta$ , ohne  $t$  zu variiren, findet. Nach dem D'Alembert'schen Princip befinden sich diese Kräfte aber im Gleichgewicht und ist die Summe ihrer virtuellen Momente für irgend eine mit den zur Zeit  $t$  geltenden geometrischen Gleichungen vereinbare Verrückung Null. Die rechte Seite der Gleichung (4) verschwindet mithin. Damit ist die Lagrange'sche Gleichung der zweiten Art bewiesen.

Setzt man  $T$  statt  $L$  in (4), so ist

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \theta'} - \frac{\partial T}{\partial \theta} = \Sigma m x'' \frac{\partial x}{\partial \theta} + \text{etc.} \quad (5).$$

Da die rechte Seite, wenn sie mit  $\delta\theta$  multiplicirt wird, das virtuelle Moment der Effectivkräfte  $m x''$ , etc. ist, so stellt der Lagrange'sche Ausdruck auf der linken Seite, nachdem man ihn mit  $\delta\theta$  multiplicirt hat, ebenfalls das virtuelle Moment der Effectivkräfte des Systems für eine Verrückung  $\delta\theta$  dar.

Ebenso erhält man, wenn man  $T$  anstatt  $L$  in (3) schreibt,

$$\frac{\partial T}{\partial \theta'} = \Sigma m x' \frac{\partial x}{\partial \theta} + \text{etc.}$$

Die linke Seite ist daher nach Multiplication mit  $\delta\theta$  die Summe der virtuellen Momente der Bewegungsgrößen der verschiedenen Massenpunkte des Systems für eine Verrückung  $\delta\theta$ .

Die Fundamentalgleichung (A) ist aus den Principien der Differentialrechnung ohne irgend welche Bezugnahme auf mechanische Theoreme abgeleitet worden. Setzt man  $L = T + U$ , so drückt sie aus, dass die Summe der virtuellen Momente der Effectiv- und gegebenen Kräfte für eine Verrückung  $\delta\theta$  immer denselben Werth hat, durch welche Coordinaten man auch diese Kräfte ausdrücken mag.



# Anmerkungen

von H. Liebmann.

Es sollen in den folgenden Anmerkungen die vom Verfasser gegebenen Literaturnachweise vervollständigt werden, und namentlich soll zur Ergänzung der englischen Literaturangaben auf einige nichtenglische Werke und Abhandlungen hingewiesen werden, in denen der Leser verschiedene der im Text behandelten oder angedeuteten Fragestellungen weiter verfolgen kann. (Auf pag. 78 und 144 sind bereits solche Zusätze gemacht.)

## Kapitel I.

§ 8, pag. 5. Eine ähnliche Zusammenstellung findet man bei:

Reye, Einfache Darstellung der Trägheitsmomente ebener Figuren (Zeitschrift deutscher Ingenieure XIX, pag. 401).

Eine Aufzählung der in der Praxis am häufigsten zu berechnenden Trägheitsmomente findet man auch in:

Des Ingenieurs Taschenbuch. Die Hütte, 1. Abtheilung, 16. Auflage. Berlin 1896.

§ 26, pag. 21. Eine von Hesse eingeführte, dem reciproken Trägheitsellipsoid confocale Fläche ist das „imaginäre Bild“ eines Körpers. Seine Gleichung ist:

$$\frac{X^2}{\sum m x^2} + \frac{Y^2}{\sum m y^2} + \frac{Z^2}{\sum m z^2} = -\frac{1}{M}.$$

Man vergleiche hierzu die 25<sup>te</sup> Vorlesung von:

Hesse, Vorlesungen über analytische Geometrie des Raumes. Leipzig 1876.

§ 36—38, pag. 26—29. Wir machen darauf aufmerksam, dass die ersten Arbeiten von Routh über Ersetzung eines Körpers durch ein äquivalentes Punktsystem (z. B. Note of the moments of inertia of a triangle. Quart. Journal of Mathematics VI, 1863, pag. 70—78) älter sind, als die von Reye 1865 veröffentlichte, welche pag. 29 citirt wird.

§ 60—63, pag. 45—48. Das System sämtlicher Hauptträgheitsachsen bildet einen „tetraedralen Complex“, und die in diesen Paragraphen gegebenen Sätze beruhen auf den Eigenschaften dieser Liniencomplexe. Wie sich die Theorie der tetraedralen Complexe allmählig entwickelt hat, kann man nachlesen in Kap. 8, § 2 von:

S. Lie u. G. Scheffers, Geometrie der Berührungstransformationen I. Leipzig 1896.

(Die ersten Entwicklungen von Routh über das System der Hauptträgheitsachsen finden sich bereits in der ersten Auflage des Originals, 1860.)

## Kapitel III.

§ 103, pag. 85. Der in Deutschland und Oesterreich für vergleichende Schwere-messungen übliche Pendelapparat ist beschrieben in der Arbeit:

R. v. Sterneek, Der neue Pendelapparat des k. k. Militär-geographischen Instituts (Z. f. Instrumentenkunde VIII, 1888).

Mit demselben werden eben jetzt zahlreiche Messungen auch auf ausländischen Stationen vorgenommen.

§ 108, pag. 90. Neuerdings sucht man nach andern absoluten Einheiten für die Länge. Man vergleiche hierzu:

A. Michelson, Die Interferenzialmethoden in der Metrologie und die Aufstellung einer Wellenlänge als absolute Einheit. Journal de Physique 3 (3). 1894, p. 5—22.

#### Kapitel IV.

§ 165, pag. 151. Eine Zusammenstellung der älteren Versuche über Reibung eines Wagens findet man bei:

M. Rühlmann, Allgemeine Maschinenlehre III, 2. Auflage. Braunschweig 1877.

Kapitel I: Ueber Strassenfuhrwerke.

§ 167, pag. 153. Hierzu vergleiche man:

M. Rühlmann, Geschichte der technischen Mechanik. Leipzig 1885. § 41: Geschichte der Ermittlung der Steifheit von Seilen.

Auf die sehr verstreute neuere technische Literatur über diesen Gegenstand können wir hier nicht eingehen.

§ 175, pag. 158. Die Mallet'sche Erdbebentheorie ist veraltet und sie wird hier nur als ein Beispiel der Untersuchungen über den Stoss gebracht. Moderne Anschauungen und Erfahrungen findet man ausser in den am Schlusse des Paragraphen genannten Schriften insbesondere niedergelegt in:

*Bolletino della Società Seismologica Italiana*, und *Seismological Journal of Japan*.

An deutscher Literatur vergleiche man den Bericht von Dr. E. Rudolf: Die Fortschritte der Geophysik der Erdrinde. (Geographisches Jahrbuch XVIII, 1895.)

#### Kapitel V.

§ 235—237, pag. 213—215. Untersuchungen über Analogie zwischen Statik und Kinematik sind in Deutschland in erster Linie von Möbius angestellt worden. So findet man einen Beweis des am Schluss von § 237 ausgesprochenen Satzes in:

Möbius, Gesammelte Werke III, Leipzig 1886. Beweis eines neuen von Herrn Chasles in der Statik entdeckten Satzes, nebst einigen Zusätzen (zuerst erschienen in Crelle's Journal IV, 1829).

Man vergleiche auch die folgende Arbeit:

Möbius, Ueber die Zusammensetzung unendlich kleiner Drehungen. Ges. Werke I pag. 545 (Crelle's Journ. XVIII, 1838),

sowie:

Möbius, Lehrbuch der Statik. Leipzig 1837 (Werke III).

Die in § 237 genannten „conjugirten Kräfte“ und „conjugirten Axen“ sind nichts anderes als conjugirte Axen eines Möbius'schen Nullsystems. Man vergl.:

Möbius, Ueber eine besondere Art dualer Verhältnisse zwischen Figuren im Raum. Werke I, p. 489—515 (Crelle X, 1833).

Den Namen „Nullsystem“ hat v. Staudt in seiner Geometrie der Lage 1847 eingeführt. Auf spätere Darstellungen der Beziehung zur Liniengeometrie, die ausserordentlich zahlreich sind, können wir hier in Kürze nicht eingehen.

§ 278, pag. 249. Wegen der Zusammensetzung endlicher Schraubungen und Drehungen vergleiche man noch Kap. I, § 7 von:

F. Klein und A. Sommerfeld, Ueber die Theorie des Kreisels. Heft I. Leipzig 1897, ferner:

Study, Von den Bewegungen und Umlegungen. (Math. Annalen 39, 1891.)

#### Kapitel VII.

§ 333, pag. 302. Eine Auseinandersetzung über die ältere Geschichte des Princip der Erhaltung der lebendigen Kraft findet man auch in dem bekannten Buch von

Mach, Die Entwicklung der Mechanik (3. Auflage, Leipzig 1897) und im zweiten Kapitel von:

E. Dühring, Kritische Geschichte der allgemeinen Principien der Mechanik. Berlin 1873.

§ 393, pag. 347. Das Princip des kleinsten Zwanges hat Hertz in verallgemeinerter Form unter dem Namen: „Princip der geradesten Bahn“ als Grundgesetz der Mechanik aufgestellt auf pag. 162 seines Werkes:

Die Principien der Mechanik. Leipzig 1894.

## Kapitel VIII.

§ 399, pag. 357. Die Lagrange'sche Function heisst bei Helmholtz „kinetisches Potential“. Vgl.:

II. v. Helmholtz, Ueber die physikalische Bedeutung des Princips der kleinsten Wirkung. (Wissenschaftliche Abhandlungen III, Leipzig 1895, zuerst erschienen in Crelle's Journal 100, 1886.)

§ 402, pag. 360. Für die Grössen  $u = \frac{\partial T}{\partial \theta}$  u. s. w. gebrauchen Klein und

Sommerfeld in ihrem oben citirten Buch die Bezeichnung „Impulscoordinaten“ in Anlehnung an den von Poinsot, Lord Kelvin u. A. ausgebildeten Begriff des Impulses, für welchen man im Englischen auch momentum (linear bez. angular m.) sagt.

§ 410, pag. 369. Die in der Anmerkung gegebene Transformation ist eine „Berührungstransformation“. Mit solchen Transformationen operirt Jacobi beständig in seinen *Vorlesungen über Mechanik* (herausgegeben von Clebsch, Berlin 1864). Später ist der Begriff der Berührungstransformation in seiner Allgemeinheit von Lie entwickelt worden, der auch den Namen „Berührungstransformation“ eingeführt hat. In abstracter Form ist die Theorie dargestellt in dem Buch:

Lie, Theorie der Transformationsgruppen II. Leipzig 1890.

Eine sehr schöne Einführung in die Theorie gibt das oben (zu § 60) citirte Buch von Lie und Scheffers.

§ 422, p. 378. Die von J. J. Thomson als „kinosthenische“ bezeichneten Coordinaten nennt Helmholtz „cyclische“, in einer Reihe von Arbeiten, welche in Band III seiner „Wissenschaftlichen Abhandlungen“ zusammengestellt sind, und von denen die erste:

Studien zur Statik monocyclischer Systeme  
zuerst 1884 in den Berl. Akademieberichten erschienen ist. Ueber die Aufstellung der Lagrange'schen Gleichungen im Falle cyclischer Coordinaten vergleiche man auch pag. 320 ff. des ersten Bandes von

Thomson und Tait, *Natural philosophy*. 2<sup>d</sup> ed. Cambridge 1886.

§ 427, pag. 382. Die „Dissipationsfunction“ wird ausführlich behandelt auf pag. 136 ff. des Bandes I von

Rayleigh, *The theory of sound*. 2<sup>d</sup> edition. London 1894.

§ 429, pag. 382. Systeme mit Bedingungsgleichungen, welche die Differentialquotienten der Coordinaten enthalten, heissen nach Hertz „nicht holonome Systeme“ im Gegensatz zu „holonomen“ (Principien der Mechanik, pag. 95). Doch ist die Mechanik solcher Systeme schon früher behandelt von

A. Voss, Ueber die Differentialgleichungen der Mechanik (Math. Annalen 25, 1885).

Die Geltung der Integralprincipien für nicht holonome Systeme ist untersucht in der Arbeit:

O. Hölder, Ueber die Principien von Hamilton und Maupertuis. Göttinger Nachrichten 1896.

## Kapitel IX.

§ 462, pag. 418. Den Satz, dass mehrfache Wurzeln der Lagrange'schen Determinante nicht Lösungen von der Form  $(At + B) \sin pt$  ergeben, hat zuerst Weierstrass bewiesen. (Berliner Akademieberichte 1858.)

§ 444, pag. 433. Eine kurze Zusammenstellung der wichtigsten bis 1895 angestellten Messungen über Erddichte findet man in den „Deutschen Geographischen Blättern“ XVIII, Bremen 1895, pag. 63. Auf eingehende Angaben der Fachliteratur in diesem grade jetzt so viel bearbeitetem Gebiet müssen wir hier verzichten.

§ 490, pag. 446. In sehr allgemeiner Weise hat das Problem der Tautochrone angefasst

S. Königs in *Comptes Rendus* 1893, 116, pag. 966—968.



# Namenregister.

Die Zahlen beziehen sich auf die Seiten.

- Airy, Sir G. 54, 82, 90, 418, 427, 433.  
D'Alembert 52, 54, 64, 302, 446.  
Appell 264, 315, 332, 337, 386, 454.  
Arago 418.  
d'Arcy, Chevalier 64.
- Baille 432.  
Baile 86, 87, 89, 427, 431, 432.  
Ball, Sir R. 122, 379.  
Bashforth, 106.  
Bernoulli, Daniel 315, 317.  
Bernoulli, Johann 54, 64, 301, 315, 317.  
Bertrand 284, 328, 329, 341, 446, 447, 450.  
Bessel 87, 89.  
Binet 2, 42.  
Biot 418.  
Bochet 144.  
Bohnenberger 83.  
Bonnet, O. 123.  
Borda 85, 418.  
Bossut 101.  
Boulengé 106.  
Boys, C. V. 432.  
Brioschi 446.  
Du Buat 86, 87.
- Carnot 27, 335, 336.  
Cassini 418.  
Cauchy 17, 122, 331.  
Cavendish 427.  
Cayley 17, 101, 223.  
Chasles 205, 223, 466.  
Du Chatelet 301.  
Chelini 168.  
Chree, C. 111.  
Clausius 333, 334.  
Clebsch 21, 260, 467.  
Cohen 278.  
Coriolis 169, 292, 315.  
Cornu 432.  
Coulomb 143, 149, 153.  
De Courtivron 319.
- Darboux 386, 450.  
Darwin, G. H. 352.  
Delaunay 341.  
Denison 78, 81.  
Deprez, Marcel 264.  
Despeyroux 315, 450.  
Dirichlet, Lcjeune 1, 8, 425.
- Donkin 248, 369.  
Dulong 79.  
Dühring, E. 466.
- Earnshaw 426.  
Euler 2, 54, 64, 105, 204, 262, 448, 450.  
Everett, Prof. 90.  
Ewing, J. A. 143.
- Fergusson, S. P. 111.  
Ferussac 205.  
Flammarion 159.  
Fleming, Jenkin 143.  
Fontaine 446.  
Froude 330.
- Galilei 328.  
Galton, Capt. Douglas 144.  
Gauss 82, 345, 346, 347.  
Geleich 78.  
Graham, Georg 78, 81.  
Grashof 144.  
Gregory, Olinthus 106.  
Guyon 264.
- Hamilton, Sir W. R. 304, 357, 369, 375, 467.  
Hall, Asaph 262.  
Hâton de la Goupillière 2, 450.  
Haughton, Dr. S. 107, 108, 159.  
Heaviside, Capt. 87.  
Helmholtz, H. v. 315, IV, 467.  
Henneberg 144.  
Herrmann 144.  
Hertz IV, 466, 467.  
Hesse 15, 465.  
Hirn 144.  
Hölder, O. 467.  
Holditch 400.  
Hüllen 331.  
Hutton, Dr. 105, 107, 108, 109.  
Huyghens 54, 75, 317, 450.
- Jacobi 261, 304, 467.  
James, Oberstl. 433.  
Jellett 144.  
Jolly 433.  
Jullien 39, 49.
- Kater, Captain 78, 83, 84, 86, 89.  
Kelvin, Lord 34, 42, 272, 304, 309, 341, 352, 360, 417, 427, 467.

- Kimball 144.  
 Klein, F. 466, 467.  
 König 122.  
 Königs, G. 467.  
 Krüger, A. 78.  
  
 Lagrange 66, 284, 341, 357, 361, 366,  
     410, 425, 446.  
 Langley 111.  
 Laplace 88, 258, 259, 262, 279, 280, 281,  
     448, 450.  
 Lardner 78.  
 Lecornu 264.  
 Legendre 23.  
 Leibnitz 301, 302.  
 Levy, Maurice 264.  
 Lie, S. 465, 467.  
 Liebmann, H., Dr. 465.  
 Liouville 1, 259, 386.  
 Lütroth 144.  
 Lyell, Sir Ch. 71.  
  
 Mach, 466.  
 Mairan 85.  
 Mallet 71, 158, 466.  
 Marey 264.  
 Maskelyne, Dr. 433.  
 Maupertuis 467.  
 Maxwell 273.  
 Meidner 78.  
 Melde 78.  
 Michell, Rev. John 427.  
 Michelson, A. 465.  
 Milne 71, 159.  
 Möbius 347, 466.  
 Montucla 54, 64, 262, 302, 317.  
 Morin 143, 149, 151, 165.  
  
 Necker 450.  
 Newton 64, 164, 258, 328, 450.  
 Newton, H. A. 272.  
 Nippoldt, W. A. 78.  
 Niven 361.  
  
 Olbers 280.  
 Oudemans 78.  
 Oppolzer 272.  
 Ostwald 82, 89.  
  
 Painlevé 332.  
 Petit 79.  
 Phillips, Ed. 92, 169, 292.  
 Picard 264.  
 Plana 262.  
 Poinsot 17, 162, 163, 168, 205, 213, 281, 305.  
 Poiret 144.  
 Poisson 42, 107, 165, 168, 169, 279, 316,  
     418, 450.  
 Power, J. 78.  
  
 Poynting 433.  
 Puiseaux 450.  
  
 Rankine 2, 81.  
 Rayleigh, Lord 282, 390, 467.  
 Reid 78.  
 Reimer, H. Th. 101.  
 Reye 29, 465.  
 Reynolds, Prof. Osborne 144.  
 Robins 105.  
 Robinson, Dr. 81, 109, 110.  
 Rodriguez 243, 252.  
 Routh 465.  
 Rudolf, Dr. E. 466.  
 Rühlmann, M. 144, 466.  
  
 Sabine 89.  
 Salmon 49, 325.  
 Savart 331.  
 Scheffers 465, 467.  
 Scheffler 347.  
 Schell 315, 328.  
 Schepp 144.  
 Schlick 331.  
 Schlömilch 17.  
 Segner 101.  
 Sekiya, Prof. 159.  
 Shuckburgh 89.  
 Slessor 227.  
 Smith 204.  
 Snell 111.  
 Sommerfeld, A. 466, 467.  
 Staudt v. 466.  
 Steele 274.  
 Sterneck, R. v. 465.  
 Stockwell, J. N. 281.  
 Stokes, Sir G. 86, 87, 110, 112.  
 Study 466.  
 Sylvester 248.  
  
 Tait 274, 341, 352, 360, 467.  
 Taylor 82.  
 Tietien, F. 82.  
 Thomson, Sir W., siehe Lord Kelvin.  
 Thomson, J. J. 335, 378, 467.  
 Thurston 144.  
 Tower 144.  
 Townsend 42, 46, 47.  
  
 Vieille 357.  
 Voss, A. 467.  
  
 Walton 103, 264.  
 Walker, General 87.  
 Weber 82.  
 Weierstrass 467.  
 Whewell 54, 111, 302.  
 White 331.  
  
 Young, Dr. 86, 88, 89.

# Alphabetisches Verzeichniss der definirten Ausdrücke.

Die Zahlen geben die Seite an, auf welcher die Definition zu finden ist.

- |   |  |
|---|--|
| <p>Das D'Alembert'sche Princip 52.<br/>           Das Robinson'sche Anemometer 109.<br/>           Antrieb der Kraft 301.<br/>           Arbeit der Kräfte 123, 302.<br/>           Gegenseitige Arbeit zweier Körper 308.<br/>           Aufhängungsaxe 75.<br/>           Aufhängungsmittelpunkt 75.<br/>           Auftrieb der Luft 80.<br/>           Axe des Maximalmoments 103.<br/>           Axe der spontanen Rotation 103.<br/>           Conjugirte Axen 215, 249.</p> <p>Das Bertrand'sche Theorem 336.<br/>           Berührungstransformation 467.<br/>           Unstabile Bewegung 390.<br/>           Das imaginäre Bild eines Körpers 465.</p> <p>Carnot's erstes, zweites und drittes<br/>           Theorem 335 u. ff.<br/>           Das Cavendish'sche Experiment 427.<br/>           Die Centralaxe 207, 214.<br/>           Die Centralellipse 18.<br/>           Das Poinso't'sche Centralellipsoid 17.<br/>           Die Centren der Maximalreflexion bez.<br/>           Conversion 163.<br/>           Das Centrifugalpaar 233.<br/>           Charakteristik einer Ebene 223.<br/>           Die Clausius'sche Theorie der stationären<br/>           Bewegung 333.<br/>           Coefficient der rollenden Reibung 150.<br/>           Tetraedraler Complex 465.<br/>           Componenten der Bewegung 215.<br/>           Die sechs Constanten eines Körpers 16.<br/>           Die Constante der lebendigen Kraft 366.<br/>           Die Coordinaten eines Körpers 59.<br/>           Kinosthenische Coordinaten 378.<br/>           Die Coordinaten des Zwanges 362.<br/>           Die Coordinaten der relativen Bewegung<br/>           362.<br/>           Die Coordinaten eines Systems 353.<br/>           Cyclische Coordinaten 467.<br/>           Cylindercoordinaten 196.<br/>           Harmonische, einfache, normale Coordi-<br/>           naten eines Systems 415<br/>           Das Cylindroid 222.</p> | <p>Deviationsmoment 2.<br/>           Die mittlere Dichtigkeit der Erde<br/>           432.<br/>           Die Dissipationsfunction 382.<br/>           Dreieckscoordinaten 15.<br/>           Druckcentrum 35.<br/>           Dyname 214.</p> <p>Die invariable Ebene 277.<br/>           Die astronomische invariable Ebene 280.<br/>           Die dynamische invariable Ebene 280.<br/>           Effectivkraft 53.<br/>           Die kinetische Energie 302, 320.<br/>           Die potentielle Energie 320.<br/>           Das reciproke Ellipsoid 21.<br/>           Ellipsoid gleichen Momentes 23.<br/>           Legendre'sches Ellipsoid 23.<br/>           Die Euler'schen dynamischen Gleich-<br/>           ungen 228.<br/>           Die Euler'schen geometrischen Gleich-<br/>           ungen 229.<br/>           Euler's Theorem 452.</p> <p>Fixpunkte des Querschnittes 40.<br/>           Flächenmoment 62.<br/>           Fläche gleichen Momentes 49.<br/>           Focus einer Ebene 223.<br/>           Freiheitsgrade eines Systems 354.<br/>           Frequenz der Schwingung 390.<br/>           Fresnel'sche Wellenfläche 50.<br/>           Froude's Theorem 330.<br/>           Die reciproke Function 370.</p> <p>Das Gauss'sche Princip des kleinsten<br/>           Zwanges 346.<br/>           Geschwindigkeitscoordinaten 378.<br/>           Neutrales Gleichgewicht 454.<br/>           Stabiles Gleichgewicht 424.<br/>           Unstabiles Gleichgewicht 390.<br/>           Die dynamischen Gleichungen eines<br/>           Körpers 116.<br/>           Die Euler'schen dynamischen Gleich-<br/>           ungen 228.<br/>           Die Euler'schen geometrischen Gleich-<br/>           ungen 229.</p> |
|---|--|

- Die Geraden keines Gleitens und der stärksten Compression 173.  
 Die Grenzgrösse der Reibung 142.  
 Die Grenzgrösse des Paares der rollenden Reibung 150.  
 Die Hamilton'sche Function 372.  
 Hauptaxen für einen Punkt 13.  
 Die Hauptcoordinaten eines dynamischen Systems 415.  
 Hauptebenen für einen Punkt 13.  
 Hauptpunkt einer Geraden 37.  
 Hauptschwingung eines Systems 416.  
 Hauptträgheitsmomente für einen Punkt 13.  
 Impulsecoordinaten 467.  
 Die relative Indicatrix 437.  
 Invarianten 18.  
 Die Invariante der Componenten und der Rotation 217.  
 Inversion 34.  
 Jacobi's Theorem 260.  
 Kegel gleichen Momentes 24.  
 Kelvin's Theorem 340.  
 Kilogramm 306.  
 Kräftefunction 123, 304.  
 Conjugirte Kräfte 195, 214.  
 Die ganze Kraft 254.  
 Die lebendige Kraft 302, 315.  
 Conservatives Kräftesystem 304.  
 Körper gleichen Momentes 24.  
 Dynamisch symmetrische Körper 100.  
 Unelastische, elastische Körper 164.  
 Die äussersten Lagen der Schwingung 416.  
 Die Lagrange'sche Function 357.  
 Die Lagrange'schen allgemeinen Bewegungsgleichungen 357.  
 Die modificirte Lagrange'sche Function 375.  
 Länge des gleichwerthigen einfachen Pendels 75, 363.  
 Die Laplace'schen drei Punkte 257.  
 Das Legendre'sche Ellipsoid 23.  
 Die Legendre'sche Methode 369.  
 Excentrische Linien 30.  
 Die invariable Linie 277.  
 Liouville's Integrale 366.  
 Das Mariotte'sche Gesetz 331.  
 Meterkilogramm 306.  
 Methode der Coincidenzen 85.  
 Mittelpunkt des Stosses 103.  
 Modelle 329.  
 Modification der Coordinaten 376.  
 Die Momentanaxe 205.  
 Momentankraft 67.  
 Die de Morgan'sche Methode 369.  
 Die Normalreaction 142.  
 Nutzleistung einer Dampfmaschine 306.  
 Die Paare der rollenden und drehenden Reibung 142.  
 Ballistisches Pendel 105.  
 Der Pfeil der Schraube 208, 217.  
 Pferdekraft 306.  
 Das Poinso't'sche Centralellipsoid 17.  
 Das Poinso't'sche Trägheitsellipsoid 17.  
 Das gegenseitige Potential zweier Körper 308.  
 Das Potential 308.  
 Das kinetische Potential 467.  
 Das Princip der Erhaltung der Translationsbewegung 64.  
 Das Princip der Erhaltung der Rotationsbewegung 64.  
 Das Princip der Unabhängigkeit der Translations- und Rotationsbewegungen 64.  
 Das D'Alembert'sche Princip 52.  
 Das Princip der Erhaltung der Translationsbewegungsgrösse 255.  
 Das Princip der Aehnlichkeit 328.  
 Das Princip der Erhaltung der Energie 320.  
 Das Princip der Erhaltung der Flächen 255.  
 Das Princip der kleinsten Quadrate 347.  
 Das Princip von der gleichzeitigen Existenz kleiner Schwingungen 416.  
 Das Princip der gradesten Bahn 466.  
 Die beiden Punkte des Maximalstosses 162.  
 Aequivalente Punkte 26.  
 Die Laplace'schen drei Punkte 257.  
 Der Radius der relativen Krümmung 438.  
 Reciprocation der Coordinaten 376.  
 Reductionspunkt 206.  
 Die Reibung 142.  
 Der Reibungscoefficient 143.  
 Repsold'sches Pendel 88.  
 Reversionspendel 83.  
 Das Robinson'sche Anemometer 109.  
 Permanente Rotationsaxe 101.  
 Conjugirte Rotationen 249.  
 Savart's Theorem 331.  
 Die Schwerkraft 152.  
 Schraubenaxe 208.  
 Schraubenbewegung 208.  
 Harmonische Schwingung eines Systems 416.  
 Zusammengesetzte Schwingung eines Systems 416.  
 Schwingungsmittelpunkt 75.  
 Die natürliche oder freie Schwingung 389.  
 Erzwungene Schwingungen 389.  
 Harmonische Schwingung 391.  
 Die Sectorengeschwindigkeit 62.

- |  |                                       |
|--|---------------------------------------|
| Sectorenbewegungsgrösse 62.            | Reciprokes Trägheitsellipsoid 21.     |
| Springbohnen 264.                      | Affine Transformation 29.             |
| Der Stabilitätscylinder 439.           |                                       |
| Der Stabilitätskreis 395.              | Unstetigkeit der Reibung 145.         |
| Stosskraft 67.                         |                                       |
| Nicht holonome, holonome Systeme 467.  | Das Virial eines Systems 334.         |
|  | Das äussere Virial eines Systems 334. |
| Jacobi's Theorem 260.                  | Das innere Virial eines Systems 334.  |
| Die Theorie der Dimensionen 332.       |                                       |
| Torsionswage 427.                      | Whewell's Windmesser 111.             |
| Trägheitsmoment 2.                     | Windungsparameter der Schraube 208.   |
| Trägheitsradius 2.                     | Die Winkelbewegungsgrösse 62.         |
| Das Poinot'sche Trägheitsellipsoid 17. | Die Winkelcoordinate 112.             |
| Trägheitsellipse 18.                   | Winkelgeschwindigkeit 205.            |
| Die reciproke Trägheitsellipse 24.     |                                       |
| Trägheitsbrennpunkte 40.               | Imaginäre Zeit 331.                   |
| Trägheitskugelpunkte 42.               | Der Zwang 345.                        |
-



[illegible]

Demco 293-5

531.3 R76d  
v.1

531.3 R76d v.1

Routh, E. J.

Die dynamik der  
Schwingungen

531.3 R76d  
v.1

**Carnegie Institute of Technology**  
**Library**  
**Pittsburgh, Pa.**



*Erstens. Man soll nur die Anfangswerthe der Reactionen finden.*

Die dynamischen Gleichungen enthalten die Coordinaten, ihre zweiten Differentialquotienten in Bezug auf  $t$  und die unbekannten Reactionen. Es gibt so viele geometrische Gleichungen als Reactionen. Aus diesen sind die zweiten Differentialquotienten zu eliminiren und so die Reactionen zu ermitteln. Man verfährt ebenso, wie bei der ersten Lösungsmethode in § 135 und zwar auf folgende Art.

Man stelle die geometrischen Gleichungen auf, differenzire jede zweimal und vereinfache dann die Resultate dadurch, dass man für die Coordinaten ihre Anfangswerthe substituirt. So möge, wenn wir Cartesische Coordinaten gebrauchen,  $\varphi(x, y, \theta) = 0$  eine geometrische Beziehung ausdrücken; wir erhalten, weil  $\frac{dx_0}{dt} = 0$ ,  $\frac{dy_0}{dt} = 0$ ,  $\frac{d\theta_0}{dt} = 0$  sind,

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} \frac{d^2 x_0}{dt^2} + \frac{\partial \varphi}{\partial y} \frac{d^2 y_0}{dt^2} + \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} \frac{d^2 \theta_0}{dt^2} = 0.$$

Das Verfahren bei der Differentiation der Gleichungen kann manchmal sehr vereinfacht werden, wenn der Coordinatenanfang so gewählt wird, dass die Anfangswerthe wenigstens einiger Coordinaten Null werden. *Man kann dann die Gleichungen dadurch vereinfachen, dass man die Quadrate und Producte aller dieser Coordinaten vernachlässigt.* Denn, kommt z. B. das Glied  $x^2$  vor, so verschwindet sein zweiter Differentialquotient  $2 \left[ x \frac{d^2 x}{dt^2} + \left( \frac{dx}{dt} \right)^2 \right]$ , wenn der Anfangswerth von  $x$  Null ist.

Die geometrischen Gleichungen müssen unter der Voraussetzung aufgestellt werden, dass die Körper ihre *allgemeine* Lage haben, weil wir sie differenziren wollen. Bei den dynamischen Gleichungen ist dies aber nicht der Fall. Sie können unter der Annahme niedergeschrieben werden, dass jeder Körper seine *Anfangslage* habe. Man erhält diese Gleichungen nach den Regeln, die in § 135 gegeben wurden. Die dort für die Effectivkräfte gegebenen Formeln lassen bei unsrem Problem einige Vereinfachungen zu. So nehmen z. B., weil  $\frac{dr_0}{dt} = 0$  und  $\frac{d\varphi_0}{dt} = 0$  sind, die Beschleunigungen in der Richtung des Radius-vectors und senkrecht zu ihm die einfachen Formen an  $\frac{d^2 r_0}{dt^2}$  und  $r \frac{d^2 \varphi_0}{dt^2}$ . Ferner verschwindet die Beschleunigung  $\frac{v^2}{\rho}$  längs der Normalen. Wenn wir z. B. die Anfangsrichtung der Bewegung des Schwerpunktes eines der Körper kennen, so ist es von Vortheil, die Componenten in der Richtung der Normalen zur Bahn zu nehmen. Dies liefert eine Gleichung, die nur die gegebenen Kräfte und solche Spannungen oder Reactionen enthält, die an dem Körper wirken. Ist nur eine Reaction vorhanden, so reicht diese Gleichung aus, ihren Anfangswerth zu bestimmen.

Man kann die Regel kurz so fassen: *Man stelle die geometrischen Gleichungen des Systems in seiner allgemeinen Lage auf, differenziere jede zweimal und vereinfache die Resultate dadurch, dass man statt der Coordinaten ihre Anfangswerthe setzt. Man stelle ferner die dynamischen Gleichungen des Systems unter der Annahme auf, dass es sich in seiner Anfangslage befinde und eliminire die zweiten Differentialquotienten, wodurch man zu einer hinreichenden Anzahl von Gleichungen kommt, um die Anfangswerthe der Reactionen bestimmen zu können.*

Man kann aus den Gleichungen auch die Werthe von  $\frac{d^2 x_0}{dt^2}$ ,  $\frac{d^2 y_0}{dt^2}$ ,  $\frac{d^2 \theta_0}{dt^2}$  ableiten und so durch ihre Substitution in die Gl. (1) die Anfangsbewegung bis zu den Gliedern finden, die von  $t^2$  abhängen.

§ 200. *Zweitens. Man soll die Anfangsbewegung selbst finden.* Bei der nun folgenden Untersuchung wollen wir die Differentialquotienten nach der Zeit der Kürze halber mit Accenten bezeichnen, so dass z. B.  $\frac{d^2 x}{dt^2}$  durch  $x''$  dargestellt wird. Wie viele Glieder der Reihe (1) man beibehalten muss, hängt von der Natur des Problems ab. Es werde z. B. der Krümmungsradius der von dem Schwerpunkt eines der Körper beschriebenen Bahn gesucht. Man hat

$$\varphi = \frac{(x'^2 + y'^2)^{\frac{3}{2}}}{x'y'' - y'x''}.$$

Setzt man  $u = x'y'' - y'x''$  und differenzirt, so erhält man

$$u' = x'y''' - y'x''',$$

$$u'' = x'y^{IV} - y'x^{IV} + x''y''' - y''x''',$$

$$u''' = x'y^V - y'x^V + 2(x''y^{IV} - y''x^{IV}).$$

Substituirt man in die Taylor'sche Entwicklung und beachtet, dass

$$x_0' = 0, \quad y_0' = 0$$

ist, so wird

$$x'y'' - y'x'' = \frac{1}{2}(x_0''y_0''' - x_0'''y_0'')t^2 + \frac{1}{3}(x_0''y_0^{IV} - x_0^{IV}y_0'')t^3 + \dots$$

und ähnlich

$$(x'^2 + y'^2)^{\frac{3}{2}} = (x_0''^2 + y_0''^2)^{\frac{3}{2}}t^3 + \dots$$

Wenn nun der Körper vom Zustand der Ruhe ausgeht, so ist der Krümmungsradius Null. Ist aber

$$x_0''y_0''' - x_0'''y_0'' = 0,$$

so ist die Richtung der Beschleunigung für den Augenblick stationär. Es ist dann

$$\varphi = 3 \frac{(x_0''^2 + y_0''^2)^{\frac{3}{2}}}{x_0''y_0^{IV} - x_0^{IV}y_0''}.$$

Um diese Differentialquotienten zu ermitteln, kann man so verfahren. Man differenzire jede dynamische Gleichung zweimal und reducire sie dann auf ihre Anfangsform, indem man für  $x, y, \theta$ , etc. ihre Anfangswerthe und  $x', y', \theta'$  gleich Null setzt. Man differenzire jede geometrische Gleichung viermal und reducire sie dann ebenso auf ihre Anfangsform. Man erhält auf diese Art genug Gleichungen zur Bestimmung von  $x_0'', x_0''', x_0^{IV}$ , etc.,  $R_0, R_0', R_0''$ , etc., wenn  $R$  eine der unbekannten Reactionen ist. Oft ist es vortheilhaft, die unbekannten Reactionen aus den Gleichungen zu eliminiren, *ehe* man differenzirt. Alsdann kommen nur die unbekannten Differentialquotienten  $x_0'', x_0'''$ , etc. in den Gleichungen vor.

Diese Operationen lassen sich im Allgemeinen durch einige einfache Betrachtungen sehr abkürzen. Eine dynamische Gleichung sei von der Form

$$Lx'' + My'' + N\theta'' + P = 0,$$

worin  $L, M, N, P$  Functionen nur von  $x, y, \theta$  sind. Durch zweimalige Differentiation erhält man, wenn  $x_0' = 0, y_0' = 0, \theta_0' = 0$  gesetzt wird,

$$Lx_0^{IV} + My_0^{IV} + N\theta_0^{IV} + \Delta(Lx_0'' + My_0'' + N\theta_0'' + P) = 0,$$

worin  $\Delta = x_0'' \frac{\partial}{\partial x} + y_0'' \frac{\partial}{\partial y} + \theta_0'' \frac{\partial}{\partial \theta}$  ist.

Setzt man  $x = x_0 + \xi, y = y_0 + \eta$ , etc., so dass also  $\xi, \eta$ , etc. kleine Grössen sind, so ist leicht ersichtlich, dass alle Glieder in  $L, M$ , etc., welche  $\xi^2, \eta^2$ , etc. enthalten, aus der Endgleichung verschwinden. Sind daher  $x_0^{IV}, y_0^{IV}, \theta_0^{IV}$  zu ermitteln und werden zu diesem Zweck die dynamischen Gleichungen differenzirt, so brauchen die Coefficienten  $L, M$ , etc. nur bis zur ersten Potenz der kleinen Grössen  $\xi, \eta$ , etc. genau zu sein.

Auf dieselbe Art findet man, dass sich eine geometrische Gleichung wie  $\varphi(x, y, \theta) = 0$  auf die Differentialgleichung vierter Ordnung

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} x_0^{IV} + \frac{\partial \varphi}{\partial y} y_0^{IV} + \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} \theta_0^{IV} + 3\Delta^2 \varphi = 0$$

reducirt. Es brauchen daher die geometrischen Gleichungen nur bis zur zweiten Potenz der kleinen Grössen genau zu sein. Ebenso müssen, wenn wir die Anfangswerthe der sechsten Differentialquotienten suchen, die dynamischen Gleichungen bis zur zweiten, die geometrischen bis zur dritten Potenz dieser Grössen genau sein.

Wir werden später sehen, dass sich diese Anfangsdifferentialquotienten leichter aus den Lagrange'schen Gleichungen ableiten lassen.

Wenn die Richtung der Bewegung eines der in Betracht kommenden Schwerpunkte bekannt ist, so kann man die Tangente an seine Bahn zur  $y$ -Axe nehmen. Alsdann ist  $\varphi = y^2/2x$ , worin  $x$  eine kleine Grösse zweiter und  $y$  erster Ordnung ist. Man kann daher die Quadrate von  $x$  und die dritten Potenzen von  $y$  vernachlässigen. Dadurch verein-

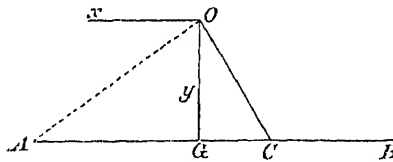
fachen sich die Gleichungen sehr. Geht der Körper vom Zustand der Ruhe aus, so ist  $x_0' = 0$  und ist ferner  $x_0'' = 0$ , so kann man die Formel  $\varrho = 3y_0''^2/x_0'^4$  benutzen.

Die entsprechenden Formeln für  $\varrho$  bei Polarcoordinaten erhält man ebenso. Man hat, wenn  $r_0(r_0''\theta_0''' - r_0'''\theta_0'') = 0$  ist,

$$\frac{3(r_0'^2\theta_0''^2 + r_0''^2)}{\varrho} = 3r_0'^2\theta_0''^3 + 6r_0''^2\theta_0'' + r_0r_0''\theta_0'^4 - r_0\theta_0''r_0'^4.$$

§ 201. Beisp. Eine kreisförmige Scheibe wird mittelst dreier gleich langer Fäden, welche an drei gleich weit von einander entfernten Punkten ihres Umfangs befestigt sind, an einem Stift, der sich vertical über ihrem Mittelpunkt befindet, aufgehängt. Einer der Fäden wird durchgeschnitten; man bestimme die Anfangsspannungen der beiden andern.

$O$  sei der Stift,  $AB$  der Kreis von einem Punkt in seiner Ebene aus gesehen.  $OA$  sei der Faden, welcher durchgeschnitten wird,  $C$  der Mittelpunkt der



Sehne, welche die Punkte des Kreises verbindet, an denen die beiden andern Fäden befestigt sind. Die beiden Spannungen, von denen jede gleich  $T$  ist, sind dann während der Bewegung einer resultierenden Spannung  $R$  in der Richtung  $CO$  gleichwerthig. Ist  $2\alpha$  der Winkel, den die beiden Fäden miteinander machen, so folgt  $R = 2T \cos \alpha$ .

$l$  sei die Länge von  $OC$ ,  $\beta$  der Winkel  $GO C$ ,  $\alpha$  der Radius der Scheibe,  $(x, y)$  seien die Coordinaten der verschobenen Lage des Schwerpunkts in Bezug auf den Coordinatenanfang  $O$ , wobei die positive Richtung der  $x$  horizontal nach der Linken und der  $y$  vertical abwärts geht.  $\theta$  sei der Winkel, den die verschobene Lage der Scheibe mit  $AB$  macht.

Zeichnet man die Scheibe in ihrer allgemeinen Lage auf, so sieht man, dass die Coordinaten von  $C$  in seiner allgemeinen Lage  $x - l \sin \beta \cos \theta$  und  $y - l \sin \beta \sin \theta$  sind. Daher ist, weil die Länge  $OC$  constant gleich  $l$  bleibt,

$$x^2 + y^2 - 2l \sin \beta (x \cos \theta + y \sin \theta) = l^2 \cos^2 \beta.$$

Da nur die Anfangsspannungen verlangt werden, so reicht es aus, diese Gleichung zweimal zu differenzieren. Da man die Quadrate kleiner Grössen vernachlässigen kann, so kann man  $x^2$  weglassen und  $\cos \theta = 1$ ,  $\sin \theta = \theta$  setzen. Das Verfahren ist nicht sehr umständlich, denn man sieht von vornherein, welche Glieder verschwinden, wenn man die Differentialquotienten ( $dx/dt$ ,  $dy/dt$ ,  $d\theta/dt$ ) gleich Null und statt  $(x, y, \theta)$  ihre Anfangswerthe  $(0, l \cos \beta, 0)$  setzt. Man erhält

$$\frac{d^2 y_0}{dt^2} \cos \beta = \sin \beta \left( \frac{d^2 x_0}{dt^2} + l \cos \beta \frac{d^2 \theta_0}{dt^2} \right).$$

Zu dieser Gleichung kann man auch durch einen kleinen Kunstgriff gelangen, der oft von Nutzen ist. Die Bewegung von  $G$  ist aus der Bewegung von  $C$  und der von  $G$  relativ zu  $C$  zusammengesetzt. Da  $C$  vom Zustand der Ruhe aus einen Kreis zu beschreiben beginnt, so ist seine Beschleunigung längs  $CO$  Null. Die Componente der Beschleunigung von  $G$  relativ zu  $C$  längs  $CO$  ist  $GC \frac{d^2 \theta}{dt^2} \cos \beta$ . Die Componente der Beschleunigung von  $G$  ist nun einerseits die Summe dieser beiden, aber auch gleich  $\frac{d^2 y_0}{dt^2} \cos \beta - \frac{d^2 x_0}{dt^2} \sin \beta$ . Daraus folgt dann die Gleichung sofort.

Die dynamischen Gleichungen haben wir bei diesem Problem nur in ihrer Anfangsform nöthig. Sie sind

$$\left. \begin{aligned} m \frac{d^2 x_0}{dt^2} &= R_0 \sin \beta \\ m \frac{d^2 y_0}{dt^2} &= mg - R_0 \cos \beta \\ m k^2 \frac{d^2 \theta_0}{dt^2} &= R_0 l \sin \beta \cos \beta \end{aligned} \right\},$$

worin  $m$  die Masse des Körpers bedeutet. Durch Substitution in die geometrische Gleichung findet man

$$R_0 = mg \frac{k^2 \cos \beta}{k^2 + l^2 \sin^2 \beta \cos^2 \beta}.$$

Die Spannung eines jeden Fadens, *che* der Faden  $OA$  durchschnitten wurde, kann man nach den Lehren der Statik ermitteln; sie ist offenbar  $T_1 = \frac{mg}{3 \cos \gamma}$ , worin  $\gamma$  den Winkel  $AOG$  bedeutet. Daraus lässt sich der Unterschied der Spannung ableiten.

§ 202. Beisp. 1. Zwei Stricke von gleicher Länge sind mit ihrem einen Ende an ein Gewicht  $C$  gebunden und die beiden andern Enden sind an zwei Punkten  $A$  und  $B$  auf derselben horizontalen Linie befestigt. Wenn der eine Strick durchschnitten wird, so ändert sich die Spannung des andern sofort im Verhältniss  $1 : 2 \cos^2 \frac{C}{2}$ .

[St. Pet. Coll.]

Beisp. 2. Eine elliptische Lamelle, deren Ebene vertical steht und deren Axe horizontal ist, wird durch zwei gewichtslose Bolzen gehalten, die durch die Brennpunkte gehen. Der eine Bolzen wird gelöst; man zeige, dass der Druck auf den andern anfangs unverändert bleibt, wenn die Excentricität der Ellipse  $\frac{1}{5}\sqrt{10}$  ist.

[Coll. Ex.]

Beisp. 3. Drei gleiche materielle Punkte  $A, B, C$ , die einander mit beliebigen Kräften abstossen, werden durch drei Stricke von ungleicher Länge derart mit einander verbunden, dass das Ganze die Gestalt eines bei  $A$  rechtwinkligen Dreiecks hat. Der Strick, welcher  $B$  und  $C$  verbindet, wird durchschnitten; man beweise, dass die augenblickliche Aenderung der Spannung der Stricke, die  $BA, CA$  verbinden,  $\frac{1}{2} T \cos B$  bez.  $\frac{1}{2} T \cos C$  ist, wo  $B$  und  $C$  die den Stricken  $CA$  bez.  $AB$  gegenüberliegenden Winkel bezeichnen und  $T$  die abstossende Kraft zwischen  $B$  und  $C$  bedeutet.

Beisp. 4. Zwei gleichförmige gleiche Stäbe, von denen jeder die Masse  $m$  hat, werden so auf eine glatte horizontale Ebene gestellt, dass sie die Gestalt des Buchstaben X haben und die oberen und unteren Enden durch gleiche Stricke verbunden. Man zeige, dass, welchen Strick man auch durchschneiden mag, die Spannung des andern dieselbe Function der Neigung der Stäbe gegeneinander und Anfangs  $\frac{3}{8} mg \sin \alpha$  ist, unter  $\alpha$  die Anfangsneigung der Stäbe verstanden.

[St. Pet. Coll.]

Beisp. 5. Ein horizontaler Stab von der Masse  $m$  und der Länge  $2a$  hängt an zwei an seinen Enden befestigten parallelen Stricken von der Länge  $2a$ ; es wird ihm plötzlich die Winkelgeschwindigkeit  $\omega$  um eine verticale durch sein Centrum gehende Axe ertheilt; man zeige, dass die Anfangsvermehrung der Spannung jedes Stricks  $\frac{1}{4} m a \omega^2$  beträgt und dass der Stab um die Strecke  $\frac{a^2 \omega^2}{6g}$  in die Höhe steigt.

[Coll. Ex.]

Beisp. 6. Ein Massenpunkt ist mittelst dreier gleicher Stricke von der Länge  $a$  an drei Punkten aufgehängt, die ein gleichseitiges Dreieck, dessen Seiten  $2b$  ist, in einer horizontalen Ebene bilden. Wenn ein Strick durchschnitten wird, so ändert sich die Spannung eines jeden der andern sofort in dem Verhältniss  $\frac{3a^2 - 4b^2}{2(a^2 - b^2)}$ . [Coll. Ex.]

Beisp. 7. Eine Kugel, die auf einer rauhen horizontalen Ebene ruht, wird in eine unendlich grosse Anzahl von halbkreisförmigen Scheiben zerschnitten, welche durch einen Faden wieder zusammengebunden sind. Dabei steht der Durchmesser der Kugel, durch welchen die ebenen Flächen der Scheiben gehen, vertical. Man zeige, dass, wenn der Faden durchschnitten wird, der Druck auf die Ebene sich sofort in dem Verhältniss  $\frac{45\pi^2}{2048}$  vermindert. [Emm. Coll. 1871.]

Beisp. 8. Eine glatte Kugel ruht auf einer horizontalen Ebene und eine gleiche Kugel ist so gegen sie gestützt, dass die Verbindungslinie der Mittelpunkte den Winkel  $\varphi$  mit der Verticalen macht. Man beweiße, dass grade nach der Entfernung der Stützen das Verhältniss des Drucks auf die Ebene zu dem Druck zwischen den Kugeln  $2 : \cos \varphi$  ist. [Coll. Ex.]

Beisp. 9. Ein Stab von der Masse  $m$  und Länge  $2a$ , der sich um sein eines Ende als festen Punkt drehen kann, wird durch einen kleinen Ring von der Masse  $p$  gesteckt. Das System geht vom Zustand der Ruhe aus, wobei der Stab horizontal ist und der Ring den Abstand  $c$  vom festen Punkt hat. Man zeige, dass die Polarcoordinaten des Ringes auf den festen Punkt bezogen  $c + \frac{d^4 r_0}{dt^4} \frac{t^4}{24}$  und  $\frac{d^2 \theta_0}{dt^2} \frac{t^2}{2}$  sind. Man bestimme auch  $\frac{d^2 \theta_0}{dt^2}$  und beweiße, dass  $\frac{d^4 r_0}{dt^4} = g \frac{d^2 \theta_0}{dt^2} + 2c \left( \frac{d^2 \theta_0}{dt^2} \right)^2$  ist. Daraus leite man den Anfangskrümmungsradius der Bahn des Massenpunktes ab. [May Ex. 1888.]

Beisp. 10. Eine massive Halbkugel von der Masse  $M$  ruht auf einer vollkommen rauhen horizontalen Ebene und ein Punkt von der Masse  $m$  wird vorsichtig in dem Abstand  $c$  vom Centrum auf sie gelegt. Man beweiße, dass der Anfangskrümmungsradius der von dem Punkt beschriebenen Bahn  $\frac{3mc^3}{Mk^2}$  ist, wenn man mit  $k$  den Trägheitsradius der Halbkugel in Bezug auf eine Tangente an ihren Scheitelpunkt bezeichnet. [Math. Tripos, 1888.]

Beisp. 11. Eine Gartenwalze ruht auf einer horizontalen Ebene, die rau genug ist, um Gleiten zu verhindern und der Griff wird so gehalten, dass die Ebene durch die Axe des Cylinders und den Schwerpunkt  $G$  des Griffes den Winkel  $\alpha$  mit dem Horizont macht. Der Griff wird losgelassen; man zeige, dass der Anfangskrümmungsradius der von  $G$  beschriebenen Bahn  $\frac{c(\sin^2 \alpha + n \cos^2 \alpha)^{\frac{3}{2}}}{n}$  ist, worin  $(n-1)M(k^2 + a^2) = ma^2$ . Dabei ist  $c$  der Abstand des Punktes  $G$  von der Axe des Cylinders,  $m$  die Masse des Griffes,  $Mk^2$  das Trägheitsmoment des Cylinders für seine Axe und  $a$  sein Radius. [Math. Tripos, 1894.]

## Relative Bewegung oder sich bewegende Axen.

§ 203. Bei vielen dynamischen Problemen hat man nur die relative Bewegung der verschiedenen Körper des Systems zu finden. In solchen Fällen ist es von Vortheil, wenn man sie bestimmen kann, ohne vorher

die absolute Bewegung eines jeden Körpers im Raum ermittelt zu haben. Nehmen wir an, die relative Bewegung in Bezug auf einen Körper (A) werde gesucht, so sind zwei Fälle zu unterscheiden: 1) der Körper (A) hat nur eine Translationsbewegung; 2) er hat nur eine Rotationsbewegung. Hat er beide, sowohl Translations- als Rotationsbewegung, so lässt sich dies als eine Combination der beiden Fälle ansehen. Wir wollen sie die Reihe nach betrachten.

§ 204. **Der Fundamentalsatz.** Es möge die relative Bewegung eines dynamischen Systems in Bezug auf einen sich bewegenden Punkt  $C$  zu ermitteln sein. Man kann offenbar  $C$  zur Ruhe bringen, wenn man an jedem Element des Systems eine Beschleunigung anbringt, die derjenigen von  $C$  gleich und entgegengesetzt ist. Man muss ferner annehmen, dass eine Anfangsgeschwindigkeit, die der von  $C$  gleich und entgegengesetzt ist, jedem Element ertheilt worden ist.

$f$  sei die Beschleunigung von  $C$  zur Zeit  $t$ . Wenn an jedem materiellen Punkt  $m$  eines Körpers dieselbe beschleunigende Kraft  $f$  einer gegebenen Richtung parallel angreift, so sind diese Kräfte zusammengenommen offenbar einer Kraft  $f \sum m$  äquivalent, die am Schwerpunkt angreift. Wenn man daher den Punkt  $C$  eines Systems zur Ruhe bringen will, so reicht es aus, an dem Schwerpunkt eines jeden Körpers in einer der Beschleunigungsrichtung von  $C$  entgegengesetzten Richtung eine durch  $Mf$  gemessene Kraft anzubringen, wenn  $M$  die Masse des Körpers und  $f$  die Beschleunigung von  $C$  bedeutet.

Der Punkt  $C$  kann nun zum Anfangspunkt der Coordinaten genommen werden und man kann auch die Momente um ihn nehmen, grade als wäre er ein im Raum festliegender Punkt.

Die Gleichung für die Momente wollen wir etwas genauer untersuchen.  $(r, \theta)$  seien die Polarcoordinaten eines Elements eines Körpers von der Masse  $m$ , auf  $C$  als Coordinatenanfang bezogen. Die Beschleunigungen des Punktes in der Richtung des Radiusvectors  $r$  und senkrecht zu ihm sind  $\frac{d^2 r}{dt^2} - r \left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2$  und  $\frac{1}{r} \frac{d}{dt} \left( r^2 \frac{d\theta}{dt} \right)$ . Nimmt man die Momente um  $C$ , so erhält man

$$\sum m \frac{d}{dt} \left( r^2 \frac{d\theta}{dt} \right) = \begin{cases} \text{dem Moment der gegebenen Kräfte um } C \text{ plus dem} \\ \text{Moment um } C \text{ der umgekehrten am Schwer-} \\ \text{punkt, wie wir annehmen, angreifenden Effectiv-} \\ \text{kräfte von } C. \end{cases}$$

Liegt der Punkt  $C$  im Körper fest und bewegt sich mit ihm, so ist  $\frac{d\theta}{dt}$  für jedes Element des Körpers dasselbe und, wie in § 88, ist

$$\sum m \frac{d}{dt} \left( r^2 \frac{d\theta}{dt} \right) = M k^2 \frac{d^2 \theta}{dt^2}.$$

§ 205. Aus der allgemeinen Gleichung für die Momente um einen in Bewegung befindlichen Punkt  $C$  folgt, dass man die Gleichung

$$\frac{d\omega}{dt} = \frac{\text{Moment der Kräfte um } C}{\text{Trägheitsmoment für } C}$$

in den folgenden Fällen benutzen kann:

*Erstens*, wenn der Punkt  $C$  sowohl im Körper als im Raum festliegt oder im Körper festliegend sich im Raum mit gleichförmiger Geschwindigkeit bewegt, weil dann die Beschleunigung von  $C$  Null ist;

*zweitens*, wenn der Punkt  $C$  der Schwerpunkt ist, denn alsdann ist zwar die Beschleunigung nicht Null, aber das Moment verschwindet;

*drittens*, wenn der Punkt  $C$  das Momentancentrum und die Bewegung eine kleine Schwingung oder eine Anfangsbewegung ist, die vom Zustand der Ruhe ausgeht. Zur Zeit  $t$  dreht sich der Körper um  $C$ ; die Geschwindigkeit von  $C$  ist daher Null. Zur Zeit  $t + dt$  dreht sich der Körper um einen andern sehr nahe bei  $C$  liegenden Punkt  $C'$ . Es sei  $CC' = d\sigma$ , die Geschwindigkeit von  $C$  ist dann  $\omega d\sigma$ . In der Zeit  $dt$  ist daher die Geschwindigkeit von  $C$  von Null auf  $\omega d\sigma$  gewachsen, seine Beschleunigung ist folglich  $\omega \frac{d\sigma}{dt}$ . Um die genaue Gleichung der Momente um  $C$  zu erhalten, muss man die Effectivkraft  $\Sigma m \cdot \omega \frac{d\sigma}{dt}$  in der umgekehrten Richtung am Schwerpunkt anbringen.

Bei kleinen Schwingungen sind aber  $\omega$  sowohl als  $\frac{d\sigma}{dt}$  kleine Grössen, deren Quadrate und Producte vernachlässigt werden dürfen und bei einer Anfangsbewegung ist  $\omega$  Null. Das Moment dieser Kraft ist daher wegzulassen und die Bewegungsgleichung ist dieselbe, wie wenn  $C$  ein festliegender Punkt wäre.

Es ist zu beachten, dass man die Momente um jeden dem Momentancentrum sehr nahe liegenden Punkt nehmen kann; doch wird es in der Regel vortheilhafter sein, sie um das Centrum in seiner gestörten Lage zu nehmen, weil alsdann die Momente irgend welcher an dem Rotationscentrum etwa vorhandener Reactionen verschwinden.

§ 206. Wird die genaue Momentengleichung um das Momentancentrum verlangt, so kann man auf folgende Art verfahren. Ist  $L$  das Moment der gegebenen Kräfte um das Momentancentrum,  $G$  der Schwerpunkt,  $r$  der Abstand des Schwerpunkts vom Momentancentrum  $C$ ,  $M$  die Masse des Körpers, so ist das Moment der gegebenen Kräfte und der umgekehrten Effectivkräfte um  $C$

$$L - M\omega \frac{d\sigma}{dt} \cdot r \cos G C C.$$

Versteht man unter  $h$  den Trägheitsradius für den Schwerpunkt, so wird die Bewegungsgleichung



$$M(k^2 + r^2) \frac{d\omega}{dt} = L - M\omega r \frac{dr}{dt},$$

wenn man für  $\cos G'OC$  seinen Werth  $\frac{dr}{d\sigma}$  setzt.

§ 207. **Momentankräfte.** Das Verfahren in § 204 kann offenbar auch auf Stosskräfte angewandt werden. Man erhält so eine sehr einfache Lösung des in § 171 behandelten Problems.

*Ein Körper bewegt sich auf irgend eine Art; plötzlich wird der Punkt O des Körpers gezwungen, sich auf gegebene Weise zu bewegen; man soll die relative Bewegung in Bezug auf O finden.*

Um den Punkt O zur Ruhe zu bringen, muss man am Schwerpunkt G die Bewegungsgrösse  $Mf$  anbringen, wo unter  $f$  die Resultante aus der umgekehrten Geschwindigkeit von O nach dem Wechsel und der Geschwindigkeit von O vor dem Wechsel bedeutet. Sind  $\omega, \omega'$  die Winkelgeschwindigkeiten des Körpers vor und nach dem Wechsel, ist  $r = OG$  und nimmt man die Momente um O, so wird

$$(r^2 + k^2)(\omega' - \omega) = \text{dem Moment von } f \text{ um } O.$$

Nun ist das Moment um O einer Geschwindigkeit bei G dem Moment um G derselben an O angebrachten Geschwindigkeit gleich und entgegengesetzt. Sind daher  $L, L'$  die Momente um G der Geschwindigkeit von O grade vor und grade nach dem Wechsel und ist  $k$  der Trägheitsradius für den Schwerpunkt, so ist

$$\omega' - \omega = \frac{L' - L}{k^2 + r^2}.$$

§ 208. Beisp. 1. *Zwei schwere Punkte, deren Massen  $m$  und  $m'$  sind, werden durch einen unausdehnbaren Faden miteinander verbunden, der über die Schneide eines Keils von der Masse  $M$  geht, welcher sich auf einer glatten horizontalen Ebene frei bewegen kann. Man suche die Kraft, die auf den Keil wirken muss, damit das System sich im Zustand relativen Gleichgewichts befinde.*

Hier wird es das Beste sein, den Keil dadurch zur Ruhe zu bringen, dass man an jedem Massenpunkt die der Beschleunigung des Keils gleiche und entgegengesetzte Beschleunigung  $f$  angreifen lässt. Ist dies geschehen, so befindet sich das ganze System im Gleichgewicht. Ist  $F$  die gesuchte Kraft, so erhält man durch Zerlegung in horizontaler Richtung  $(M + m + m')f = F$ .

$\alpha, \alpha'$  seien die Neigungen der Seitenflächen des Keils gegen die Horizontale. An dem Punkt  $m$  greifen  $mg$  vertical und  $mf$  horizontal an. Die Spannung des Fadens ist daher  $m(g \sin \alpha + f \cos \alpha)$ . Nimmt man statt  $m$  den Punkt  $m'$ , so findet man als Spannung auch  $m'(g \sin \alpha' - f \cos \alpha')$ . Setzt man beide gleich, so ergibt sich

$$f = \frac{m' \sin \alpha' - m \sin \alpha}{m' \cos \alpha' + m \cos \alpha} g,$$

woraus dann  $F$  folgt.

§ 209. Beisp. 2. *Eine cylindrische Aushöhlung, deren Ausschnitt eine ovale Curve ist und deren Erzeugungslinien horizontal sind, wird in eine cubische Masse gemacht, die auf einer glatten horizontalen Ebene frei gleiten kann. Die Oberfläche der Höhlung ist vollkommen rauh und eine Kugel ruht derart in ihr, dass die Verticalebene durch die Schwerpunkte der Masse und der Kugel auf den Erzeugenden des Cylinders senkrecht steht. Die Bewegungsgrösse  $B$  wird dem Würfel durch einen Stoss in dieser Verticalebene mitgetheilt. Man suche die relative Bewegung der Kugel in Bezug auf den Würfel und ermittle, welchen Werth die Stosskraft mindestens haben muss, wenn die Kugel die Wand der Höhlung nicht verlassen soll.*

Gleichzeitig mit dem Stoss  $B$  tritt auch eine Stossreibung zwischen dem Würfel und der Kugel auf.  $M, m$  seien die Massen des Würfels und der Kugel,  $a$  der Radius der Kugel,  $k$  ihr Trägheitsradius für einen Durchmesser.  $V_0$  sei die Anfangsgeschwindigkeit des Würfels,  $v_0$  die des Mittelpunktes der Kugel *in Bezug auf* den Würfel,  $\omega_0$  die Anfangswinkelgeschwindigkeit. Nimmt man die Horizontalcomponenten für das ganze System und die Momente für die Kugel allein um den Berührungspunkt, so erhält man

$$\left. \begin{aligned} m(v_0 + V_0) + MV_0 &= B \\ a(v_0 + V_0) + k^2\omega_0 &= 0 \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (1),$$

und da kein Gleiten stattfindet

$$v_0 - a\omega_0 = 0 \dots \dots \dots (2).$$

Um die nun folgende Bewegung zu finden, wollen wir annehmen,  $(x, y)$  seien die auf rechtwinklige an der cubischen Masse befestigte Axen bezogenen Coordinaten des Mittelpunktes der Kugel;  $x$  sei horizontal,  $y$  vertical. Ist nun die Gleichung der cylindrischen Höhlung gegeben, so ist  $y$  eine bekannte Function von  $x$ . Wenn  $\psi$  den Winkel bedeutet, den die Tangente an die Höhlung im Berührungspunkt der Kugel mit dem Horizont macht, so ist  $\operatorname{tg} \psi = \frac{dy}{dx}$ .

Ist ferner  $V$  die Geschwindigkeit der cubischen Masse, so folgt aus § 132

$$m\left(\frac{dx}{dt} + V\right) + MV = B \dots \dots \dots (3).$$

Wenn man unter  $T_0$  die anfängliche lebendige Kraft und unter  $y_0$  den Anfangswerth von  $y$  versteht, so ist nach der Gleichung der lebendigen Kraft

$$\frac{1}{2} m \left[ \left( \frac{dx}{dt} + V \right)^2 + \left( \frac{dy}{dt} \right)^2 + k^2 \omega^2 \right] + \frac{1}{2} M V^2 = T_0 - m g (y - y_0) \quad (4),$$

worin  $\omega$  die Winkelgeschwindigkeit der Kugel zur Zeit  $t$  bedeutet. Ist  $v$  die relative Geschwindigkeit des Mittelpunktes der Kugel in Bezug auf den Würfel, so ist, da kein Gleiten stattfindet,  $v = a\omega$ . Durch Elimination von  $V$  und  $\omega$  aus diesen Gleichungen findet man

$$\left( \frac{dx}{dt} \right)^2 \cdot \left[ (1 + \operatorname{tg}^2 \psi) \left( 1 + \frac{k^2}{a^2} \right) - \frac{m}{M+m} \right] = Cg - 2gy \dots \dots (5),$$

worin

$$Cg = \frac{B^2}{(M+m) \left[ M + (M+m) \frac{k^2}{a^2} \right]} + 2gy_0 \dots \dots (6).$$

Diese Gleichung gibt die Bewegung der Kugel in Bezug auf den Würfel an.

§ 210. Um den Druck auf den Würfel zu finden, wollen wir den Würfel zur Ruhe bringen.  $R$  sei der Normaldruck der Kugel auf den Würfel,  $F$  die Reibung positiv genommen in derselben Richtung wie der Bogen. Die ganze Effectivkraft am Würfel ist  $X = R \sin \psi + F \cos \psi$ . Nach § 204 muss man jedem Massenpunkt eine Beschleunigung  $\frac{X}{M}$  in der dieser Kraft entgegengesetzten Richtung mittheilen. An

der Kugel greift daher eine Kraft  $\frac{m}{M} X$  in horizontaler Richtung an, wozu dann noch die Reaction  $R$ , die Reibung  $F$  und ihr eignes Gewicht kommt. Nimmt man die Momente um ihren Mittelpunkt, so ist

$$mk^2 \frac{d\omega}{dt} = Fa \dots \dots \dots (7).$$

Die Componenten längs der Tangente an die Bahn geben

$$m \frac{dv}{dt} = -F - \frac{m}{M} X \cos \psi - mg \sin \psi \quad (8).$$

Da kein Gleiten stattfindet

$$v = a\omega \quad (9).$$

Differenzirt man (9) und substituirt aus (7) und (8), so folgt

$$F = -R \frac{\gamma \sin \psi \cos \psi}{1 + \gamma \cos^2 \psi} - mg \frac{k^2}{a^2 + k^2} \frac{\sin \psi}{1 + \gamma \cos^2 \psi} \quad (10),$$

worin  $\gamma = \frac{k^2}{a^2 + k^2} \frac{m}{M}$  ist. Aus den Componenten der am Mittelpunkt der Kugel angreifenden Kräfte in der Richtung der Normalen zur Bahn ergibt sich

$$\frac{mv^2}{\varrho} = R + \frac{m}{M} X \sin \psi - mg \cos \psi \quad (11),$$

unter  $\varrho$  den Krümmungsradius der Bahn verstanden. Setzt man für  $v^2$  seinen Werth aus der Gleichung (5) ein, der man die bequemere Gestalt

$$v^2 (1 - \beta \cos^2 \psi) = \frac{a^2}{a^2 + k^2} (C - 2y) g \quad (12)$$

geben kann, worin  $\beta = \frac{a^2}{a^2 + k^2} \frac{m}{M + m}$  ist, so erhält man zwei Gleichungen zur Ermittlung der Reactionen  $F$  und  $R$ .

Die Elimination von  $F$  gibt

$$C - 2y + \varrho \cos \psi \frac{1 - \beta \cos^2 \psi}{1 + \gamma \cos^2 \psi} \cdot \frac{\beta + \gamma}{\beta} = \frac{R}{mg} \varrho P \quad (13),$$

wobei  $P$  eine ziemlich complicirte Function von  $\psi$  ist, die man nicht immer nöthig hat. Es ist

$$P = \frac{(1 - \beta \cos^2 \psi)^2}{1 + \gamma \cos^2 \psi} \frac{\beta + \gamma}{\beta(1 - \beta)} \quad (14).$$

Man beachte, dass  $P$  nicht verschwinden kann, stets endlich und positiv ist, da  $\beta$  nothwendiger Weise kleiner als die Einheit ist.

Soll die Kugel den ganzen Weg um die Höhlung zurücklegen, so muss der in (12) gegebene Werth von  $v$  für alle  $y$  und  $\cos \psi$  reell bleiben. Der Werth von  $C$  in (6) muss daher grösser als der grösste Werth von  $2y$  sein. Ebenso muss  $R$  stets positiv bleiben, so dass die Werthe von  $\cos \psi$ , wie sie aus Gl. (13) folgen, für den Fall  $R = 0$  sämtlich imaginär oder numerisch grösser als die Einheit sind. Man beachte, dass, wenn  $C > 2y$  und  $\varrho$  stets positiv ist,  $R$  für keinen positiven Werth von  $\cos \psi$  verschwinden kann.

Hat die Gleichung (13) für  $R = 0$  zwei gleiche Wurzeln, die kleiner als die Einheit sind, so verschwindet der Druck auf die Höhlung, wechselt aber sein Vorzeichen nicht. In diesem Fall verlässt die Kugel die Wand der Höhlung an dem diesen Werth von  $\cos \psi$  entsprechenden Punkt nicht. Aus der Bedingung, dass die Wurzeln gleich sein sollen, ergibt sich

$$\frac{d}{d\psi} \left[ \varrho \cos \psi \frac{1 - \beta \cos^2 \psi}{1 + \gamma \cos^2 \psi} \right] = \frac{2\beta}{\beta + \gamma} \varrho \sin \psi \quad (15),$$

worin  $\varrho$  eine durch die Gleichung des Cylinders gegebene Function von  $\psi$  ist. Setzt man der Kürze halber  $\xi = \cos \psi$ , so reducirt sich die Gleichung auf

$$\frac{d\lg \varrho}{d\psi} \xi (1 - \beta \xi^2) (1 + \gamma \xi^2) (\beta + \gamma) = \sin \psi [3\beta + \gamma - (3\beta^2 + \gamma^2) \xi^2 + \beta\gamma(\gamma - \beta) \xi^4] \quad (16).$$

Wenn für keinen andern reellen Werth von  $\cos \psi$  als diesen  $R$  in (13) verschwindet und sein Vorzeichen wechselt, wenn ferner  $C > 2y$  bleibt, so macht die Kugel gerade einen Umgang. Zu diesem Resultat kommt man auch auf andern Weg. Wenn die Kugel gerade einen Umgang machen soll, so muss  $R$

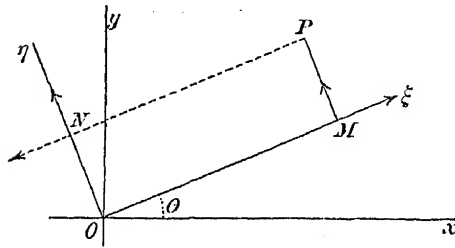
durchweg positiv bleiben und an dem Punkt, an welchem es am kleinsten ist, verschwinden. Es wird daher  $R$  gleichzeitig mit  $\frac{dR}{d\psi}$  Null. Man differenzire (13), wobei man beachte, dass der Differentialquotient der rechten Seite Null ist mit Ausnahme einzelner Punkte, für welche etwa  $\varrho$  oder  $\frac{d\varrho}{d\psi}$  unendlich gross wird.

Man beachte auch, dass die Constante  $C$ , welche von den Anfangsbedingungen abhängt, verschwindet. Auf diese Art kommt man wieder zu der Gleichung (15).

Bemerkenswerth ist, dass der Punkt, an welchem der Druck verschwindet und ein Minimum wird, nur dann der höchste Punkt der Höhlung ist, wenn der Krümmungsradius  $\varrho$  daselbst ein Maximum oder Minimum ist. Dies folgt unmittelbar aus Gl. (16).

Um den Stoss  $B$  zu finden, der nöthig ist, damit die Kugel grade einen Umgang mache, muss man die Wurzeln der Gleichungen (13) und (16) untersuchen. Zu diesem Zweck zeichne man eine Curve, deren Abscissen  $\xi$  und Ordinaten  $\eta$  sind, unter  $\eta$  die linke Seite von Gl. (13) verstanden, von  $\xi=0$  bis  $\xi=-1$ . Die Curve kann Wellenlinien machen; die Maxima und Minima der Ordinaten ergeben sich aus (16). Soll die Kugel rund herum laufen, so muss der Werth von  $C$  derart sein, dass jede Ordinate zwischen  $\xi=0$  und  $\xi=-1$  positiv bleibt. Wir untersuchen daher die Wurzeln der Gl. (16) und wählen die Wurzel, welche  $\eta$  am kleinsten macht. Den Werth von  $C$  erhält man dann, indem man diesen Werth von  $\eta$  gleich Null setzt. Hat man so  $C$  gefunden, so folgt der Werth von  $B$  aus (6). Das Resultat ist selbstverständlich den oben erwähnten Einschränkungen unterworfen.

§ 211. Sich bewegende Axen. Zunächst wollen wir nun den Fall betrachten, in welchem die Bewegung auf zwei zu einander senkrechte



Gerade  $O\xi$ ,  $O\eta$  bezogen werden soll, die sich um den festliegenden Koordinatenanfang  $O$  mit der Winkelgeschwindigkeit  $\omega$  drehen.

$Ox$ ,  $Oy$  seien zu einander rechtwinklige festliegende Axen und der Winkel  $xO\xi = \theta$ .  $\xi = OM$ ,  $\eta = PM$  seien die Coordinaten eines Punktes  $P$ ;

$u$ ,  $v$  die Componenten der Geschwindigkeit und  $X$ ,  $Y$  die der Beschleunigung des Punktes  $P$  in den Richtungen  $O\xi$ ,  $O\eta$ .

Offenbar erhält man die Bewegung von  $P$  aus den Bewegungen der beiden Punkte  $M$ ,  $N$  durch einfache Addition. Die Componenten der Geschwindigkeit von  $M$  längs und senkrecht zu  $OM$  sind  $\frac{d\xi}{dt}$  bez.  $\xi\omega$ , und ebenso sind  $\frac{d\eta}{dt}$  bez.  $\eta\omega$  die Componenten der Geschwindigkeit von  $N$  längs und senkrecht zu  $ON$ . Addirt man sie mit den richtigen Vorzeichen, so erhält man

$$u = \frac{d\xi}{dt} - \eta\omega, \quad v = \frac{d\eta}{dt} + \xi\omega.$$

Da die Beschleunigung das Mass für die Geschwindigkeitszunahme ist, gerade wie die Geschwindigkeit das Mass für die räumliche

Entfernungszunahme, so erhalten wir die entsprechenden Formeln für  $X$ ,  $Y$ , indem wir  $u$ ,  $v$  statt  $x$ ,  $y$  schreiben, also

$$X = \frac{du}{dt} - v\omega, \quad Y = \frac{dv}{dt} + u\omega.$$

Durch Addition der Beschleunigungen von  $M$  und  $N$  findet man auf dieselbe Art:

$$X = \frac{d^2\xi}{dt^2} - \xi\omega^2 - \frac{1}{\eta} \frac{d}{dt} (\eta^2\omega),$$

$$Y = \frac{d^2\eta}{dt^2} - \eta\omega^2 + \frac{1}{\xi} \frac{d}{dt} (\xi^2\omega).$$

Durch Benutzung dieser Formeln statt  $\frac{d^2x}{dt^2}$  und  $\frac{d^2y}{dt^2}$  kann man die Bewegung auf die beweglichen Axen  $O\xi$ ,  $O\eta$  beziehen.

§ 212. Beisp. 1. Die Axen  $O\xi$ ,  $O\eta$  seien schiefwinklig und mögen den Winkel  $\alpha$  miteinander machen; man beweise, dass, wenn die Geschwindigkeit durch die beiden Componenten  $u$ ,  $v$  parallel den Axen dargestellt wird,

$$u = \frac{d\xi}{dt} - \omega\xi \cotg \alpha - \omega\eta \operatorname{cosec} \alpha,$$

$$v = \frac{d\eta}{dt} + \omega\eta \cotg \alpha + \omega\xi \operatorname{cosec} \alpha.$$

In diesem Fall ist  $PM$  parallel zu  $O\eta$ . Die Geschwindigkeiten von  $M$  und  $N$  sind dieselben wie zuvor. Ihre Resultante ist der Aufgabe nach die nämliche wie die von  $u$  und  $v$ . Sucht man die Componenten in irgend zwei Richtungen und setzt sie gleich, so erhält man zwei Gleichungen zur Ermittlung von  $u$  und  $v$ . Zu solchen Richtungen wählt man am besten die Lothe auf  $O\xi$  und  $O\eta$ , weil dann  $u$  in der einen und  $v$  in der andern Gleichung nicht auftritt.  $u$  und  $v$  kann man so jedes für sich finden, wenn man das andre nicht nöthig hat.

Beisp. 2. Die Beschleunigung werde durch ihre Componenten  $X$  und  $Y$  dargestellt; man beweise, dass

$$X = \frac{du}{dt} - \omega u \cotg \alpha - \omega v \operatorname{cosec} \alpha,$$

$$Y = \frac{dv}{dt} + \omega v \cotg \alpha + \omega u \operatorname{cosec} \alpha.$$

§ 213. Man erhält diese Gleichungen auf dieselbe Art, wenn man die Geschwindigkeiten und Beschleunigungen senkrecht zu  $O\xi$  und  $O\eta$  zerlegt.

Beisp. 3.  $u$ ,  $v$  seien die Componenten der Geschwindigkeit eines Punktes  $P$  auf rechtwinklige mit der Winkelgeschwindigkeit  $\omega$  rotirende Axen bezogen; man beweise, dass der Krümmungsradius der Bahn von  $P$  im Raum durch die Gleichung

$$(u^2 + v^2)^{\frac{3}{2}}/\rho = u \frac{dv}{dt} - v \frac{du}{dt} + (u^2 + v^2) \omega$$

gegeben ist.

Nimmt man die festen Axen so an, dass sie einen Moment mit den sich bewegenden Axen zusammenfallen, so ist die linke Seite der Gleichung

$$\frac{dx}{dt} \frac{d^2y}{dt^2} - \frac{d^2x}{dt^2} \frac{dy}{dt}.$$

Substituirt man  $\frac{dx}{dt} = u$ ,  $\frac{dy}{dt} = v$  und für  $\frac{d^2x}{dt^2} = X$ ,  $\frac{d^2y}{dt^2} = Y$  ihre oben gegebenen Werthe, so ergibt sich das Resultat sofort.

Der gewöhnliche Ausdruck für  $\varrho$  in Polarcoordinaten folgt daraus, wenn man  $u = \frac{dr}{dt}$ ,  $v = r \frac{d\theta}{dt}$ ,  $w = \frac{d\theta}{dt}$  setzt. Ist  $\theta$  die unabhängige Variable, so wird  $\frac{d\theta}{dt} = 1$ .

Beisp. 4. Im Fall von Anfangsbewegungen, die vom Zustand der Ruhe ausgehen, wird der Ausdruck für  $\varrho$  in dem letzten Beispiel unbrauchbar. Man zeige, indem man wie in § 200 verfährt, dass  $\varrho$  nur dann einen von Null verschiedenen Werth haben kann, wenn  $\frac{du}{dt} \frac{d^2v}{dt^2} - \frac{d^2u}{dt^2} \frac{dv}{dt} + 2 \left[ \left( \frac{du}{dt} \right)^2 + \left( \frac{dv}{dt} \right)^2 \right] \omega = 0$  ist und dass in diesem Fall

$$\frac{\left[ \left( \frac{du}{dt} \right)^2 + \left( \frac{dv}{dt} \right)^2 \right]^{\frac{3}{2}}}{\varrho} = \frac{1}{3} \left( \frac{du}{dt} \frac{d^3v}{dt^3} - \frac{dv}{dt} \frac{d^3u}{dt^3} \right) + \left( \frac{du}{dt} \frac{d^2u}{dt^2} + \frac{dv}{dt} \frac{d^2v}{dt^2} \right) \omega + \left[ \left( \frac{du}{dt} \right)^2 + \left( \frac{dv}{dt} \right)^2 \right] \frac{d\omega}{dt},$$

worin  $\frac{du}{dt}$ ,  $\frac{d^2u}{dt^2}$ , etc.,  $\frac{dv}{dt}$ ,  $\frac{d^2v}{dt^2}$ , etc. ihre Anfangswerthe darstellen, indem der Kürze wegen eine Null an die Buchstaben  $u$  etc. nicht angehängt wurde.

§ 213. Beisp. Ein materieller Punkt bewegt sich unter der Wirkung beliebiger Kräfte auf einer glatten Curve, welche gezwungen ist, sich mit der Winkelgeschwindigkeit  $\omega$  um eine feste Axe zu drehen. Man finde die relative Bewegung in Bezug auf die Curve.

Wir wollen annehmen, die Bewegung fände in einem Raum von drei Dimensionen statt. Die  $Z$ -Axe sei die festliegende Axe und die  $\xi$  und  $\eta$ -Axen mögen bez. der Curve festliegend sein. Die Masse sei die Einheit der Masse. Die Bewegungsgleichungen sind dann

$$\left. \begin{aligned} \frac{d^2\xi}{dt^2} - \xi\omega^2 - \frac{1}{\eta} \frac{d}{dt}(\eta^2\omega) &= X + Rl \\ \frac{d^2\eta}{dt^2} - \eta\omega^2 + \frac{1}{\xi} \frac{d}{dt}(\xi^2\omega) &= Y + Rm \\ \frac{d^2z}{dt^2} &= Z + Rn \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (1),$$

worin  $X$ ,  $Y$ ,  $Z$  die Componenten der gegebenen beschleunigenden Kräfte in den Richtungen der Axen,  $R$  der Druck auf die Curve und  $(l, m, n)$  die Richtungs-cosinusse der Richtung von  $R$  sind. Da  $R$  senkrecht zur Curve wirkt, so ist

$$l \frac{d\xi}{ds} + m \frac{d\eta}{ds} + n \frac{dz}{ds} = 0.$$

Die sich bewegende Curve werde rechtwinklig auf die Ebene der  $\xi$ ,  $\eta$  projectirt,  $\sigma$  sei der Bogen der Projection und  $v' = \frac{d\sigma}{dt}$  die Componente der Geschwindigkeit parallel zur Projectionsebene. Den Gleichungen kann man dann die Form geben:

$$\frac{d^2\xi}{dt^2} = X + \omega^2\xi + \frac{d\omega}{dt}\eta + 2\omega v' \frac{d\eta}{d\sigma} + Rl,$$

$$\frac{d^2\eta}{dt^2} = Y + \omega^2\eta - \frac{d\omega}{dt}\xi - 2\omega v' \frac{d\xi}{d\sigma} + Rm,$$

$$\frac{d^2z}{dt^2} = Z + Rn.$$

Die beiden Glieder  $2\omega v' \frac{d\eta}{d\sigma}$  und  $-2\omega v' \frac{d\xi}{d\sigma}$  sind die Componenten einer Kraft  $2\omega v'$ , deren Richtungscosinusse

$$l' = \frac{d\eta}{d\sigma}, \quad m' = -\frac{d\xi}{d\sigma}, \quad n' = 0$$

sind. Sie genügen der Gleichung  $l' \frac{d\xi}{d\sigma} + m' \frac{d\eta}{d\sigma} + n' \frac{dz}{d\sigma} = 0$ .

Die Kraft ist daher senkrecht zur Tangente an die Curve und senkrecht zur Rotationsaxe gerichtet.  $R'$  möge die Resultante der Reaction  $R$  und der Kraft  $2\omega v'$  sein.  $R'$  wirkt alsdann auch rechtwinklig zur Tangente; ( $l'$ ,  $m'$ ,  $n'$ ) mögen ihre Richtungscosinusse sein.

Die Bewegungsgleichungen erhalten mithin die Gestalt

$$\left. \begin{aligned} \frac{d^2\xi}{dt^2} &= X + \omega^2\xi + \frac{d\omega}{dt}\eta + R'l' \\ \frac{d^2\eta}{dt^2} &= Y + \omega^2\eta - \frac{d\omega}{dt}\xi + R'm'' \\ \frac{d^2z}{dt^2} &= Z + R'n'' \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (2).$$

Dies sind die Bewegungsgleichungen eines sich auf einer festen Curve bewegendem Massenpunktes, an dem ausser den gegebenen Kräften noch zwei andre Kräfte angreifen, nämlich (1) eine Kraft  $\omega^2 r$ , die grade von der Axe weg gerichtet ist, unter  $r$  den Abstand des Punktes von der Axe verstanden, und (2) eine Kraft  $\frac{d\omega}{dt} r$ , deren Richtung senkrecht zu der den Punkt und die Axe enthaltenden Ebene und der Richtung der Rotation der Curve entgegengesetzt ist.

Bei jedem speciellen Problem kann man daher die Curve so ansehen, als läge sie fest. Die Curve möge sich z. B. um die Axe mit gleichförmiger Winkelgeschwindigkeit drehen. Nimmt man dann die Componenten in der Richtung der Tangente, so ist

$$v \frac{dv}{ds} = X \frac{dx}{ds} + Y \frac{dy}{ds} + Z \frac{dz}{ds} + \omega^2 r \frac{dr}{ds},$$

worin  $r$  den Abstand des Massenpunktes von der Axe bedeutet.  $V$  sei der Anfangswerth von  $v$ ,  $r_0$  der von  $r$ . Dann ist

$$v^2 - V^2 = 2 \int (Xdx + Ydy + Zdz) + \omega^2 (r^2 - r_0^2).$$

Ist  $v_0$  die Geschwindigkeit, die der Massenpunkt unter der Wirkung derselben Kräfte hätte, wenn die Curve festläge, so erhält man

$$v_0^2 - V^2 = 2 \int (Xdx + Ydy + Zdz)$$

und daraus

$$v^2 - v_0^2 = \omega^2 (r^2 - r_0^2).$$

Der Druck auf die sich bewegende Curve ist dem Druck auf die festliegende Curve nicht gleich. Da  $l' = d\eta/d\sigma$ ,  $m' = -d\xi/d\sigma$  ist, so wirkt die Kraft  $2\omega v'$  parallel zu dem Loth auf die projecirte Curve in einer Richtung, welche der in Folge der Rotation  $\omega$  entgegengesetzt ist. Dreht man diese Kraft daher um, so

ist der Druck  $R$  auf die bewegliche Curve die Resultante aus dem Druck  $R'$  auf die feste Curve und eines Drucks  $2\omega v$ , der senkrecht sowohl zur Curve als zur Axe wirkt, wobei der letztere in der Bewegungsrichtung der Curve positiv zu nehmen ist.

Nimmt man z. B. an, die Curve sei eben, bewege sich gleichmässig um eine zu ihrer Ebene senkrechte Axe und gegebene Kräfte seien nicht vorhanden, so ist, wenn man die Componenten in der Richtung der Normalen nimmt,

$$\frac{v^2}{\rho} = -\omega^2 r \sin \varphi + R',$$

worin  $\varphi$  den Winkel bedeutet, den  $r$  mit der Tangente macht. Daraus folgt, unter  $p$  das von der Axe auf die Tangente gefällte Loth verstanden,

$$R = \frac{v^2}{\rho} + \omega^2 p + 2\omega v.$$

Dieses Beispiel hätte man auch durch Cylindercoordinaten in der Art leicht lösen können, dass man die feste Axe zur  $z$ -Axe genommen und die Projection auf die  $xy$ -Ebene auf Polarcoordinaten bezogen hätte. Diese Methode, das Problem zu behandeln, wird dem Leser zur Uebung überlassen.

Beisp. Ist  $\omega$  variabel, so erhält man

$$R = \frac{v^2}{\rho} + \omega^2 p + 2\omega v + \frac{d\omega}{dt} \sqrt{r^2 - p^2}.$$

### Beispiele

(den an der Universität und den Colleges gegebenen „Examination Papers“ entnommen).

1. Ein kreisförmiger Reif, dessen Gewicht  $nw$  ist, kann sich frei auf einer glatten horizontalen Ebene bewegen. Er trägt auf seinem Umfang einen kleinen Ring vom Gewicht  $w$  und der Reibungscoefficient zwischen beiden ist  $\mu$ . Anfangs befindet sich der Reif in Ruhe und hat der Ring eine Winkelgeschwindigkeit  $\omega$  um den Mittelpunkt des Reifen. Man zeige, dass der Ring nach der Zeit  $\frac{1+n}{\mu\omega}$  auf dem Reifen zur Ruhe kommt.

2. Die Ebene eines schweren kreisförmigen Drahtes steht vertical und sein tiefster Punkt befindet sich in der Höhe  $h$  über einer horizontalen Ebene. Ein kleiner Ring wird von dem höchsten Punkt aus längs des Drahtes mit einer Winkelgeschwindigkeit um sein Centrum gleich  $\pi n \sqrt{\frac{2g}{h}}$  geworfen und zu gleicher Zeit der Draht losgelassen. Man zeige, dass der materielle Punkt grade  $n$  Umdrehungen gemacht hat, wenn der Draht die horizontale Ebene erreicht.

3. Ein Draht von der Gestalt eines Kreises kann sich in einer horizontalen Ebene um einen festen Punkt  $O$  seines Umfangs drehen und trägt eine kleine Kugel  $P$ , die anfänglich mit der gegebenen Geschwindigkeit  $V$  von dem entgegengesetzten Ende  $A$  des durch  $O$  gehenden Durchmessers aus geschleudert wurde. Die Masse des Drahtes ist doppelt so gross wie die des Kugelchens; man zeige, dass

$$(16\alpha^4 + 4\alpha^2 r^2 - r^4) \left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2 = V^2 r^2,$$

worin

$$r = OP, \quad OA = 2\alpha, \quad \varphi = \angle POA. \quad \S 147.$$

4. Zwei gleiche gleichförmige Stäbe von der Länge  $2a$ , die an ihrem einen Ende lose mit einander verbunden sind, werden symmetrisch auf eine feste glatte Kugel vom Radius  $\frac{1}{3}a\sqrt{2}$  gelegt, in die Höhe gehoben und derart in eine hori-



zontale Lage gebracht, dass das Gelenk die Kugel berührt. Man lässt sie unter der Wirkung der Schwere fallen; man zeige, wenn sie zum ersten Mal zur Ruhe kommen, dass sie den Winkel  $\arccos \frac{1}{3}$  mit dem Horizont machen; dass die Berührungspunkte mit der Kugel alsdann die Schwingungscentren der Stäbe bezüglich des Gelenkes sind; dass der Druck auf die Kugel an jedem Berührungspunkt ein Viertel des Gewichts eines jeden Stabes beträgt und dass kein Zwangszustand am Gelenk vorhanden ist. § 143.

5. Ein schwerer gleichförmiger Reif von der Gestalt eines Kreises, dem Radius  $a$  und der Masse  $2\pi am$ , der an einem Punkt vollständig gebrochen ist und dessen Ebene vertical steht, rollt mit gleichförmiger Winkelgeschwindigkeit  $\omega$  auf einer horizontalen Ebene. Man suche den Maximal- und Minimalwerth des Biegemoments an irgend einem Punkt  $Q$  des Reifens und beweise, dass, wenn  $\omega$  so gross ist, dass das Biegemoment niemals verschwindet, der grösste dieser Werthe  $2ma^2 \sin^2 \theta (a\omega^2 + g)$  ist, unter  $2\theta$  den Winkel verstanden, den  $Q$  und der Bruchpunkt am Centrum des Reifens bestimmen.

6. Die Enden zweier graden gleichen und gleichförmigen Stäbe sind durch zwei Stricke von gleicher Länge  $a$  so verbunden, dass das Ganze ein Parallelogramm bildet. Ein Stab wird an seinem Mittelpunkt durch eine feste Axe gestützt, um welche er sich frei bewegen kann und diese Axe steht senkrecht auf der Ebene der Bewegung, die vertical ist. Man zeige, dass der Mittelpunkt des unteren Stabes auf dieselbe Art, wie ein einfaches Pendel von der Länge  $a$  schwingt und dass die Winkelbewegung der Stäbe von dieser Schwingung nicht abhängt.

7. Ein dünner Strick ist an zwei Punkte  $A, B$  in derselben horizontalen Ebene befestigt und trägt an seinem Mittelpunkt das Gewicht  $W$ . Ein Stab von der Länge  $AB$  und dem Gewicht  $W$  hat an jedem Ende einen Ring, durch welchen der Strick hindurchgeht, und wird aus der Lage  $AB$  fallen gelassen. Man zeige, dass der Strick wenigstens die Länge  $\frac{5}{3} AB$  haben muss, wenn das Gewicht den Stab je erreichen soll. § 143.

Wenn das System sich im Gleichgewicht befindet und das Gewicht ein wenig, vertical verschoben wird, so beträgt die Dauer seiner kleinen Schwingungen

$$3\pi \left( \frac{AB}{3g\sqrt{3}} \right)^{\frac{1}{2}}.$$

8. Ein feiner Zwirn ist in einer glatten kreisförmigen Röhre eingeschlossen welche frei um einen verticalen Durchmesser rotirt; man beweise, dass die Neigung ( $\theta$ ) des Durchmessers durch den Schwerpunkt des Fadens gegen die Verticale in der Lage relativen Gleichgewichts durch die Gleichung  $\cos \theta = \frac{g}{a\omega^2 \cos \beta}$  gegeben ist, worin  $\omega$  die Winkelgeschwindigkeit der Röhre,  $a$  ihr Radius und  $2a\beta$  die Länge des Fadens bedeutet. Man erkläre den Fall, in welchem der Werth von  $a\omega^2 \cos \beta$  zwischen  $g$  und  $-g$  liegt.

9. Ein glatter Draht ohne Trägheit ist wie eine Schraubenlinie gebogen und kann sich um eine verticale Axe drehen, die mit einer Erzeugenden des Cylinders, auf dem die Schraubenlinie aufgetragen ist, zusammenfällt. Ein kleiner schwerer Ring gleitet die Schraubenlinie hinab, indem er von einem Punkt ausgeht, in dem diese verticale Axe die Schraubenlinie trifft; man beweise, dass die Winkelgeschwindigkeit der Schraubenlinie ein Maximum wird, wenn sie sich um den durch die Gleichung  $\cos^2 \theta + \tan^2 \alpha + \theta \sin 2\theta = 0$  gegebenen Winkel  $\theta$  gedreht hat, unter  $\alpha$  die Neigung der Schraubenlinie gegen den Horizont verstanden. [Die Masse der Schraubenlinie ist als Null anzusehen.]

10. Eine kugelförmige Höhlung vom Radius  $a$  wird in einen gläsernen Würfel von der Masse  $M$  gemacht und ein Punkt von der Masse  $m$  hineingelegt. Der Würfel wird dann auf einer glatten horizontalen Ebene mit der Geschwindigkeit  $V$  so in Bewegung gesetzt, dass der materielle Punkt grade um die Kugel herum läuft und dabei in Berührung mit ihr bleibt. Man beweise, dass

$$V^2 = 5ag + 4ag \frac{m}{M}.$$

11. Ein vollkommen rauher Ball wird in eine hohle cylindrische Gartenwalze auf ihren tiefsten Punkt gelegt und die Walze dann einen horizontalen Weg entlang mit der gleichförmigen Geschwindigkeit  $V$  gezogen. Man zeige, dass der Ball ganz um das Innere der Walze herumrollt, wenn  $V^2$  grösser als  $\frac{27}{7}g(b-a)$  ist, unter  $a$  den Radius des Balls und unter  $b$  den der Walze verstanden.

12.  $AB, BC$  sind zwei gleiche gleichförmige Stäbe, die bei  $B$  lose durch ein Gelenk verbunden sind und sich mit derselben Geschwindigkeit in einer zu ihrer Länge senkrechten Richtung bewegen; das Ende  $A$  wird plötzlich festgehalten; man zeige, dass die Anfangswinkelgeschwindigkeit von  $AB$  dreimal so gross als die von  $BC$  ist. Man zeige auch, dass bei der nachfolgenden Bewegung der Stäbe der grösste Winkel, den sie miteinander machen,  $\arccos \frac{2}{3}$  ist, und dass, wenn sie das nächste Mal eine grade Linie bilden, die Winkelgeschwindigkeit von  $BC$  neunmal so gross als die von  $AB$  ist. §§ 169, 147.

13. Drei gleiche schwere gleichförmige Balken, die durch Gelenke miteinander verbunden sind, werden so auf einen glatten Tisch gelegt, dass sie eine grade Linie bilden, und dem mittleren Balken wird in seinem Mittelpunkt ein bestimmter horizontaler Stoss senkrecht zu seiner Länge gegeben; man zeige, dass der momentane Stoss auf jeden der andern Balken ein Sechstel des gegebenen Stosses ist.

14. Drei Balken von gleichem Material sind so verbunden, dass sie einen einzigen Balken bilden, und werden auf einen glatten horizontalen Tisch gelegt. Die beiden äusseren Balken sind gleich lang und einer von ihnen erhält auf sein freies Ende einen Schlag, der senkrecht zu seiner Länge gerichtet ist. Man bestimme die Länge des mittleren Balkens, wenn der andre äussere Balken die grösstmögliche Winkelgeschwindigkeit erhalten soll.

Resultat. Ist  $m$  die Masse eines jeden Endbalkens,  $\beta m$  die des inneren,  $P$  die Bewegungsgrösse des Schlags,  $\omega$  die dem dritten Balken mitgetheilte Winkelgeschwindigkeit, so ist  $m\alpha\omega\left(\frac{1}{\beta} + \frac{8}{3} + \frac{4\beta}{3}\right) = P$ , woraus sich ergibt, dass  $\beta = \frac{1}{2}\sqrt{3}$ , wenn  $\omega$  ein Maximum ist.

15. Zwei rauhe Stäbe  $A, B$  werden parallel zu einander auf dieselbe horizontale Ebene gelegt. Ein dritter rauher Stab  $C$  wird rechtwinklig so über sie gelegt, dass sein Schwerpunkt in die Mitte zwischen sie fällt.  $C$  wird um den Winkel  $\alpha$  in die Höhe gehoben und fallen gelassen; man bestimme die Bedingungen, unter welchen er Schwingungen macht und zeige, dass, wenn seine Länge dem doppelten Abstand zwischen  $A$  und  $B$  gleichkommt, der Winkel  $\theta$ , um den er sich bei der  $n^{\text{ten}}$  Schwingung erhebt, durch die Gleichung

$$\sin \theta = \left(\frac{1}{7}\right)^{2n} \cdot \sin \alpha$$

gegeben ist.

16. Die Ecken  $A, B$  einer schweren rechteckigen Lamelle  $ABCD$  können sich auf zwei glatten festen Drähten  $OA, OB$  bewegen, die rechte Winkel mit-

einander machen, in einer verticalen Ebene liegen und die gleiche Neigung gegen die Verticale haben. Die Lamelle befindet sich im Gleichgewicht, wobei  $AB$  horizontal ist; man finde die Geschwindigkeit ihres Schwerpunkts und die Winkelgeschwindigkeit, die durch einen in der Richtung der unteren Kante  $CD$  erfolgenden Stoss hervorgerufen werden. Gegeben ist  $AB = 2a$ ,  $BC = 4a$ ; man beweise, dass  $AB$  grade so hoch steigt, dass es mit dem einen Draht zusammenfällt, wenn der Stoss derart ist, dass er einer der Lamelle gleichen Masse eine Geschwindigkeit mittheilen würde, deren Quadrat  $\frac{8}{9}ga(2 - \sqrt{2})$  ist. Man finde auch die Stosskräfte bei  $A$  und  $B$ .

17. Ein Ball, der sich um eine verticale Axe dreht, bewegt sich auf einem glatten Tisch und trifft direct gegen eine vollkommen rauhe verticale Bande man zeige, dass die lebendige Kraft des Balles sich in dem Verhältniss

$$10 + 14 \operatorname{tg}^2 \theta : \frac{10}{e^2} + 49 \operatorname{tg}^2 \theta$$

vermindert, wo  $e$  die Elasticität des Balles und  $\theta$  der Abprallwinkel ist.

18. Ein Rhombus besteht aus vier starren gleichförmigen Stäben, von denen jeder die Länge  $2a$  hat und die sich um Gelenke an ihren Enden frei bewegen können. Wenn der Rhombus auf einen glatten horizontalen Tisch gelegt wird und einer der Stäbe einen Stoss rechtwinklig zu seiner Richtung erhält, so beginnt der Rhombus sich wie ein starrer Körper zu bewegen, wenn der Stoss einen Punkt trifft, der um  $a(1 - \cos \alpha)$  von dem Scheitelpunkt eines spitzen Winkels entfernt ist, wobei  $\alpha$  der spitze Winkel ist

19. Ein Rechteck wird aus vier gleichförmigen Stäben von der Länge  $2a$  bez.  $2b$  hergestellt, die an ihren Enden durch Gelenke verbunden sind. Das Rechteck rotirt auf einer glatten horizontalen Ebene um sein Centrum mit der Winkelgeschwindigkeit  $n$ ; plötzlich wird ein Punkt in einer der Seiten von der Länge  $2a$  festgehalten. Man zeige, dass die Winkelgeschwindigkeit der Seiten von der Länge  $2b$  sofort  $\frac{3a+b}{6a+4b}n$  wird. Man suche auch die Aenderung in der Winkelgeschwindigkeit der andern Seiten und die Stossaction an dem Punkt, der festgelegt wird.

20. Drei gleiche gleichförmige unelastische Stäbe, die durch Gelenke lose miteinander verbunden sind, werden in einer Geraden auf einen glatten horizontalen Tisch gelegt und die beiden äusseren mit gleichen Winkelgeschwindigkeiten um die Enden des mittleren (1) in derselben Richtung, (2) in entgegengesetzten Richtungen in Rotation gesetzt. Man beweise, dass in dem ersten Fall, wenn die äusseren Stäbe den grössten Winkel mit dem nach beiden Seiten verlängert gedachten mittleren machen, die gemeinsame Winkelgeschwindigkeit aller drei  $\frac{4}{7}\omega$  ist, und dass im zweiten Fall nach dem Zusammenstoss der beiden äusseren Stäbe das von ihnen gebildete Dreieck sich mit der gleichförmigen Geschwindigkeit  $\frac{2}{3}a\omega$  bewegt, wenn  $2a$  die Länge eines jeden Stabes ist.

21. Ein gleichseitiges, aus drei gleichen schweren gleichförmigen, an ihren Enden durch Gelenke verbundenen Stäben von der Länge  $a$  gebildetes Dreieck wird in einer verticalen Ebene so gehalten, dass eine Seite horizontal liegt, und die gegenüberliegende Ecke nach unten gerichtet ist. Nachdem es irgend eine Höhe durchfallen hat, wird der Mittelpunkt des oberen Stabs plötzlich angehalten; man zeige, dass die Stosswirkungen an den oberen und dem unteren Gelenk in dem Verhältniss  $\sqrt{13}:1$  stehen. Würde das untere Gelenk eben brechen, wenn das System die Höhe  $\frac{8a}{\sqrt{3}}$  durchfallen hat, so betrüge die Schwingungsamplitude der

unteren Stäbe genau einen Winkel von zwei Rechten, wenn das System die Höhe  $\frac{32a}{\sqrt{3}}$  herabgefallen ist.

22. Ein vollkommen rauher und starrer Reif rollt eine schiefe Ebene hinab und stösst auf ein Hinderniss in der Gestalt eines Nagels. Man zeige, dass, wenn der Radius des Reifens  $r$ , die Höhe des Nagels über der Ebene  $\frac{1}{2}r$  und die Geschwindigkeit grade vor dem Stoss  $V$  ist, der Reif über den Nagel springt, falls  $V^2 > \frac{16}{9}gr \left[1 - \sin\left(\alpha + \frac{1}{6}\pi\right)\right]$  ist, unter  $\alpha$  die Neigung der Ebene gegen den Horizont verstanden. Man zeige, dass der Reif nicht in Berührung mit dem Nagel bleibt, wenn  $V^2 \geq \frac{16}{9}gr \cdot \sin\left(\alpha + \frac{1}{6}\pi\right)$  und geschieht es doch, dass der Reif den Nagel verlässt, wenn der Durchmesser durch den Berührungspunkt mit dem Horizont einen Winkel macht, dessen Sinus  $\frac{9}{32}\frac{V^2}{gr} + \frac{1}{2}\sin\left(\alpha + \frac{\pi}{6}\right)$  ist.

23. Eine flache kreisförmige Scheibe vom Radius  $a$  wird auf einem rauhen horizontalen Tisch fortgestossen, welcher derart ist, dass die Reibung an einem Element  $cV^3m\alpha$  beträgt, wenn man unter  $\alpha$  das Element, unter  $V$  die Geschwindigkeit des Elements und unter  $m$  die Masse der Flächeneinheit versteht; man suche die Bahn des Mittelpunkts der Scheibe.

Wenn die Anfangsgeschwindigkeit des Schwerpunktes und die Winkelgeschwindigkeit der Scheibe  $u_0, \omega_0$  sind, so lässt sich beweisen, dass die Geschwindigkeit  $u$  und die Winkelgeschwindigkeit  $\omega$  zu irgend einer folgenden Zeit der Beziehung genügen  $\left(\frac{3u^2 - a^2\omega^2}{3u_0^2 - a^2\omega_0^2}\right)^2 = \frac{u^2\omega}{u_0^2\omega_0}$ .

24. Eine schwere kreisförmige Lamelle von dem Radius  $a$  und der Masse  $M$  rollt auf der Innenseite eines rauhen Kreisbogens vom doppelten Radius, der in einer verticalen Ebene festliegt. Man finde die Bewegung. Wenn die Lamelle auf den tiefsten Punkt des Bogens so gesetzt wird, dass sie sich in Ruhe befindet, so ist der Stoss, welchen sie in horizontaler Richtung erhalten muss, damit sie so hoch als möglich steige, ohne vollständig herumzulaufen und ohne abzufallen,  $M\sqrt{3ag}$ .

25. Eine Schnur ohne Gewicht wird um einen rauhen horizontalen Cylinder gewunden, dessen Masse  $M$  und Radius  $a$  ist und der sich um seine Axe drehen kann. An das freie Ende der Schnur wird eine Kette von der Masse  $m$  und der Länge  $l$  befestigt. Alsdann rollt man die Kette dicht zusammen und lässt sie los; man beweise, dass der Winkel  $\theta$ , um welchen sich der Cylinder nach der Zeit  $t$  gedreht hat, ehe die Kette vollständig ausgestreckt ist, durch  $M\alpha\theta = \frac{m}{l}\left(\frac{gt^2}{2} - \alpha\theta\right)^2$  gegeben ist.

26. Zwei gleiche Stäbe  $AC, BC$  sind bei  $C$  frei verbunden und bei  $A$  und  $B$ , zweien Punkten, die in derselben horizontalen Linie liegen, an Haken gehängt, wobei jeder Stab den Winkel  $\alpha$  mit dem Horizont macht. Der Haken  $B$  gibt plötzlich nach; man beweise, dass die Richtung des Druckes bei  $C$  sofort sich um einen Winkel dreht, dessen Tangente  $\frac{1 + 6\sin^2\alpha}{1 + 6\cos^2\alpha} \cdot \frac{2 - 3\cos^2\alpha}{3\sin\alpha\cos\alpha}$  ist.

27. Zwei Massenpunkte  $A, B$  werden durch einen dünnen Faden verbunden;  $A$  ruht auf einem rauhen horizontalen Tisch, während  $B$  vertical im Abstand  $l$  von der Kante des Tisches herabhängt.  $A$  ist nun gerade im Begriff, sich zu bewegen und  $B$  wird horizontal mit der Geschwindigkeit  $u$  fortgeschleudert; man

zeige, dass  $A$  sich mit der Beschleunigung  $\frac{\mu}{\mu+1} \cdot \frac{u^2}{l}$  zu bewegen beginnt und dass der Anfangskrümmungsradius der Bahn des Punktes  $B$ ,  $(\mu+1)l$  ist, wo  $\mu$  den Reibungscoefficienten bedeutet.

28. Zwei Massenpunkte ( $m, m'$ ) werden durch einen Faden verbunden, der durch einen kleinen festliegenden Ring geht, und so gehalten, dass der Faden horizontal ist; ihre Abstände von dem Ring sind  $a$  und  $a'$ .  $q, q'$  seien die Anfangskrümmungsradien ihrer Bahnen, wenn sie losgelassen werden; man beweise, dass  $\frac{m}{q} = \frac{m'}{q'}$  und  $\frac{1}{q} + \frac{1}{q'} = \frac{1}{a} + \frac{1}{a'}$  ist.

29. Eine Kugel, deren Schwerpunkt nicht in ihrem Centrum liegt, wird auf einen rauhen Tisch gelegt; der Reibungscoefficient ist  $\mu$ ; man bestimme, ob sie zu gleiten oder zu rollen beginnt.

30. Ein kreisförmiger Ring wird in verticaler Lage auf einer glatten horizontalen Ebene befestigt und ein kleiner Ring auf den Kreis gesetzt, der an dem höchsten Punkt mittelst eines Fadens befestigt ist, zu dem der Centriwinkel  $\alpha$  gehört. Der Faden wird durchgeschnitten und der Kreis freigelassen; man beweise, dass die Druckkräfte auf den Ring vor und nach dem Durchschneiden des Fadens in dem Verhältniss  $M + m \sin^2 \alpha : M \cos \alpha$  stehen, worin  $m$  und  $M$  die Massen des Ringes und des Kreises sind.

31. Das eine Ende  $C$  eines Stabes lässt man mit gleichförmiger Winkelgeschwindigkeit  $n$  auf dem Umfang eines Kreises vom Radius  $a$  rotiren, während der Stab selbst sich in der entgegengesetzten Richtung mit derselben Winkelgeschwindigkeit um dieses Ende dreht. Der Stab fällt Anfangs mit einem Durchmesser zusammen und ein glatter Ring, der frei längs des Stabes gleiten kann, wird in das Centrum des Kreises gebracht.  $r$  ist der Abstand des Ringes von  $C$  zur Zeit  $t$ ; man beweise, dass  $r = \frac{2a}{5} (e^{nt} + e^{-nt}) + \frac{a}{5} \cos 2nt$  ist.

32. Zwei gleiche gleichförmige Stäbe von der Länge  $2a$  sind durch ein Gelenk an dem einen Ende aneinander gehängt, während die andern Enden ein unausdehnbarer Faden von der Länge  $2l$  verbindet. Das System ruht auf zwei glatten Zapfen, die in derselben horizontalen Linie liegen und den Abstand  $2c$  voneinander haben. Der Faden wird durchgeschnitten; man beweise, dass die Anfangswinkelbeschleunigung eines jeden Stabes

$$g \frac{8a^2c - l^3}{\frac{8a^2l^2}{3} + \frac{32a^4c^2}{l^2} - 8a^2cl}$$

ist.

33. Eine glatte horizontale Scheibe rotirt mit der Winkelgeschwindigkeit  $\sqrt{\mu}$  um eine verticale Axe; auf den Durchschnittspunkt wird ein materieller Punkt gelegt, der nach einem gewissen Punkt der Scheibe von einer Kraft gezogen wird, deren Beschleunigung  $\mu \times$  der Abstand ist; man beweise, dass seine Bahn auf der Scheibe eine Cycloide beschreibt.

34. In einem hohlen Cylinder vom Radius  $a$ , der auf einem rauhen Tisch ruht, sitzt ein Insect auf der tiefsten Erzeugenden; wenn das Insect sich aufmacht und mit gleichförmiger relativer Geschwindigkeit  $V$  zum Cylinder in einer verticalen Ebene, welche die Axe des Cylinders rechtwinklig schneidet, fortwandert, so ist der Winkel  $\theta$ , den die Ebene, welche die Axe und das Insect enthält, mit der Verticalen macht, durch die Gleichung gegeben:

$$\alpha^2 \left( \frac{d\theta}{dt} \right)^2 \left( M + 2m \sin^2 \frac{1}{2} \theta \right) = MV^2 - 2mag \sin^2 \frac{1}{2} \theta ,$$

vorausgesetzt, dass die Cylinderwand sehr dünn ist.

Wenn der innere Radius  $b$  ist, so lässt sich beweisen, dass

$$\left( \frac{d\theta}{dt} \right)^2 [M(k^2 + \alpha^2) + m(\alpha^2 - 2ab \cos \theta + b^2)] = C - 2mgb(1 - \cos \theta)$$

ist, worin

$$Cb^2[M(k^2 + \alpha^2) + m(\alpha - b)^2] = V^2[M(k^2 + \alpha^2) + ma(\alpha - b)]^2$$

und  $M, m$  die Massen des Cylinders bez. des Insectes sind.

35. An einem kreisförmigen Reifen vom Radius  $b$  und ohne Masse ist ein schwerer Massenpunkt in einem Punkt befestigt, der den Abstand  $c$  vom Centrum hat; die innere Fläche des Reifens wird gezwungen, auf der äusseren Fläche eines festen Kreises vom Radius  $a$ , wobei  $b > a$  ist, unter der Wirkung einer abstossenden Kraft zu rollen, deren Sitz das Centrum des festen Kreises ist und die dem  $\mu$ -fachen Abstand gleichkommt. Man zeige, dass die Periode kleiner Schwingungen

des Reifens  $2\pi \frac{b+c}{a} \left( \frac{b-a}{c\mu} \right)^{\frac{1}{2}}$  ist. Man zeige, dass alle Schwingungen, kleine wie grosse, wenn  $c = b$  ist, dieselbe Periode haben; ferner, dass man im Allgemeinen den Reifen so in Bewegung setzen kann, dass er mit der gleichförmigen

Winkelgeschwindigkeit  $\left( \mu \frac{b-a}{b} \right)^{\frac{1}{2}}$  zu rollen fortfährt.

## Kapitel V.

# Die Bewegung starrer Körper im Raum von drei Dimensionen.

## Translation und Rotation.

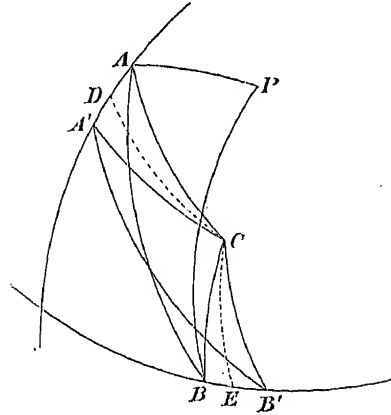
§ 214. Wenn die materiellen Punkte eines Körpers starr miteinander verbunden sind, dann müssen gewisse allgemeine Beziehungen zwischen den Bewegungen dieser Punkte existiren, die Beschaffenheit der von den Kräften erzeugten Bewegung mag sein, welche sie will. Diese Beziehungen müssen derart sein, dass aus der Bewegung dreier nicht in derselben Graden liegenden Punkte die eines jeden andern Punktes gefunden werden kann. An erster Stelle wird es daher unsre Aufgabe sein, den allgemeinen Charakter der Bewegung starrer Körper, abgesondert von den Kräften, welche sie hervorrufen, zu betrachten und die Bestimmung der Bewegung eines jeden materiellen Punktes auf so wenige unabhängige Grössen zu reduciren, als möglich ist, und an zweiter Stelle werden wir untersuchen, wie diese unabhängigen Grössen, wenn die Kräfte gegeben sind, ermittelt werden können.

§ 215. *Ein Punkt eines in Bewegung befindlichen starren Körpers liegt fest; man soll die allgemeinen Beziehungen zwischen den Bewegungen der übrigen Punkte des Körpers ableiten.*

O sei der festliegende Punkt; er werde zum Centrum einer beweglichen Kugel genommen, die in dem Körper befestigt sein möge. Der Radiusvector nach irgend einem Punkt  $Q$  des Körpers schneide die Kugel in  $P$ ; die Bewegung eines jeden Punktes  $Q$  des Körpers wird dann durch die von  $P$  dargestellt.

Wenn die Verschiebungen  $AA'$ ,  $BB'$  zweier Punkte  $A$ ,  $B$  an der Kugel in einer gewissen Zeit gegeben sind, so kann man die Verschiebung eines jeden andern Punktes  $P$  auf der Kugel offenbar construiren, indem man auf  $A'B'$  als Basis das Dreieck  $A'P'B'$  congruent construirt.  $PP'$  stellt alsdann die Verschiebung von  $P$  dar. Man kann dies als selbstverständlich ansehen oder auch, wie in den Elementen der Geometrie, beweisen, dass auf derselben Basis und auf der nämlichen Seite derselben keine zwei Dreiecke auf derselben Kugel existiren können, welche sowohl die Seiten gleich haben, die in dem einen Ende als die, welche in dem andern Ende der Basis zusammenlaufen.

$D$  und  $E$  seien die Mittelpunkte der Bogen  $AA'$ ,  $BB'$  und  $DC$ ,  $EC$  Bogen grösster Kreise, welche auf  $AA'$  bez.  $BB'$  senkrecht stehen.



Dann ist offenbar  $CA = CA'$  und  $CB = CB'$  und daher, weil die Grundlinien  $AB, A'B'$  gleich sind, die beiden Dreiecke  $ACB, A'CB'$  congruent. Die Verschiebung von  $C$  ist daher Null. Weil ferner die Verschiebung von  $O$  Null ist, so muss offenbar die Verschiebung eines jeden Punktes der Geraden  $OC$  Null sein.

Ein Körper kann daher von irgend einer Lage, die wir  $AB$  nennen können, in eine andre  $A'B'$  dadurch gebracht werden, dass man ihn um  $OC$  als Axe rotiren und dabei einen Winkel  $PCP'$  derart beschreiben lässt, dass jeder Punkt  $P$  zum Zusammenfallen mit seiner neuen Lage  $P'$  gebracht wird. Jeder Punkt des Körpers wird dann aus seiner ersten in seine Endlage gebracht.

Diesen Satz verdankt man Euler, *Mémoires de l'Académie de Berlin* 1750 und *Commentaires de St. Pétersbourg* 1775.

§ 216. Wird der Radius der Kugel unendlich gross, so werden aus den verschiedenen Kreisen der Figur Gerade. Daraus folgt, dass ein Körper, der sich in einer Ebene bewegt, aus einer Lage, die man  $AB$  nennen kann, in eine andere  $A'B'$  durch Rotation um einen gewissen Punkt  $C$  gebracht werden kann.

§ 217. Beisp. 1. Ein Körper wird auf rechtwinklige Axen  $x, y, z$  bezogen und die Axen werden unter Beibehaltung des Coordinatenanfangs nach dem nebenstehenden Schema mit den Axen  $x', y', z'$  vertauscht. Man zeige, dass dies dasselbe ist, als ob man den Körper um eine Axe drehte, deren Gleichungen irgend zwei der folgenden drei

	$x', y', z'$	
$x$	$a_1, a_2, a_3$	$(a_1 - 1)x + a_2 y + a_3 z = 0,$
$y$	$b_1, b_2, b_3$	$b_1 x + (b_2 - 1)y + b_3 z = 0,$
$z$	$c_1, c_2, c_3$	$c_1 x + c_2 y + (c_3 - 1)z = 0,$

und dabei einen Winkel  $\theta$  beschreiben liesse, der durch

$$3 - 4 \sin^2 \frac{1}{2} \theta = a_1 + b_2 + c_3$$

gegeben ist. Wenn die positive Richtung der  $x', y'$  willkürlich ist, zu zeigen, dass man der Bedingung der gleichzeitigen Gültigkeit der drei Gleichungen durch geeignete Wahl der positiven Richtung der  $z'$ -Axe genügen kann. Siehe auch eine Aufgabe in Smith's *Prize Examination*, 1868.

Man nehme auf der  $z$ - und  $z'$ -Axe je einen Punkt im Abstand  $h$  vom Coordinatenanfang an. Ihre Coordinaten sind  $(0, 0, h), (a_3 h, b_3 h, c_3 h)$ ; ihr Abstand ist daher



worin  $\gamma$  den Winkel  $\angle Oz'$  bedeutet. Ebenso erhält man  $2 \sin^2 \frac{1}{2} \theta \sin^2 \alpha = 1 - a_1$  und  $2 \sin^2 \frac{1}{2} \theta \sin^2 \beta = 1 - b_2$ , woraus die Gleichung für  $\theta$  sich sofort ergibt.

Beisp. 2. Man zeige, dass man den Gleichungen für die Axe auch die Form geben kann

$$\frac{x}{c_1 + a_3} = \frac{y}{c_2 + b_3} = \frac{z}{c_3 - a_1 - b_2 + 1}.$$

§ 218. Wenn sich ein Körper in Bewegung befindet, so sind nicht nur seine erste und letzte Lage, sondern auch die zwischenliegenden Lagen in Betracht zu ziehen. Wir wollen also annehmen,  $AB$ ,  $A'B'$  wären zwei Lagen am Anfang und Ende eines unbegrenzt kleinen Zeitintervalls  $dt$ . Wie man sieht, gibt es für einen Körper, der sich um einen festen Punkt  $O$  bewegt, in jedem Moment der Bewegung eine Gerade  $OC$ , deren sämtliche Punkte während einer unbegrenzt kurzen Zeit  $dt$  keine Verschiebung erleiden. Diese Gerade heisst die *Momentanaxe*.

Ist  $d\theta$  der Winkel, den der Körper um die Momentanaxe beschreiben muss, um einen Punkt  $P$  aus seiner Lage zur Zeit  $t$  in die zur Zeit  $t + dt$  zu bringen, so heisst das schliessliche Verhältniss von  $d\theta$  zu  $dt$  die Winkelgeschwindigkeit des Körpers um die Momentanaxe. Die Winkelgeschwindigkeit kann auch als der Winkel definirt werden, welchen der Körper in der Zeiteinheit beschreiben würde, wenn er fortführe mit derselben Geschwindigkeit, die er in dem gegebenen Moment hatte, sich um die nämliche Axe während der Zeiteinheit gleichförmig zu drehen.

§ 219. Wir wollen nun die Einschränkung, dass der Körper sich um einen festliegenden Punkt bewegen soll, fallen lassen. Man kann den folgenden Satz aufstellen:

*Jede Verrückung eines starren Körpers kann man als die Combination der beiden folgenden Bewegungen ansehen: (1) einer Translationsbewegung, wodurch jeder materielle Punkt sich parallel zur Bewegungsrichtung irgend eines angenommenen mit dem Körper starr verbundenen Punktes  $P$  dieselbe Strecke entlang bewegt, (2) einer Rotationsbewegung des ganzen Körpers um eine durch den angenommenen Punkt  $P$  gehende Axe.*

Dieses Theorem und das über die Centralaxe rühren von Chasles her. *Bulletin des Sciences Mathématiques* par Ferussac, vol. XIV. 1830. Siehe auch Poinso, *Théorie Nouvelle de la Rotation des Corps*. 1834.

Es leuchtet ein, dass die Aenderung der Lage dadurch bewirkt werden kann, dass man  $P$  durch eine Translationsbewegung von seiner alten in seine neue Lage  $P'$  bringt, alsdann  $P'$  als festen Punkt beibehält und zwei beliebige Punkte des Körpers, die mit  $P$  nicht in derselben Geraden liegen, in ihre Endlagen bewegt. Diese letzte Bewegung ist, wie wir bewiesen haben, mit einer Rotation um eine durch  $P'$  gehende Axe gleichwerthig.

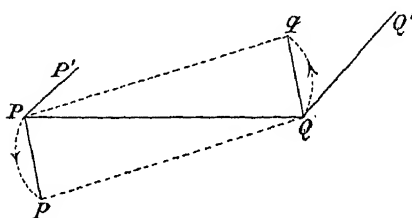
Da diese Bewegungen durchaus unabhängig voneinander sind, so kann man ihre Reihenfolge offenbar umkehren, d. h. man kann den Körper zuerst rotiren lassen und ihm dann die Translation geben; man kann auch annehmen, sie fänden gleichzeitig statt.

Wie man sieht, kann man jeden Punkt  $P$  des Körpers als Reductionspunkt für die doppelte Operation wählen. Die gegebene Verrückung kann daher auf unendlich viele Arten ausgeführt werden.

§ 220. *Vertauschung der Reductionspunkte. Die Beziehungen zwischen den Rotationsachsen und -Winkeln zu finden, wenn verschiedene Punkte  $P$ ,  $Q$  zu Reductionspunkten gewählt werden.*

Die Verrückung des Körpers möge durch eine Rotation (Drehung)  $\theta$  um die Axe  $PR$  und eine Translation (Verschiebung)  $PP'$  dargestellt werden. Dieselbe Verrückung möge auch die Rotation  $\theta'$  um die Axe  $QS$  und die Translation  $QQ'$  ergeben. Es ist klar, dass jeder Punkt zwei Verschiebungen hat, (1) eine Translation gleich und parallel mit  $PP'$  und (2) eine Rotation durch einen Bogen in einer auf der Rotationsaxe  $PR$  senkrechten Ebene. Die zweite Verschiebung ist nur dann Null, wenn der Punkt auf der Axe  $PR$  liegt. *Die einzigen Punkte, deren Verschiebungen dieselben sind wie die des Reductionspunktes, liegen daher auf der diesem Punkt entsprechenden Rotationsaxe.* Durch den zweiten Reductionspunkt  $Q$  ziehe man eine Parallele zu  $PR$ . Alsdann sind für alle in der Parallelen liegenden Punkte die in Folge der Translation  $PP'$  und der Rotation  $\theta$  um  $PR$  stattfindenden Verschiebungen dieselben, wie die entsprechenden für den Punkt  $Q$ . Diese Parallele muss daher die dem Reductionspunkt  $Q$  entsprechende Rotationsaxe sein. Es folgt daraus, dass die Rotationsachsen für alle Reductionspunkte parallel sind.

§ 221. Der Abstand der Rotationsachsen für  $P$  und  $Q$ , die also parallel sind, sei  $a$ . Schneidet die Ebene des Papiers diese Axen recht-



winklig in  $P$  und  $Q$ , so ist  $PQ = a$ .  $PP'$ ,  $QQ'$  mögen die linearen Verschiebungen von  $P$  bez.  $Q$  darstellen, die nicht nothwendiger Weise in der Ebene des Papiers zu liegen brauchen.

In Folge der Rotation  $\theta$  um  $PR$  beschreibt  $Q$  den zum Winkel  $\theta$  gehörigen Bogen des Kreises vom

Radius  $a$ ; die Sehne  $Qq$  dieses Bogens ist  $2a \sin \frac{1}{2} \theta$  und ist die durch die Rotation hervorgerufene Verschiebung. Die ganze Verschiebung  $QQ'$  von  $Q$  ist die Resultante von  $Qq$  und der Verschiebung  $PP'$  von

einen Bogen, dessen Sehne  $Pp$  gleich  $2a \sin \frac{1}{2} \theta'$  ist. Die ganze Verrückung  $PP'$  von  $P$  ist die Resultante von  $Pp$  und der Verschiebung  $QQ'$  von  $Q$ . Wenn aber die Verschiebung von  $Q$  der von  $P$  zusammen mit  $Qq$  und die von  $P$  der von  $Q$  zusammen mit  $Pp$  gleichkommt, so muss  $Pp$  gleich  $Qq$  sein und die entgegengesetzte Richtung haben. Dazu ist erforderlich, dass die beiden Rotationen  $\theta, \theta'$  um  $PR$  und  $QS$  gleich sind und dieselbe Richtung haben. Es folgt daraus, dass die allen Reductionspunkten entsprechenden Rotationswinkel gleich sind.

§ 222. Da die Translation  $QQ'$  die Resultante von  $PP'$  und  $Qq$  ist, so kann man mit Hülfe dieses Satzes nun sowohl die Translation als die Rotation, die irgend einem gegebenen Reductionspunkt  $Q$  entsprechen, finden, wenn die für  $P$  bekannt sind.

Da die in Folge der Rotation um  $PR$  stattfindende Verschiebung  $Qq$  senkrecht auf  $PR$  steht, so ist die Projection von  $QQ'$  auf die Rotationsaxe dieselbe wie die von  $PP'$ . Daher sind die Projectionen der Verschiebungen aller Punkte des Körpers auf die Rotationsaxe gleich.

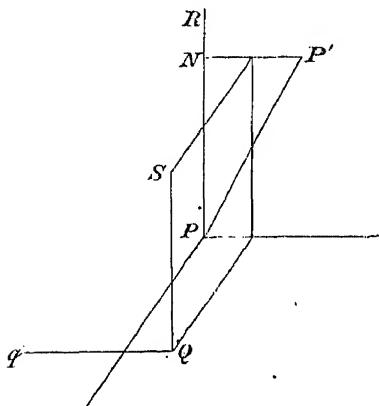
§ 223. Wichtig ist der Fall, in welchem die Verrückung eine einfache Rotation  $\theta$  um eine Axe  $PR$  ohne Translation ist. Wird irgend ein Punkt  $Q$  im Abstand  $a$  von  $PR$  als Reductionspunkt gewählt, so wird dieselbe Verrückung durch eine Translation von  $Q$  längs der Sehne  $Qq = 2a \sin \frac{1}{2} \theta$  in einer Richtung, die den Winkel  $\frac{1}{2}(\pi - \theta)$  mit der Ebene  $QPR$  macht, und eine Rotation dargestellt, die gleich  $\theta$  sein und um eine Axe stattfinden muss, welche  $PR$  parallel ist. Daher kann eine Rotation um irgend eine Axe durch eine gleiche Rotation um eine parallele Axe zusammen mit einer Translationsbewegung ersetzt werden.

§ 224. Wenn die Rotation unbegrenzt klein ist, lässt sich der Satz so aussprechen: Eine Rotationsbewegung  $\omega dt$  um eine Axe  $PR$  ist einer gleichen Rotationsbewegung um irgend eine parallele Axe  $QS$  im Abstand  $a$  von  $PR$  äquivalent zusammen mit einer Translationsbewegung  $a\omega dt$  senkrecht zu der die Axen enthaltenden Ebene und in der Richtung, in der  $QS$  sich bewegt.

§ 225. Die Centralaxe. Es ist oft wichtig, den Reductionspunkt so zu wählen, dass die Translationsrichtung mit der Rotationsaxe zusammenfällt. Wir wollen sehen, wie dies geschehen kann.

Die gegebene Verrückung des Körpers möge durch eine Rotation  $\theta$  um  $PR$  und eine Translation  $PP'$  dargestellt sein. Man ziehe  $P'N$  senkrecht zu  $PR$ . Wenn möglich, möge eine Rotation um eine Axe  $QS$  und eine Translation  $QQ'$  längs  $QS$  dieselbe Verrückung darstellen.

Nach §§ 220 und 221 muss  $QS$  parallel  $PR$  und die Rotation um  $QS$  gleich  $\theta$  sein. Die Translation bewegt  $P$  längs  $PR$  um eine Strecke



gleich  $QQ'$  und die Rotation um  $QS$  bewegt  $P$  längs eines Bogens, dessen Ebene senkrecht auf  $PR$  steht.  $QQ'$  muss daher gleich  $PN$  und  $NP'$  muss die Sehne des Bogens sein. Daraus folgt, dass  $QS$  in der Ebene liegen muss, die  $NP'$  halbiert und senkrecht zu  $NP'$  ist und in einem solchen Abstand  $a$  von  $PR$ , dass  $NP' = 2a \sin \frac{1}{2} \theta$  oder, was bequemer ist, in einem solchen Abstand  $y$  von der Ebene  $NPP'$ , dass  $NP' = 2y \operatorname{tg} \frac{1}{2} \theta$  ist.

Die Rotation  $\theta$  um  $QS$  hat  $\tilde{N}$  nach  $P'$  zu bringen und findet in derselben

Richtung statt, wie die Rotation  $\theta$  um  $PR$ . Der Abstand  $y$  muss daher vom Mittelpunkt von  $NP'$  aus in der Richtung genommen werden, in welcher dieser Mittelpunkt durch seine Rotation um  $PR$  bewegt wird.

Nachdem so die allein mögliche Lage von  $QS$  ermittelt ist, bleibt noch zu beweisen, dass die Verschiebung von  $Q$  in der That längs  $QS$  stattfindet. In Folge der Rotation  $\theta$  um  $PR$  beschreibt  $Q$  einen Bogen, dessen Sehne  $Qq$  parallel  $P'N$  und gleich  $2a \sin \frac{1}{2} \theta$  ist. Die Sehne  $Qq$  ist daher gleich  $NP'$  und die Translation  $NP'$  bringt  $q$  zurück in seine Lage  $Q$ . Daher wird  $Q$  nur durch die Translation  $PN$  bewegt, d. h.  $Q$  bewegt sich längs  $QS$ .

§ 226. Daraus folgt, dass jede Verrückung eines Körpers durch eine Rotation um eine gewisse Gerade und eine Translation parallel dieser Geraden dargestellt werden kann. Diese Art der Bewegung heisst *Schraubenbewegung* und die Gerade *Centralaxe* oder auch *Schraubenaxe*, das Verhältniss der Translation zu der Rotationsamplitude aber der *Pfeil* oder der *Windungsparameter* der Schraube.

§ 227. *Die selbe Verrückung eines Körpers kann nicht durch zwei verschiedene Schraubenbewegungen ersetzt werden.* Wir wollen annehmen es sei möglich und  $AB$ ,  $CD$  seien die beiden Centralaxen.  $AB$  und  $CD$  sind dann nach § 220 parallel. Die Verrückung eines Punktes  $Q$  auf  $CD$  findet man durch Drehung des Körpers um  $AB$  und durch eine Translation parallel zu  $AB$ :  $Q$  hat daher eine Verschiebung

sich die Ermittlung der Centralaxe. Die Verrückung möge durch eine Rotation  $\omega dt$  um eine Axe  $PR$  und eine Translation  $V dt$  in der Richtung  $PP'$  gegeben sein. Man trage von  $P$  aus senkrecht zur Ebene  $P'PR$  und nach der Seite der Ebene hin, nach welcher sich  $P'$  bewegt, die Strecke  $y = \frac{V \sin P'PR}{\omega}$  auf. Eine Parallele zu  $PR$  durch den Endpunkt von  $y$  ist die Centralaxe.

Beisp. 1. Die Verschiebungen  $AA', BB', CC'$  dreier Punkte eines Körpers sind nach Richtung und Grösse, aber nicht nothwendiger Weise der Lage nach gegeben; man finde die Richtung der Rotationsaxe, die irgend einem Reductionspunkt  $P$  entspricht.

Durch einen beliebig angenommenen Punkt  $O$  ziehe  $O\alpha, O\beta, O\gamma$  parallel und gleich  $AA', BB', CC'$ . Ist  $O\rho$  die Richtung der Rotationsaxe, so sind die Projectionen von  $O\alpha, O\beta, O\gamma$  auf  $O\rho$  sämmtlich gleich.  $O\rho$  ist daher das Loth von  $O$  auf die Ebene  $\alpha\beta\gamma$ . Auch daraus sieht man wieder, dass die Richtung der Rotationsaxe für alle Reductionspunkte die gleiche ist.

Beisp. 2. In dem vorigen Beispiel werde die Bewegung auf die Centralaxe bezogen; man zeige, dass die Translation längs derselben gleich  $O\rho$  ist.

Beisp. 3. Gegeben sind die Verschiebungen  $AA', BB'$  zweier Punkte  $A, B$  des Körpers und die Richtung der Centralaxe; man finde die Lage der Centralaxe. Man lege durch  $AA', BB'$  Ebenen parallel zur Centralaxe; halbire  $AA', BB'$  durch Ebenen bez. senkrecht zu diesen Ebenen und parallel zur Richtung der Centralaxe. Die beiden letzten Ebenen schneiden sich in der Centralaxe.

## Zusammensetzung von Rotationen und Schraubenbewegungen.

§ 229. Man hat oft nöthig Rotationen um Axen  $OA, OB$ , die sich im Punkt  $O$  treffen, zusammenzusetzen. Da dieser Fall in der Dynamik der Systeme starrer Körper aber nur dann vorkommt, wenn die Rotationen unbegrenzt klein sind, so wollen wir zuerst diesen Fall eingehender besprechen und später am Ende des Kapitels im Allgemeinen angeben, wie man zu verfahren hat, wenn die Rotationen von endlicher Grösse sind.

§ 230. Welchen Sinn hat es, wenn man sagt, ein Körper habe Winkelgeschwindigkeiten um mehr als eine Axe zur selben Zeit?

Von einem sich bewegenden Körper sagt man, er habe eine Winkelgeschwindigkeit  $\omega$  um eine Gerade, wenn der Körper sich um diese Gerade drehend einen Winkel  $\omega dt$  beschreibt und dabei jeder Punkt des Körpers von seiner Lage zur Zeit  $t$  in seine Lage zur Zeit  $t + dt$  gebracht wird.

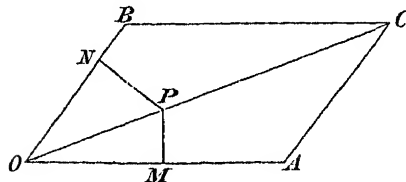
Man nehme an, der Körper drehe sich während dreier aufeinander folgender Intervalle, von denen jedes  $dt$  ist, nacheinander um drei verschiedene Gerade  $OA, OB, OC$ , die sich im Punkt  $O$  schneiden und beschreibe dabei die Winkel  $\omega_1 dt, \omega_2 dt, \omega_3 dt$ . Wir wollen zuerst beweisen, dass die Endlage dieselbe bleibt, in welcher Reihenfolge die Rotationen auch stattfinden.  $P$  sei ein beliebiger Punkt im Körper und seine Abstände von  $OA, OB, OC$  seien bez.  $r_1, r_2, r_3$ .

Durch die erste Drehung um  $OA$  erhält  $P$  die Verschiebung  $\omega_1 r_1 dt$ . In Folge dieser Bewegung möge  $r_2$  auf  $r_2 + dr_2$  anwachsen; die Verschiebung durch die Rotation um  $OB$  beträgt dann ihrer Grösse nach  $\omega_2(r_2 + dr_2) dt$ . Wie aus der Differenzialrechnung bekannt ist, kann man aber in der Grenze die Grössen zweiter Ordnung vernachlässigen; damit wird die Verschiebung  $\omega_2 r_2 dt$ . Ebenso ist die Verschiebung in Folge der letzten Rotation  $\omega_3 r_3 dt$ . Die drei Resultate sind aber dieselben, in welcher Reihenfolge man auch die Rotationen stattfinden lässt. Auf ähnliche Weise lässt sich zeigen, dass auch die Richtungen dieser Verschiebungen von der Reihenfolge nicht abhängen. Die Endverschiebung ist die Diagonale des Parallelepipedes, das sich über diesen drei Linien als Seiten beschreiben lässt und hängt daher von der Folge der Rotationen nicht ab. Weil also die drei Rotationen durchaus unabhängig von einander sind, so kann man sagen, sie fänden gleichzeitig statt.

Wenn man daher von einem Körper behauptet, er habe Winkelgeschwindigkeiten um drei verschiedene Axen, so meint man damit nur, dass die Bewegung sich auf folgende Art bestimmen lasse: Man theilt die ganze Zeit in eine Anzahl kleiner Intervalle, von denen jedes  $dt$  ist, während eines jeden der Intervalle dreht man den Körper nacheinander um die drei Axen und lässt ihn dabei die Winkel  $\omega_1 dt$ ,  $\omega_2 dt$ ,  $\omega_3 dt$  beschreiben. Wenn dann  $dt$  sich ohne Grenze vermindert, so wird die Bewegung während der ganzen Zeit damit genau wiedergegeben.

§ 231. Offenbar lässt sich eine Rotation um eine Axe  $OA$  ihrer Grösse nach durch eine auf der Axe abgetragene Länge darstellen. Auch ihre Richtung stellt diese Länge dar, wenn man so verfährt, wie in der Statik, d. h. wenn einer Person, die längs der Axe so steht, dass  $OA$  von  $O$  zu ihren Füßen aus nach ihrem Kopf hin gemessen wird, die Rotation in einer Normalrichtung zu erfolgen scheint. Diese Richtung von  $OA$  heisst die positive Richtung der Axe.

§ 232. Das Parallelogramm der Winkelgeschwindigkeiten. Wenn zwei Winkelgeschwindigkeiten um zwei Axen  $OA$ ,  $OB$  der Grösse und Richtung nach durch die zwei Längen  $OA$ ,  $OB$  dargestellt werden, so ist die Diagonale  $OC$  des mit  $OA$ ,  $OB$  als Seiten construirten Parallelogramms die resultirende Rotationsaxe und ihre Länge stellt die Grösse der resultirenden Winkelgeschwindigkeit dar.



$P$  sei irgend ein Punkt in  $OC$  und  $PM$ ,  $PN$  Lothe von  $P$  auf  $OA$ ,  $OB$ . Da  $OA$  die Winkelgeschwindigkeit um  $OA$  darstellt und  $PM$  die Länge der resultirenden Winkelgeschwindigkeit darstellt, so ist  $PM$  die resultirende Winkelgeschwindigkeit.

geschwindigkeit um  $OA$  dar. Ebenso stellt  $OB \cdot PN$  die Geschwindigkeit von  $P$  in Folge der Winkelgeschwindigkeit um  $OB$  dar. Da sich  $P$  auf der linken Seite von  $OA$  und auf der rechten von  $OB$  befindet, wenn man längs dieser Richtungen hinblickt, so haben diese Geschwindigkeiten offenbar entgegengesetzte Richtungen.

Die Geschwindigkeit des Punktes  $P$  wird daher dargestellt durch

$$OA \cdot PM - OB \cdot PN = OP(OA \cdot \sin COA - OB \cdot \sin COB) = 0.$$

Der Punkt  $P$  ist mithin in Ruhe und  $OC$  die resultierende Rotationsaxe.

Bedeutet  $\omega$  die Winkelgeschwindigkeit um  $OC$ , so ist die Geschwindigkeit irgend eines Punktes  $A$  in  $OA$  senkrecht zur Ebene  $AOB$  und wird durch das Product aus  $\omega$  und dem senkrechten Abstand des Punktes  $A$  von  $OC$ , also durch  $\omega \cdot OA \sin COA$ , dargestellt. Da die Bewegung aber auch durch die beiden gegebenen Winkelgeschwindigkeiten um  $OA$ ,  $OB$  bestimmt wird, so stellt auch das Product aus  $OB$  und dem senkrechten Abstand des Punktes  $A$  von  $OB$ , also  $OB \cdot OA \sin BOA$ , die Geschwindigkeit von  $A$  dar. Daraus folgt:

$$\omega = OB \frac{\sin BOA}{\sin COA} = OC.$$

Die Winkelgeschwindigkeit um  $OC$  wird daher ihrer Grösse nach durch  $OC$  dargestellt.

Aus diesem Satz kann man als Zusatz „das Parallelogramm der Winkelbeschleunigungen“ ableiten. Denn wenn  $OA$ ,  $OB$  die in irgend einem Augenblick hinzukommenden dem Körper gegebenen Winkelgeschwindigkeiten darstellen, so bestimmt  $OC$  die resultierende hinzukommende Winkelgeschwindigkeit der Richtung und der Grösse nach.

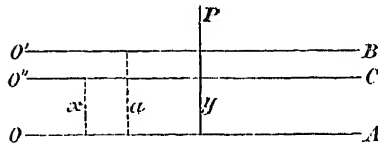
§ 233. Dieser Satz zeigt, dass Winkelgeschwindigkeiten und Winkelbeschleunigungen nach denselben Regeln und auf dieselbe Art, als ob sie Kräfte wären, zusammengesetzt und zerlegt werden können. So lässt sich die Winkelgeschwindigkeit  $\omega$  um eine gegebene Axe in zwei Componenten  $\omega \cos \alpha$  und  $\omega \sin \alpha$  um Axen zerlegen, die auf einander senkrecht stehen und mit der gegebenen Axe die Winkel  $\alpha$  und  $\frac{1}{2}\pi - \alpha$  bilden.

Hat ein Körper die Winkelgeschwindigkeiten  $\omega_1, \omega_2, \omega_3$  um drei zu einander senkrechte Axen  $Ox, Oy, Oz$ , so sind sie einer einzelnen Winkelgeschwindigkeit  $\omega$  äquivalent, wenn  $\omega = \sqrt{\omega_1^2 + \omega_2^2 + \omega_3^2}$  ist, um eine Axe, welche mit den gegebenen Axen Winkel macht, deren Cosinuse bez.  $\frac{\omega_1}{\omega}, \frac{\omega_2}{\omega}, \frac{\omega_3}{\omega}$  sind. Dies lässt sich wie in dem entsprechenden Satz der Statik beweisen, indem man die drei Winkelgeschwindigkeiten zu je zweien zusammensetzt.

Es wird nicht nöthig sein, die verschiedenen in der Statik für die Kräfte bewiesenen Sätze hier für Winkelgeschwindigkeiten zu wiederholen. Wir können das „Dreieck der Winkelgeschwindigkeiten“ und

die andern Regeln für die Zusammensetzung verschiedener Winkelgeschwindigkeiten ohne weiteren Beweis benutzen.

§ 234. Das Winkelgeschwindigkeitspaar. Ein Körper hat die Winkelgeschwindigkeiten  $\omega$ ,  $\omega'$  um zwei parallele Axen  $OA$ ,  $O'B$ , die den Abstand  $a$  voneinander haben; man finde die resultirende Bewegung.



Da parallele Gerade als die Grenzlage zweier Geraden, die sich in sehr grosser Entfernung schneiden, angesehen werden können, so folgt aus dem Parallelogramm der Winkel-

geschwindigkeiten, dass die beiden gegebenen Winkelgeschwindigkeiten einer einzelnen um irgend eine parallele Axe  $O''C$ , die in der  $OA$ ,  $O'B$  enthaltenden Ebene liegt, äquivalent sind.

$x$  sei der Abstand dieser Axe von  $OA$  und es werde angenommen, dass es auf derselben Seite von  $OA$  liege, wie  $O'B$ .  $\Omega$  sei die Winkelgeschwindigkeit um  $x$ .

Man nehme irgend einen Punkt  $P$  im Abstand  $y$  von  $OA$ , der in der Ebene der drei Axen liegt. Die Geschwindigkeit von  $P$ , die er der Rotation um  $OA$  verdankt, ist  $\omega y$ , die Geschwindigkeit in Folge der Rotation um  $O'B$  ist  $\omega'(y - a)$ . Die beiden zusammen müssen aber der Geschwindigkeit in Folge der resultirenden Winkelgeschwindigkeit um  $O''C$ , d. h.  $\Omega(y - x)$  äquivalent sein; daher ist

$$\omega y + \omega'(y - a) = \Omega(y - x).$$

Diese Gleichung gilt für alle Werthe von  $y$ ; man erhält also

$$\Omega = \omega + \omega', \quad x = \frac{a\omega'}{\Omega}.$$

Wir wären zu demselben Resultat gekommen, wenn wir die Resultante zweier Kräfte  $\omega$ ,  $\omega'$  gesucht hätten, die in den Richtungen  $OA$ ,  $O'B$  wirken.

Ist  $\omega = -\omega'$ , so verschwindet die resultirende Winkelgeschwindigkeit,  $x$  ist dagegen unendlich gross. Die Geschwindigkeit eines Punktes  $P$  ist in diesem Fall  $\omega y + \omega'(y - a) = a\omega$ , also unabhängig von der Lage von  $P$ .

Daraus folgt, dass zwei Winkelgeschwindigkeiten, von denen jede gleich  $\omega$  ist, die aber den Körper in entgegengesetzten Richtungen zu drehen suchen und die um zwei parallele, um  $a$  voneinander abstehende Axen stattfinden, einer durch  $a\omega$  dargestellten Translationsgeschwindigkeit gleichkommen. Dies entspricht dem Satz der Statik, dass „ein Paar“ durch sein Moment gemessen wird.

Als Zusatz lässt sich daraus ableiten, dass die Rotationsbewegung  $\omega$  um eine Axe  $OA$  der gleichen Rotationsbewegung um eine parallele Axe  $O'B$  äquivalent ist zusammen mit einer Translation  $a\omega$ , die senkrecht zu der  $OA$ ,  $O'B$  enthaltenden Ebene in der Richtung stattfindet, in welcher sich  $O'B$  bewegt. Siehe auch § 223.



§ 235. Die Analogie mit der Statik. Alle Sätze der Statik, die sich auf die Zusammensetzung und Zerlegung der Kräfte und Paare beziehen, beruhen auf den Theoremen:

1. Dem Parallelogramm der Kräfte und dem Parallelogramm der Paare.

2. Die Kraft  $F$  ist einer gleichen und parallelen Kraft zusammen mit einem Paar  $Fp$  äquivalent, wenn  $p$  der Abstand der Kräfte ist.

Dem entsprechend hat man in der Dynamik die folgenden Theoreme über die augenblickliche Bewegung der starren Körper:

1. Das Parallelogramm der Winkelgeschwindigkeiten und das Parallelogramm der Translationsgeschwindigkeiten.

2. Die Winkelgeschwindigkeit  $\omega$  ist einer gleichen Winkelgeschwindigkeit um eine parallele Axe zusammen mit einer Translationsgeschwindigkeit  $\omega p$  äquivalent, wenn  $p$  der Abstand der parallelen Axen ist.

Daraus folgt, dass jedem Satz der Statik, der sich auf die Kräfte bezieht, ein Satz der Dynamik entspricht, der sich auf die Bewegung der starren Körper bezieht und dass sich beide auf dieselbe Art beweisen lassen.

Um die Analogie zu vervollständigen, wollen wir hinzufügen, 1) dass eine Winkelgeschwindigkeit wie eine Kraft der Statik zu ihrer vollständigen Bestimmung fünf Constante nöthig hat und 2) dass eine Translationsgeschwindigkeit wie ein Paar der Statik nur drei braucht. Vier Constante sind erforderlich, um die Wirkungslinie der Kraft oder die Rotationsaxe und eine um die Grösse einer jeden zu bestimmen. Ferner ist in beiden Fällen eine Uebereinkunft über die positive Richtung der Linie nöthig. Zwei Constante und eine Uebereinkunft braucht man zur Bestimmung der positiven Richtung der Axe des Paares oder der Translationsgeschwindigkeit und eine für die Grösse des Paares bez. der Geschwindigkeit.

Die Entdeckung dieser Analogie verdankt man Poinso.

§ 236. Um zu zeigen, wie nützlich diese Analogie ist und wie leicht man die bekannten Sätze der Statik in die entsprechenden der Dynamik umformen kann, wollen wir die bekannteren Sätze, die sowohl in der Statik als der Dynamik fortwährend gebraucht werden, nebeneinander stellen.

In der Statik wird bewiesen, dass ein gegebenes System von Kräften und Paaren sich auf drei Kräfte  $X, Y, Z$ , welche längs rechtwinkliger Axen wirken, die man sich nach Gefallen auswählen kann und die sich in einem beliebigen Reductionspunkt  $O$  treffen, zusammen mit drei Paaren reduciren lassen, die man  $L, M, N$  nennen kann und die um diese Axen wirken. Eine einfachere Darstellung ergibt sich dann, denn es wird bewiesen, dass sich diese Kräfte und Paare auf eine einzelne Kraft, die man  $R$  nennen kann,

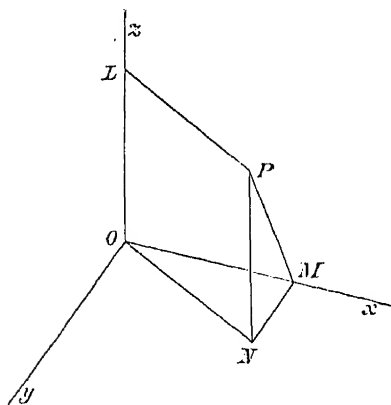
und ein Paar  $G$  reduciren lassen, welches um die Wirkungslinie von  $R$  wirkt. Diese Wirkungslinie von  $R$  heisst die Centralaxe. Es gibt nur eine einem gegebenen Kräftesystem entsprechende Axe. Eine solche Darstellung eines gegebenen Kräftesystems hat man *Dyname* genannt. Zieht man eine Gerade  $AB$  parallel zur Centralaxe und im Abstand  $c$  von ihr, so kann man  $R$ , statt längs der Centralaxe, an  $A$  längs  $AB$  angreifen lassen, wenn man nur ein neues Paar einführt, dessen Moment  $Rc$  ist. Combinirt man es mit dem Paar  $G$ , so erhält man für den neuen Reductionspunkt  $A$  ein neues Paar  $G' = \sqrt{G^2 + R^2 c^2}$ , während die Kraft dieselbe bleibt wie vorher. Das Paar  $G'$  ist ein Minimum, wenn  $c = 0$  ist, d. h. wenn  $AB$  mit der Centralaxe zusammenfällt. Nimmt man die Momente um  $AB$ , so sieht man, dass das Moment der Kräfte um jede zur Centralaxe parallele Gerade dasselbe und dem Minimalpaar gleich ist.

Auf dieselbe Art, auf welche diese Resultate erhalten wurden, kommt man zu den folgenden Sätzen. Die augenblickliche Bewegung lässt sich auf die Translationsgeschwindigkeit eines beliebig wählbaren Reductionspunktes und eine Winkelgeschwindigkeit um eine Axe durch diesen Punkt zurückführen. Diese werden dann auf eine Winkelgeschwindigkeit, die man  $\Omega$  nennen kann, um eine Axe, Centralaxe genannt, und eine Translationsgeschwindigkeit längs dieser Axe, die man  $V$  nennen kann, reducirt. Dieser Darstellung der Bewegung hat man den Namen *Schraubenbewegung* gegeben. Zieht man eine Gerade  $AB$  parallel zur Centralaxe, so kann man  $\Omega$  statt um die Centralaxe um  $AB$  wirken lassen, wenn man nur eine neue Translationsgeschwindigkeit einführt, welche durch  $\Omega c$  dargestellt wird. Combinirt man sie mit  $V$ , so erhält man für den neuen Reductionspunkt  $A$ , welcher jeder Punkt auf  $AB$  sein kann, eine neue Translationsgeschwindigkeit  $V' = \sqrt{V^2 + c^2 \Omega^2}$ , während die Winkelgeschwindigkeit dieselbe bleibt, wie vorher. Die Translationsgeschwindigkeit  $V'$  wird zum Minimum für  $c = 0$ , d. h., wenn  $AB$  mit der Centralaxe zusammenfällt. Man sieht, dass die Componente der Translationsgeschwindigkeit irgend eines Punktes  $A$  in der Richtung von  $AB$ , d. h. parallel der Centralaxe immer dieselbe bleibt und der Minimaltranslationsgeschwindigkeit gleich ist.

Die meisten von diesen Sätzen gelten auch für *endliche Rotationen*, wie schon in den §§ 219 bis 228 nachgewiesen wurde.

§ 237. Eine andre Darstellung, die von Nutzen ist, erhält man aus dem folgenden Satz. Ein Kräftesystem kann durch eine Kraft  $F$ , die längs einer beliebig wählbaren Geraden wirkt und eine andre Kraft  $F'$  ersetzt werden, die längs einer andern Geraden wirkt und die erste Kraft im Allgemeinen nicht schneidet. Sie heissen *conjugirte Kräfte*. Der kürzeste Abstand zwischen ihnen schneidet, wie die Statik zeigt,

die  $z$ -Coordinate und  $PM$  ein Loth auf  $Ox$ . Die Rotation um  $Ox$  theilt  $P$  offenbar die Geschwindigkeit  $\omega_x PM$ . Ihre Componente längs  $NP$  ist  $\omega_x PM \sin NPM = \omega_x y$ .



Ebenso ist die Componente in Folge der Rotation um  $Oy$  gleich  $-\omega_y x$  und die in Folge der Rotation um  $Oz$  Null. Addirt man die Translationsgeschwindigkeit  $w$  des Coordinatenanfangs, so erhält man für die ganze Geschwindigkeit von  $P$  parallel zu  $Oz$

$$w' = w + \omega_x y - \omega_y x$$

und ähnlich die Geschwindigkeiten parallel den andern Axen

$$u' = u + \omega_y z - \omega_z y,$$

$$v' = v + \omega_z x - \omega_x z.$$

§ 239. Es ist manchmal nöthig, die Darstellung einer gegebenen Bewegung von einem Reductionspunkt auf einen andern zu übertragen. Die obigen Formeln setzen uns dazu in den Stand. Nehmen wir z. B. an, unser neuer Reductionspunkt liege im Punkt  $O'$  und die Axen für  $O'$  seien denen für  $O$  parallel.  $(\xi, \eta, \zeta)$  seien die Coordinaten von  $O'$  und  $u', v', w', \omega'_x, \omega'_y, \omega'_z$  die Translations- und Winkelcomponenten der Bewegung für den Reductionspunkt  $O'$ . Wir haben nun zwei Darstellungen derselben Bewegung, sie müssen für die Translationsgeschwindigkeiten des Punktes  $P$  dasselbe Resultat geben. Daher gilt

$$u + \omega_y z - \omega_z y = u' + \omega'_y (z - \zeta) - \omega'_z (y - \eta),$$

$$v + \omega_z x - \omega_x z = v' + \omega'_z (x - \xi) - \omega'_x (z - \zeta),$$

$$w + \omega_x y - \omega_y x = w' + \omega'_x (y - \eta) - \omega'_y (x - \xi)$$

für alle Werthe von  $x, y, z$ .

Diese Gleichungen liefern  $\omega'_x = \omega_x, \omega'_y = \omega_y, \omega'_z = \omega_z$ , so dass also für jeden Reductionspunkt, den man wählen möge, die Winkelgeschwindigkeit nach Richtung und Grösse dieselbe bleibt. Siehe § 221. Man sieht auch, dass die Ausdrücke für  $u', v', w'$  denen in § 238 analog sind, wie zu erwarten war.

Man vergleiche damit die entsprechenden Formeln der Statik. Sind alle Kräfte eines Systems drei Kräften  $X, Y, Z$ , die an einem Reductionspunkt längs dreier rechtwinkliger Axen wirken, zusammen mit drei Paaren um diese Axen äquivalent, so sind, wie wir wissen, die entsprechenden Kräfte und Paare für einen andern Reductionspunkt  $\xi, \eta, \zeta$ :

$$X' = X, \quad L' = L + Y\xi - Z\eta,$$

$$Y' = Y, \quad M' = M + Z\xi - X\zeta,$$

$$Z' = Z, \quad N' = N + X\eta - Y\xi.$$

§ 240. Die äquivalente Schraubenbewegung zu finden. Wenn die Bewegung durch die Translationsgeschwindigkeiten  $(u, v, w)$  eines Reductionspunktes  $O$  und die Winkelgeschwindigkeiten  $(\omega_x, \omega_y, \omega_z)$  gegeben ist, die Centralaxe, die Translationsgeschwindigkeit längs derselben und die Winkelgeschwindigkeit um sie, d. h. die äquivalente Schraubenbewegung zu finden.

Wählt man irgend einen Punkt  $P$  auf der Centralaxe zum Reductionspunkt, so sind die Componenten der Winkelgeschwindigkeit dieselben wie für den Reductionspunkt  $O$ . Ist  $\Omega$  die Resultante der Winkelgeschwindigkeiten  $\omega_x, \omega_y, \omega_z$  (§ 233), so sind

1) Die Richtungscosinusse der Centralaxe

$$\cos \alpha = \frac{\omega_x}{\Omega}, \quad \cos \beta = \frac{\omega_y}{\Omega}, \quad \cos \gamma = \frac{\omega_z}{\Omega}.$$

2) Die Winkelgeschwindigkeit um die Centralaxe  $= \Omega$ .

3) Die Componente der Geschwindigkeit eines jeden Punktes in einer zur Centralaxe parallelen Richtung ist dieselbe und derjenigen längs der Centralaxe gleich. Siehe § 222 oder § 236. Ist daher  $V$  die Translationsgeschwindigkeit längs der Centralaxe, so hat man

$$V = u \cos \alpha + v \cos \beta + w \cos \gamma,$$

also

$$V\Omega = u\omega_x + v\omega_y + w\omega_z.$$

4)  $(x, y, z)$  seien die Coordinaten von  $P$ , d. h. eines Punktes der Centralaxe. Die Translationsgeschwindigkeit von  $P$  findet dann längs der Centralaxe statt; daher ist

$$\frac{u + \omega_y z - \omega_z y}{\omega_x} = \frac{v + \omega_z x - \omega_x z}{\omega_y} = \frac{w + \omega_x y - \omega_y x}{\omega_z}.$$

Dies sind mithin die Gleichungen der Centralaxe.

Multipliziert man den Zähler und Nenner eines jeden dieser Brüche bez. mit  $\omega_x, \omega_y, \omega_z$  und addirt sie, so ergibt sich jeder Bruch

$$= \frac{u\omega_x + v\omega_y + w\omega_z}{\omega_x^2 + \omega_y^2 + \omega_z^2} = \frac{V}{\Omega}.$$

Dieses Verhältniss heisst der *Pfeil der Schraube*.

§ 241. Die Invarianten. Aus (3) folgt, dass für jeden Reductionspunkt, den man wählen mag und für jede Richtung der Axen die Grösse  $I = u\omega_x + v\omega_y + w\omega_z$  invariabel und gleich  $V\Omega$  ist. Diese Grösse kann man daher die *Invariante der Componenten* nennen. Die resultirende Winkelgeschwindigkeit ist ebenfalls invariabel und mag die *Invariante der Rotation* heissen.

Ist die Bewegung derart, dass die erste der Invarianten Null wird, so muss entweder  $V=0$  oder  $\Omega=0$  sein. Es ist dies daher die *Bedingung, unter welcher die Bewegung entweder eine einfache Translation oder eine einfache Rotation ist*. Soll die Bewegung einer einfachen Rotation äquivalent sein, so dürfen ausserdem  $\omega_x, \omega_y, \omega_z$  nicht sämmtlich Null sein.

Die entsprechende Invariante in der Statik ist  $LX + MY + NZ = GR$ . Verschwindet sie, so sind die Kräfte entweder einer einzelnen resultirenden Kraft oder einem einzelnen Paar äquivalent.

Beisp. 1. Man suche die Invarianten  $I$  und  $\Omega$  von (1) zwei Winkelgeschwindigkeiten  $\omega, \omega'$ , (2) zwei Translationsgeschwindigkeiten  $v, v'$ , (3) einer Winkelgeschwindigkeit  $\omega$  und einer Translationsgeschwindigkeit  $v$ . Die Resultate sind

$$\begin{aligned} (1) \quad I &= \omega \omega' r \sin \theta, & (2) \quad I &= 0, & (3) \quad I &= \omega v \cos \theta, \\ \Omega &= \omega^2 + \omega'^2 + 2\omega\omega' \cos \theta, & \Omega &= 0, & \Omega &= \omega, \end{aligned}$$

wobei  $\theta$  der Winkel zwischen den Axen der Geschwindigkeiten und  $r$  der kürzeste Abstand ist. Um den Beweis zu führen, wähle man passende Axen und drücke die Werthe der sechs Componenten  $u, v, w, \omega_x, \omega_y, \omega_z$  für den Coordinatenanfang als Reducionspunkt nach den §§ 238, 239 aus. Der Werth von  $I$  folgt aus seiner Definition. Man nehme hier  $r$  zur  $x$ -Axe und die Axe von  $\omega$  zu derjenigen der  $z$ . Das Resultat (2) ergibt sich durch Zusammensetzung der Geschwindigkeiten.

Beisp. 2. Die Invariante  $I$  einer beliebigen Anzahl von Winkelgeschwindigkeiten  $\omega_1, \omega_2, \text{etc.}$  und von Translationsgeschwindigkeiten  $v_1, v_2, \text{etc.}$  ist die Summe der einzelnen Invarianten der zu je zwei zusammengenommenen Geschwindigkeiten oder in algebraischer Form

$$I = \Sigma \omega v \cos \varphi + \Sigma \omega \omega' r \sin \theta,$$

worin  $\varphi$  den Winkel zwischen der Richtung von  $v$  und der Axe von  $\omega$ ,  $\theta$  den Winkel zwischen den Axen von  $\omega, \omega'$  und  $r$  den kürzesten Abstand bedeutet.

Bei dem Beweis beachte man, dass jede der sechs Bewegungscomponenten eine lineare Function von  $\omega_1, \omega_2, \text{etc.}; v_1, v_2, \text{etc.}$  ist. Die Invariante  $I$  ist daher eine quadratische Function von der Form

$$I = A_{11} \omega_1^2 + A_{12} \omega_1 \omega_2 + \text{etc.} + B_{11} \omega_1 v_1 + B_{12} \omega_1 v_2 + \text{etc.} + C_{11} v_1^2 + C_{12} v_1 v_2 + \text{etc.},$$

worin die Coefficienten von der Grösse von  $\omega_1, \omega_2, \text{etc.}, v_1, v_2, \text{etc.}$  nicht abhängig sind. Setzt man alle Geschwindigkeiten jedesmal mit Ausnahme einer einzigen gleich Null, so ergibt sich  $A_{11} = 0, A_{22} = 0, \text{etc.}, C_{11} = 0, \text{etc.}$  Setzt man dann alle Geschwindigkeiten jedesmal mit Ausnahme von zweien gleich Null und vergleicht die Resultate mit den in Beisp. 1 gegebenen, so findet man, dass die übrigen Coefficienten die oben angegebenen Werthe haben.

Beisp. 3. Die Invariante  $I$  zweier Schraubenbewegungen  $(\omega, v), (\omega', v')$  ist

$$I = \omega v + \omega' v' + (\omega v' + \omega' v) \cos \theta + \omega \omega' r \sin \theta.$$

Um es zu beweisen, addire man die sechs Invarianten der vier Grössen  $\omega, v, \omega', v'$ , je zwei zusammengenommen.

§ 242. *Es kann die Aufgabe gestellt werden, die Rotationsaxe zu finden, wenn die Bewegung einer einfachen Rotation äquivalent ist.* Sie ist aber offenbar die Centralaxe unter anderem Namen und schon oben gefunden worden.

§ 243. *Eine Schraubenbewegung kann so auf zwei verschiedene Arten gegeben sein.* Es können die sechs Componenten der Bewegung, die wir  $(u, v, w, \omega_x, \omega_y, \omega_z)$  genannt haben und die auch von dem

Centralaxe, die Geschwindigkeit  $V$  längs ihr und die Winkelgeschwindigkeit  $\Omega$  um sie gegeben sein.

In dem letzteren Fall ist ein Uebereinkommen nöthig, um Verwechselungen in Bezug auf die Richtung der Geschwindigkeiten  $V$  und  $\Omega$  zu vermeiden. Die eine Richtung der Axe heisst die positive, die entgegengesetzte die negative Richtung.  $V$  ist dann positiv, wenn es eine Geschwindigkeit in der positiven Richtung mittheilt und ebenso  $\Omega$  positiv, wenn einer Person, die mit ihrem Rücken so auf der Axe liegt, dass die positive Richtung von ihren Füßen nach dem Kopf geht, die Rotation in der Richtung der Zeiger einer Uhr erscheint. Dies ist selbstverständlich nur die gewöhnliche Definition eines positiven Paares, wie sie in der Statik gegeben wird. Siehe § 231.

Die Methode, die positive Richtung der Axe zu bestimmen, ist leicht verständlich, wenn auch etwas umständlich zu erklären. Um den Coordinatenanfang als Centrum beschreibe man mit dem Radius gleich der Einheit eine Kugel und lasse sie von den *positiven* Richtungen der Axen in  $x, y, z$  getroffen werden. Eine zur Centralaxe Parallele, die durch den Coordinatenanfang geht, schneide die Kugel in  $L$  und  $L'$ . Die Richtungscosinusse der Axe seien gegeben, sagen wir,  $l, m, n$ . Dann sind  $(l, m, n)$  die Cosinusse gewisser auf der Kugel gezogener Bogen, die bei  $x, y, z$  beginnen und z. B. bei  $L$  endigen, während  $(-l, -m, -n)$  die Cosinusse der Supplementbogen sind, die an denselben Punkten  $x, y, z$  beginnen und bei  $L'$  endigen.  $OL$  ist dann die positive und  $OL'$  die negative Richtung der Axe.

§ 244. *Die Lage der Centralaxe, die Translationsgeschwindigkeit längs derselben und die Winkelgeschwindigkeit um sie sind gegeben; man soll die Componenten der Bewegung finden, wenn der Coordinatenanfang zum Reductionspunkt genommen wird.*

Dies ist offenbar die umgekehrte Aufgabe, wie die eben besprochene. Die Gleichung der Centralaxe sei

$$\frac{x-f}{l} = \frac{y-g}{m} = \frac{z-h}{n},$$

worin  $(lmn)$  die Richtungscosinusse der Axe sind.  $V$  sei die Translations-,  $\Omega$  die Winkelgeschwindigkeit.

Würde  $(fgh)$  zum Reductionspunkt genommen, so wären die Componenten der Translationsgeschwindigkeit  $lV, mV, nV$  und die Componenten der Winkelgeschwindigkeit  $l\Omega, m\Omega, n\Omega$ . Daher sind nach § 238, wenn man  $-f, -g, -h$  statt  $x, y, z$  setzt, die Componenten der Bewegung für den Coordinatenanfang als Reductionspunkt

$$u = lV - \Omega(mh - ng), \quad \omega_x = l\Omega,$$

$$v = mV - \Omega(nf - lh), \quad \omega_y = m\Omega,$$

$$w = nV - \Omega(lg - mf), \quad \omega_z = n\Omega.$$

§ 245. **Zusammensetzung und Zerlegung von Schraubenbewegungen.**  
*Gegeben sind zwei Schraubenbewegungen; man soll sie in eine einzelne Schraubenbewegung zusammensetzen und umgekehrt, wenn eine Schraubenbewegung gegeben ist, sie in zwei zerlegen.*

In dem ersten Fall wähle man einen passenden Reductionspunkt und geeignete Axen. Nach § 244 findet man die sechs Bewegungscomponenten jeder Schraubenbewegung für diesen Reductionspunkt. Addirt man sie zu je zweien, so ergeben sich die sechs Componenten der resultirenden Schraubenbewegung und schliesslich aus § 240 die Centralaxe, die Translations- und Winkelgeschwindigkeit der Schraubenbewegung.

Umgekehrt lässt sich eine gegebene Schraubenbewegung auf unendlich viele Arten in zwei Schraubenbewegungen zerlegen. Da eine Schraubenbewegung durch sechs Componenten für irgend einen Reductionspunkt dargestellt wird, so haben wir bei den beiden Schrauben zwölf Grössen zur Verfügung, von denen sechs erforderlich sind, um die beiden Schraubenbewegungen der gegebenen äquivalent zu machen. Es steht daher in unserm Belieben, wie wir die sechs übrigen Grössen wählen wollen.

So kann man als eine Schraubenaxe eine beliebige gegebene Linie wählen mit irgend einer Translationsgeschwindigkeit längs derselben und einer willkürlichen Winkelgeschwindigkeit um sie. Die andre Schraubenbewegung findet man dann durch Umdrehung dieser angenommenen und die Verbindung der so geänderten mit der gegebenen Bewegung. Dieser zusammengesetzten Bewegung ist die zweite Schraubenbewegung alsdann äquivalent.

Oder man kann die Bewegung durch zwei Schraubenbewegungen darstellen, deren Pfeile Null sind, wobei dann noch die Axe der einen willkürlich wählbar bleibt. Dies sind die conjugirten Axen, von denen in § 237 die Rede war.

*Die folgende Art, zwei Schraubenbewegungen zusammenzusetzen, empfiehlt sich, wenn der kürzeste Abstand zwischen ihren Axen der Lage und Grösse nach bekannt ist.*

$(\omega, v)$ ,  $(\omega', v')$  mögen die Winkel- und Translationsgeschwindigkeiten der beiden gegebenen,  $(\Omega, V)$  der resultirenden Schraubenbewegung sein. Durch Gleichsetzung der Invarianten (§ 241) ergibt sich

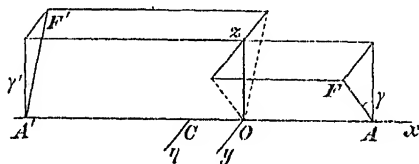
$$\Omega V = \omega v + \omega' v' + (\omega v' + \omega' v) \cos \theta + \omega \omega' r \sin \theta$$

$$\Omega^2 = \omega^2 + \omega'^2 + 2\omega\omega' \cos \theta,$$

worin  $\theta$  die Neigung der Axen und  $r$  ihr kürzester Abstand ist. Aus diesen Gleichungen folgt  $\Omega$  und  $V$ .

Wir wollen zunächst zeigen, dass die Axe der resultirenden Schraubenbewegung den kürzesten Abstand  $AA'$  der Axen der gegebenen Schrauben rechtwinklig schneidet. Da die Centralaxe der auf irgend einen Reductionspunkt übertragenen Resultanten von  $\omega$ ,  $\omega'$  parallel ist, so muss diese Axe auf  $AA'$  senkrecht stehen. Da ferner  $AA'$  die Axen der beiden gegebenen Schrauben rechtwinklig

schneidet, so ist die Componente der Geschwindigkeit eines jeden Punktes von  $AA'$  längs  $AA'$  Null und weil  $AA'$  senkrecht auf der Centralaxe der resultirenden Schraube steht, so muss es auch diese Axe schneiden.



Schliesslich wollen wir zeigen, dass der Abstand  $\xi$  der Centralaxe der beiden Schraubenbewegungen von dem Mittelpunkt  $C$  des kürzesten Abstandes durch

$$\Omega^2 \xi = \frac{1}{2} r (\omega^2 - \omega'^2) + (\omega'v - \omega v) \sin \theta$$

gegeben ist, wobei die positive Richtung von  $\xi$  nach der Axe von  $\omega$  hingeht.

$C\eta$  sei ein Loth auf die  $AA'$  und die gesuchte Centralaxe  $Oz$  enthaltende Ebene. Setzt man die Componente der Geschwindigkeit von  $C$  längs  $C\eta$  in Folge der beiden Schraubenbewegungen derjenigen, welche die Folge der resultirenden Schraubenbewegung ist, gleich, so erhält man

$$-\Omega \xi = v \sin \gamma - v' \sin \gamma' - \frac{1}{2} r \omega \cos \gamma + \frac{1}{2} r \omega' \cos \gamma',$$

worin  $\gamma, \gamma'$  die Winkel sind, welche die Axen  $AF, A'F'$  der gegebenen Schrauben mit der Centralaxe  $Oz$  machen. Durch Zerlegung ergibt sich

$$\Omega \sin \gamma = \omega' \sin \theta,$$

$$\Omega \cos \gamma = \omega + \omega' \cos \theta,$$

$$\Omega \sin \gamma' = \omega \sin \theta,$$

$$\Omega \cos \gamma' = \omega' + \omega \cos \theta$$

und endlich durch Substitution der Werthe von  $\gamma, \gamma'$  das obige Resultat.

§ 246. Beispiele. Beisp. 1. Der Ort der Punkte eines sich um einen festen Punkt bewegenden Körpers, welche in irgend einem Moment dieselbe resultirende Geschwindigkeit haben, ist ein Kreiscylinder.

Beisp. 2. Von einem festen Punkt  $O$  werden Radienvectoren gezogen, die der Richtung und Grösse nach die Geschwindigkeiten aller Punkte eines in Bewegung befindlichen starren Körpers darstellen; man beweise, dass die Endpunkte dieser Radienvectoren in irgend einem Augenblick in einer Ebene liegen.

[Coll. Exam.]

Diese Ebene steht offenbar senkrecht auf der Centralaxe und ihr Abstand von  $O$  misst die Geschwindigkeit längs dieser Axe. § 228, Beisp. 1.

Beisp. 3. Der Ort der Tangenten an die Bahnen der verschiedenen Punkte derselben Geraden bei der Momentanbewegung eines Körpers ist ein hyperbolisches Paraboloid.

$AB$  sei die gegebene Gerade,  $CD$  die zu ihr conjugirte. Die Punkte von  $AB$  drehen sich um  $CD$  und daher gehen die Tangenten sämmtlich durch zwei Gerade, nämlich durch  $AB$  und seine folgende Lage  $A'B'$  und sind auch sämmtlich einer Ebene parallel, die senkrecht auf  $CD$  steht.

Beisp. 4. Ein Körper unterliege einem Zwang, der zwei Bewegungen  $A$  und  $B$  zulässt, von denen jede durch eine Schraubenbewegung dargestellt werden kann und  $m, m'$  seien die Pfeile der Schrauben. Der Körper muss dann eine Schraubenbewegung zulassen, die aus unbegrenzt kleinen Rotationen  $\omega dt, \omega' dt$  um die Axen dieser Schrauben zusammengesetzt ist, die selbstverständlich von den Translationen  $m\omega dt, m'\omega' dt$  begleitet sind. Man beweise, (1) dass der Ort der Axen aller dieser Schrauben die Fläche  $z(x^2 + y^2) = 2axy$  ist. (2) Wenn dem Körper eine Schraubenbewegung längs einer Erzeugenden dieser Fläche mitgetheilt wird, so ist ihr Pfeil  $C + a \cos 2\theta$ , worin  $c$  eine Constante ist, die für alle Erzeugenden dieselbe bleibt und  $\theta$  den Winkel zwischen der Erzeugenden und der  $x$ -Axe bedeutet. (3) Die Grösse und Lage der Fläche werde so gewählt, dass die beiden gegebenen Schrauben  $A$  und  $B$  mit ihrem



richtigen Pfeil auf der Fläche liegen; man zeige, dass nur eine Fläche gezogen werden kann, die zwei gegebene Schrauben enthält. (4) Nimmt man irgend drei Schrauben der Fläche und verrückt einen Körper derart, dass man ihn längs jeder einen kleinen Winkel beschreiben lässt, der dem Sinus des Winkels zwischen den beiden andern proportional ist, so nimmt der Körper nach der letzten Verrückung wieder dieselbe Lage ein, die er vor der ersten hatte.

Diese Fläche hat Sir R. Ball, dem man die obigen vier Sätze verdankt, *Cylindroid* genannt.

Beisp. 5. Eine Momentanbewegung ist durch die Translationsgeschwindigkeiten ( $u, v, w$ ) längs der Coordinatenachsen und die Winkelgeschwindigkeiten ( $\omega_x, \omega_y, \omega_z$ ) um sie gegeben. Man soll sie durch zwei conjugirte Winkelgeschwindigkeiten darstellen, von denen eine um die willkürliche Gerade  $\frac{x-f}{l} = \frac{y-g}{m} = \frac{z-h}{n}$  stattfindet.

Ist  $\Omega$  die Winkelgeschwindigkeit um die gegebene Axe, so hat man

$$\frac{u\omega_x + v\omega_y + w\omega_z}{\Omega} = lu + mv + nw - \begin{vmatrix} f, & g, & h \\ \omega_x, & \omega_y, & \omega_z \\ l, & m, & n \end{vmatrix},$$

worin ( $l, m, n$ ) die augenblicklichen Richtungscosinusse sind.

Die Gleichungen für die conjugirte Axe sind

$$\begin{vmatrix} x, & y, & z \\ \omega_x, & \omega_y, & \omega_z \\ l, & m, & n \end{vmatrix} = lu + mv + nw, \quad \begin{vmatrix} x, & y, & z \\ \omega_x, & \omega_y, & \omega_z \\ f, & g, & h \end{vmatrix} = (f-x)u + (g-y)v + (h-z)w.$$

Diese allgemeinen Gleichungen vereinfachen sich, wenn die speciellen Umstände des Problems es erlauben, die Coordinatenachsen so zu wählen, dass einige Constanten Null werden. So ist z. B., wenn man die Centralaxe der Momentanbewegung zur  $z$ -Axe und den kürzesten Abstand zwischen ihr und der gegebenen Geraden zur  $x$ -Axe nimmt,  $u=0, v=0, \omega_x=0, \omega_y=0; g=0, h=0$  und  $l=0$ .

Die erste Gleichung erhält man auf die in § 245 angegebene Art. Man drehe  $\Omega$  um und verbinde es mit der gegebenen Bewegung; die Invariante dieser zusammengesetzten Bewegung verschwindet alsdann. Hat man die Winkelgeschwindigkeit  $\Omega$  auf diese Weise gefunden, so ist die conjugirte Axe die Centralaxe der zusammengesetzten Bewegung und wird wie in § 245 ermittelt. Soll aber die conjugirte Axe unabhängig von  $\Omega$  gefunden werden, so kann man die zweite und dritte Gleichung benutzen.

Die zweite Gleichung ergibt sich daraus, dass die Bewegungsrichtung eines Punktes der conjugirten senkrecht zur gegebenen Axe ist.

Die dritte lässt sich daraus ableiten, dass die Bewegungsrichtung auch senkrecht auf der Geraden steht, die den Punkt mit ( $f, g, h$ ) verbindet.

Diese Resultate gelten scheinbar nicht, wenn die gegebene Bewegung und die gegebene Axe derart sind, dass das aus der ersten Gleichung gefundene  $\Omega$  unendlich gross wird.

Es ist dies jedoch nur ein Grenzfall. Man sieht leicht, dass sowohl der zweiten als der dritten Gleichung genügt wird, wenn man  $x=f+lt, y=g+mt, z=h+nt$  substituirt, d. h. die conjugirte Axe fällt mit der gegebenen zusammen. Wenn  $\Omega'$  die Winkelgeschwindigkeit um die conjugirte Axe bezeichnet, so sind  $\Omega$  und  $\Omega'$  zusammen der resultirenden Winkelgeschwindigkeit der gegebenen Bewegung äquivalent; daraus folgt, dass  $\Omega'$  ebenfalls unendlich gross ist. In diesem

Grenzfall wird also die Bewegung durch zwei unendlich grosse entgegengesetzte Winkelgeschwindigkeiten um zwei zusammenfallende Axen dargestellt.

Ein anderer Grenzfall ist der, in dem die gegebene Axe der Centralaxe der gegebenen Bewegung parallel und die Invariante der Bewegung nicht Null ist. Alsdann sind  $l, m, n$  proportional  $\omega_x, \omega_y, \omega_z$  und die zweite Gleichung stellt eine Ebene im Unendlichen vor. Die conjugirte Axe liegt daher im Unendlichen und die Winkelgeschwindigkeit um sie ist Null.

Noch ein dritter Grenzfall existirt, wenn nämlich die Invariante der gegebenen Bewegung Null ist. Ist die gegebene Bewegung eine einfache Rotation um eine Axe, sagen wir  $Oz$ , und ist die gegebene Axe nicht parallel  $Oz$  und schneidet es auch nicht, so ist  $\Omega = 0$  und die conjugirte Axe fällt mit  $Oz$  zusammen. Ist die gegebene Axe parallel  $Oz$  oder schneidet es, so kann  $\Omega$  jeden Werth haben und die conjugirte Axe ist die resultirende Axe der gegebenen Rotation und des umgedrehten  $\Omega$ .

Ist die gegebene Bewegung eine einfache Translation parallel einer Axe  $Oz$  und steht die gegebene Axe nicht senkrecht auf  $Oz$ , so ist  $\Omega = 0$  und liegt die conjugirte Axe im Unendlichen. Steht dagegen die gegebene Axe senkrecht auf  $Oz$ , so kann  $\Omega$  jeden Werth haben und die conjugirte Axe findet man wie zuvor; siehe § 234.

Bei der analytischen Behandlung dieser Grenzfälle wird es gut sein, die Axen so zu wählen, dass die oben angegebenen Vereinfachungen eintreten können.

Beisp. 6. Steht die eine conjugirte Axe einer Momentanbewegung senkrecht auf der Centralaxe, so schneidet die andere sie und umgekehrt. Läuft die eine conjugirte Axe der Centralaxe parallel, so liegt die andere in unendlich grosser Entfernung und umgekehrt.

Beisp. 7. Ein Körper wird von irgend einer Lage im Raum in irgend eine andere bewegt und jeder Punkt des Körpers in der ersten Lage mit demselben Punkt in der zweiten Lage verbunden. Alle so gefundenen Geraden, welche durch einen gegebenen Punkt gehen, bilden einen Kegel zweiten Grades. Ferner bilden die Mittelpunkte aller dieser Linien einen Körper, der im Stande ist, eine unendlich kleine Bewegung zu machen und zwar jeder Punkt längs der Linie, auf welcher er liegt. Cayley's *Report to the British Assoc.*, 1862.

§ 247. **Charakteristik und Focus.** Wenn die Momentanbewegung eines Körpers durch zwei conjugirte Rotationen um zwei zu einander *rechtwinklige* Axen dargestellt wird, so kann man durch jede Axe eine Ebene legen, die auf der andern senkrecht steht. Die in der Ebene liegende Axe nennt man die *Charakteristik* dieser Ebene und die zu der Ebene senkrechte Axe schneidet sie in ihrem *Focus*. Die beiden Namen rühren von Chasles her, *Comptes Rendus*, 1843. Auch von den folgenden Beispielen sind einige von ihm, jedoch ohne Beweise.

Beisp. 1. Man zeige, dass jede Ebene eine Charakteristik und einen Focus hat.

Die Centralaxe schneide die Ebene in  $O$ . Man nehme die Componenten der Translations- und Winkelgeschwindigkeit in den beiden Richtungen  $Ox, Oz$ , von denen die erste in der Ebene liegt und die zweite senkrecht auf ihr steht. Die Translationen längs  $Ox, Oz$  kann man entfernen, wenn man die Rotationsachsen parallel zu sich selbst nach § 234 verschiebt. Auf diese Art wird die Bewegung durch eine Rotation um eine in der Ebene liegende Axe und eine zweite um eine Axe, die senkrecht zu ihr ist, dargestellt. Es folgt daraus auch, dass die Charakteristik einer Ebene der Projection der Centralaxe auf sie parallel ist.

Beisp. 2. Wenn eine Ebene in dem Körper festliegt und sich mit dem Körper bewegt, so schneidet sie ihre folgende Lage in ihrer Charakteristik. Die Componente der Geschwindigkeit eines Punktes  $P$  der Ebene senkrecht zur Ebene ist seinem Abstand von der Charakteristik proportional und die in der Ebene

liegende Componente ist dem Abstand vom Focus proportional und steht senkrecht auf diesem Abstand.

Beisp. 3. Wenn zwei conjugirte Axen eine Ebene in  $F$  und  $G$  schneiden, so geht  $FG$  durch den Focus. Wenn ferner zwei conjugirte Axen auf eine Ebene projectirt werden, so treffen sie sich in der Charakteristik der Ebene.

Beisp. 4. Wenn sich zwei Axen  $CM$ ,  $CN$  im Punkt  $C$  schneiden, so liegen ihre conjugirten Axen in einer Ebene, deren Focus  $C$  ist und treffen sich in dem Focus der Ebene  $CMN$ .

Es folgt dies daraus, dass die Bewegungsrichtung eines jeden Punktes einer Geraden, die eine Axe schneidet, nur dann senkrecht zur Geraden ist, wenn sie auch die conjugirte Axe trifft.

Beisp. 5. Sind zwei beliebige Axen und ihre conjugirten Axen gegeben, so liegen die vier Geraden auf demselben Hyperboloid.

Beisp. 6. Die Momentanbewegung eines Körpers ist durch die Translations- und Winkelgeschwindigkeiten ( $u$ ,  $v$ ,  $w$ ), ( $\omega_1$ ,  $\omega_2$ ,  $\omega_3$ ) gegeben; man beweise, dass die Charakteristik der Ebene

$$Ax + By + Cz + D = 0$$

die Durchschnittslinie derselben mit der Ebene

$$A(u + \omega_2 z - \omega_3 y) + B(v + \omega_3 x - \omega_1 z) + C(w + \omega_1 y - \omega_2 x) = 0$$

ist und dass sich ihr Focus aus

$$\frac{u + \omega_2 z - \omega_3 y}{A} = \frac{v + \omega_3 x - \omega_1 z}{B} = \frac{w + \omega_1 y - \omega_2 x}{C}$$

ergibt.

Denn die Charakteristik ist der Ort der Punkte, deren Bewegungsrichtungen senkrecht zur Normalen auf die Ebene sind und der Focus ist der Punkt, dessen Bewegungsrichtung senkrecht auf der Ebene steht.

Was wird aus diesen Gleichungen, wenn die Centralaxe die  $z$ -Axe ist?

Beisp. 7. Der Ort der Charakteristiken der Ebenen, die durch eine gegebene Gerade gehen, ist ein einschaliges Hyperboloid; dabei ist der kürzeste Abstand zwischen der gegebenen Geraden und der Centralaxe die Richtung eines Hauptdurchmessers und die beiden andern Hauptdurchmesser halbiren den Winkel zwischen der gegebenen Geraden und der Centralaxe und seinen Nebenwinkel. Man beweise auch, dass der Ort aller Foci der Ebenen die zur gegebenen Geraden conjugirte Axe ist.

Beisp. 8. Irgend eine Fläche  $A$  liege in einem Körper fest und bewege sich mit ihm; die Normalebenen auf die Bahnen aller ihrer Punkte bilden die Enveloppe einer zweiten Fläche  $B$ . Man beweise, dass, wenn die Fläche  $B$  in dem Körper festgelegt wird und sich mit ihm bewegt, die Normalebenen auf die Bahnen ihrer Punkte die Enveloppe der Fläche  $A$  bilden, so dass also die Flächen  $A$  und  $B$  conjugirte Eigenschaften besitzen, indem jede Fläche der Ort der Foci der Berührungsebenen an die andre ist. Man beweise, dass wenn die eine Fläche eine Fläche zweiten Grades ist, es dann auch die andre ist.

## Sich bewegende Axen und die Euler'schen Gleichungen.

§ 248. In § 230 ist gezeigt worden, dass sich die in der Zeit  $dt$  erfolgende Verrückung eines Körpers, der sich um einen festen Punkt  $O$  bewegt durch Drehung des Körpers um drei Gerade  $OA$ ,  $OB$ ,  $OC$  construiren

$OC'$  rotiren und dabei gewisse andre Winkel  $\omega_1' dt$ ,  $\omega_2' dt$ ,  $\omega_3' dt$  beschreiben lässt. Wenn die beiden Axensysteme unendlich nahe beieinander liegen und die Bewegung des Körpers stetig ist, so unterscheiden sich die Winkelgeschwindigkeiten  $\omega_1'$ , etc. von  $\omega'$  etc. nur durch unendlich kleine Grössen. Die Bezugsachsen heissen in diesem Fall sich bewegende Axen. Man beachte, dass  $\omega_3 dt$  den Rotationswinkel um  $Oz$  nicht in Bezug auf die sich bewegende Ebene, die  $OA$  und  $OC$  enthält, misst, sondern in Bezug auf eine im Raum festliegende Ebene, die durch die momentane Lage von  $OC$  geht.

§ 249.  $O_x$ ,  $O_y$ ,  $O_z$  seien die rechtwinkligen im Raum festliegenden Axen und  $\omega_x$ ,  $\omega_y$ ,  $\omega_z$  die Componenten der Winkelgeschwindigkeit eines Körpers zur Zeit  $t$ .  $OA$ ,  $OB$ ,  $OC$  seien drei rechtwinklige Axen, die sich um den festen Punkt  $O$  bewegen und  $\omega_1$ ,  $\omega_2$ ,  $\omega_3$  die Componenten der Winkelgeschwindigkeit desselben Körpers zur selben Zeit. Fallen die beiden Axensysteme der Lage nach zur Zeit  $t$  zusammen, so ist  $\omega_1 = \omega_x$ ,  $\omega_2 = \omega_y$ ,  $\omega_3 = \omega_z$ ; zur Zeit  $t + dt$  haben sich aber die beiden Systeme getrennt und man kann nicht länger behaupten, dass  $\omega_3 + d\omega_3 = \omega_z + d\omega_z$  ist.

Wir wollen nun zeigen, dass bis auf kleine Grössen höherer Ordnung  $d\omega_3 = d\omega_z$  ist, wenn die sich bewegenden Axen im Körper festliegen.  $OR$ ,  $OR'$  seien die resultirenden Rotationsachsen des Körpers zu den Zeiten  $t$  und  $t + dt$ , d. h. eine Rotation  $\Omega dt$  um  $OR$  bringe den Körper in die Lage, in welcher  $OC$  mit  $Oz$  zur Zeit  $t$  zusammenfällt und eine weitere Rotation  $\Omega' dt$  um  $OR'$  bringe den Körper in die benachbarte Lage zur Zeit  $t + dt$ , während in demselben Zeitintervall  $dt$  sich  $OC$  in die Lage  $OC'$  bewegt. Nach der Definition des Differentialquotienten ist dann

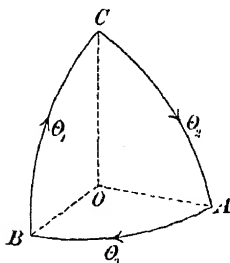
$$\frac{d\omega_3}{dt} = \text{Lim.} \frac{\Omega' \cos R'C' - \Omega \cos RC}{dt},$$

$$\frac{d\omega_z}{dt} = \text{Lim.} \frac{\Omega' \cos R'z - \Omega \cos Rz}{dt}.$$

Die Winkel  $RC$  und  $Rz$  sind nach der Voraussetzung gleich. Da  $OC$  in dem Körper festliegt, so macht es während der Drehung des Körpers um  $OR'$  einen constanten Winkel mit  $OR'$ ; daher sind auch die Winkel  $R'C'$  und  $R'z$  gleich. Mithin sind die Differentialquotienten ebenfalls gleich.

§ 250. Der vorstehende Satz ist der specielle Fall eines Fundamentaltheorems der Theorie sich bewegendes Axen. Das letztere allgemeine Theorem gilt nicht nur für Winkelgeschwindigkeiten, sondern für jeden Vector oder jede Richtungsgrösse, die dem Parallelogrammgesetz unterworfen ist.

Nach § 215 dreht sich das bewegliche Axensystem um eine Momentanaxe mit einer Winkelgeschwindigkeit, die  $\theta$  heissen mag.  $\theta_1, \theta_2, \theta_3$  seien die Componenten von  $\theta$  um die Axen  $OA, OB, OC$ . In der Figur stellt dann  $\theta_1$  die Geschwindigkeit dar, mit welcher sich ein jeder Punkt des Kreisbogens  $BC$  längs dieses Bogens bewegt,  $\theta_2$  diejenige, mit welcher sich ein Punkt von  $CA$  längs  $CA$  bewegt u. s. f.



$V_1, V_2, V_3$  und  $V_x, V_y, V_z$  seien die Componenten eines Vectors in Bezug auf die beweglichen Axen  $OA, OB, OC$  bez. auf die festen Axen  $Ox, Oy, Oz$ .  $\alpha, \beta, \gamma$  seien die Richtungswinkel von  $Oz$  gegen  $OA, OB, OC$ ; es ist dann  $V_z = V_1 \cos \alpha + V_2 \cos \beta + V_3 \cos \gamma$  und

$$\frac{dV_z}{dt} = \frac{dV_1}{dt} \cos \alpha + \frac{dV_2}{dt} \cos \beta + \frac{dV_3}{dt} \cos \gamma - V_1 \sin \alpha \frac{d\alpha}{dt} - V_2 \sin \beta \frac{d\beta}{dt} - V_3 \sin \gamma \frac{d\gamma}{dt}.$$

Fällt die Axe  $Oz$  zur Zeit  $t$  mit  $OC$  zusammen, so ist  $\alpha = \frac{1}{2}\pi$ ,  $\beta = \frac{1}{2}\pi$ ,  $\gamma = 0$  und daher

$$\frac{dV_z}{dt} = \frac{dV_3}{dt} - V_1 \frac{d\alpha}{dt} - V_2 \frac{d\beta}{dt}.$$

$\frac{d\alpha}{dt}$  ist aber die Winkelgeschwindigkeit, mit welcher sich die Axe  $OA$  von der momentan mit  $OC$  zusammenfallenden festliegenden Geraden  $Oz$  entfernt; es ist daher  $\frac{d\alpha}{dt} = \theta_2$  und ebenso  $\frac{d\beta}{dt} = -\theta_1$ . Man erhält mithin

$$\frac{dV_z}{dt} = \frac{dV_3}{dt} - V_1 \theta_2 + V_2 \theta_1,$$

und ähnlich

$$\frac{dV_x}{dt} = \frac{dV_1}{dt} - V_2 \theta_3 + V_3 \theta_2, \quad \frac{dV_y}{dt} = \frac{dV_2}{dt} - V_3 \theta_1 + V_1 \theta_3.$$

Ist der Vector  $V$  die resultierende Winkelgeschwindigkeit  $\Omega$  eines Körpers um die Momentanaxe (§ 233), so ist  $V_1 = \omega_1, V_2 = \omega_2, V_3 = \omega_3$  und  $V_x = \omega_x, V_y = \omega_y, V_z = \omega_z$ . Es wird somit

$$\frac{d\omega_z}{dt} = \frac{d\omega_3}{dt} - \omega_1 \theta_2 + \omega_2 \theta_1.$$

Liegen die beweglichen Axen im Körper fest, so haben sie dieselbe Momentanaxe wie der Körper; es ist also  $\theta = \Omega$  und daher auch

$$\theta_1 = \omega_1, \theta_2 = \omega_2. \text{ Daraus folgt dann sofort } \frac{d\omega_z}{dt} = \frac{d\omega_3}{dt}.$$

§ 251. Wir wollen noch ein zweites Beispiel geben.  $x, y, z$  seien die Coordinaten irgend eines Punktes  $G$ , z. B. des Schwerpunktes

eines sich bewegenden Körpers und mögen sich auf die beweglichen Axen  $OA$ ,  $OB$ ,  $OC$  beziehen.  $u$ ,  $v$ ,  $w$  seien die Componenten der Geschwindigkeit von  $G$  parallel zu diesen Axen und  $X$ ,  $Y$ ,  $Z$  die Componenten der Beschleunigung. Da sowohl die resultirende Geschwindigkeit als die resultirende Beschleunigung Vektoren sind, so ist

$$\begin{aligned} u &= \frac{dx}{dt} - y\theta_3 + z\theta_2, & X &= \frac{du}{dt} - v\theta_3 + w\theta_2, \\ v &= \frac{dy}{dt} - z\theta_1 + x\theta_3, & Y &= \frac{dv}{dt} - w\theta_1 + u\theta_3, \\ w &= \frac{dz}{dt} - x\theta_2 + y\theta_1, & Z &= \frac{dw}{dt} - u\theta_2 + v\theta_1. \end{aligned}$$

Diese Resultate werden später von Nutzen sein.

Der hier gegebene Beweis des Fundamentaltheorems für bewegliche Axen beruht auf der Methode, die Prof. Slessor in dem *Quarterly Journal*, 1858 angewendet hat, um zu beweisen, dass  $\frac{d\omega_3}{dt} = \frac{d\omega_z}{dt}$  ist. Einen zweiten sehr einfachen Beweis findet man in dem Kapitel über bewegliche Axen im Anfang des 2. Theiles dieses Buches.

§ 252. Euler's dynamische Gleichungen. *Man soll die allgemeinen Bewegungsgleichungen eines Körpers bestimmen, welcher sich um einen festen Punkt  $O$  bewegt.*

$x$ ,  $y$ ,  $z$  seien die Coordinaten eines materiellen Punktes  $m$  auf im Raum festliegende Axen  $Ox$ ,  $Oy$ ,  $Oz$  bezogen. Nimmt man die Momente um die  $z$ -Axe, so erhält man nach D'Alembert's Princip

$$\Sigma m \left( x \frac{d^2 y}{dt^2} - y \frac{d^2 x}{dt^2} \right) = N.$$

Sind  $\omega_x$ ,  $\omega_y$ ,  $\omega_z$  die Winkelgeschwindigkeiten des Körpers um die Axen, so ist

$$\frac{dx}{dt} = \omega_y z - \omega_z y, \quad \frac{dy}{dt} = \omega_z x - \omega_x z, \quad \frac{dz}{dt} = \omega_x y - \omega_y x.$$

Daher

$$\frac{d^2 x}{dt^2} = z \frac{d\omega_y}{dt} - y \frac{d\omega_z}{dt} + \omega_y(\omega_x y - \omega_y x) - \omega_z(\omega_z x - \omega_x z),$$

$$\frac{d^2 y}{dt^2} = x \frac{d\omega_z}{dt} - z \frac{d\omega_x}{dt} + \omega_z(\omega_y z - \omega_z y) - \omega_x(\omega_x y - \omega_y x).$$

Diese Werthe sind nun in die Momentengleichung einzusetzen.

Es seien  $\omega_1$ ,  $\omega_2$ ,  $\omega_3$  die Winkelgeschwindigkeiten des Körpers um drei rechtwinklige im Körper festliegende Axen  $OA$ ,  $OB$ ,  $OC$  und diese Axen mögen zur Zeit  $t$  mit den im Raum festliegenden zusammenfallen. Alsdann ist  $\omega_x = \omega_1$ , etc. und nach § 249,  $\frac{d\omega_x}{dt} = \frac{d\omega_1}{dt}$ , etc.

Bei der Benutzung von Axen, die im Körper festliegen, hat man den Vortheil, dass die Trägheits- und Deviationsmomente Constante

axen für den festen Punkt, so kommt noch die Vereinfachung hinzu, dass alle Deviationsmomente Null werden. Substituirt man nun die Werthe von  $\frac{d^2x}{dt^2}$ ,  $\frac{d^2y}{dt^2}$  in die Momentengleichung, so kann man also alle Glieder in der Gleichung für  $\frac{d^2x}{dt^2}$ , die nicht  $y$  und in der für  $\frac{d^2y}{dt^2}$ , die nicht  $x$  enthalten, weglassen. Man erhält auf diese Weise

$$\Sigma m(x^2 + y^2) \frac{d\omega_3}{dt} + \Sigma m(x^2 - y^2) \omega_1 \omega_2 = N.$$

Sind  $A, B, C$  die Hauptträgheitsmomente für den festen Punkt  $O$ , so wird

$$C \frac{d\omega_3}{dt} - (A - B) \omega_1 \omega_2 = N$$

und ähnlich

$$A \frac{d\omega_1}{dt} - (B - C) \omega_2 \omega_3 = L,$$

$$B \frac{d\omega_2}{dt} - (C - A) \omega_3 \omega_1 = M.$$

Diese Gleichungen heissen die *Euler'schen dynamischen Gleichungen*.

§ 253. Wir wissen, dass nach dem D'Alembert'schen Princip das Moment der Effectivkräfte um eine Gerade dem der gegebenen Kräfte gleich ist. Aus den Euler'schen Gleichungen ergiebt sich daher, dass die Momente der Effectivkräfte um die Hauptaxen für den festen Punkt durch die linken Seiten dieser Gleichungen ausgedrückt werden. Liegt kein Punkt des Körpers im Raum fest, so ist die Bewegung des Körpers um seinen Schwerpunkt dieselbe, als läge dieser Punkt fest. Wenn dann  $A, B, C$  die Hauptmomente für den Schwerpunkt bedeuten, so liefern die linken Seiten der Euler'schen Gleichungen die Momente der Effectivkräfte um die Hauptaxen des Schwerpunktes. Das Moment um eine andre durch den festen Punkt gehende Gerade lässt sich dann einfach dadurch ermitteln, dass man diese Momente nach den Gesetzen der Statik zerlegt.

Beisp. 1. Ist  $2T = A\omega_1^2 + B\omega_2^2 + C\omega_3^2$ ,  $G$  das Moment der gegebenen Kräfte um die Momentanaxe und  $\Omega$  die resultirende Winkelgeschwindigkeit, zu beweisen, dass  $\frac{dT}{dt} = G\Omega$  ist.

Beisp. 2. An einem Körper, z. B. der Erde, der sich um einen festen Punkt dreht, greifen Kräfte an, wie die Anziehung der Sonne und des Mondes, die eine Rotation um eine zur Momentanaxe senkrechte Axe hervorzubringen suchen. Man zeige, dass die Winkelgeschwindigkeit nur dann gleichförmig sein kann, wenn zwei der Hauptträgheitsmomente für den festen Punkt gleich sind. Die Axe, um welche die Kräfte eine Drehung hervorzubringen suchen, ist diejenige, um welche der Körper, wenn er sich in Ruhe befände, zu rotiren anfangen würde.

§ 254. *Man bestimme den Druck auf den festen Punkt.*

$x, y, z$  seien die Coordinaten des Schwerpunktes; sie mögen auf rechtwinklige im Raum festliegende Axen bezogen werden, die sich in dem festen Punkt schneiden und  $P, Q, R$  seien die Componenten der Druckkräfte im festen Punkt auf den Körper in der Richtung der Axen. Versteht man unter  $\mu$  die Masse des Körpers, so erhält man

$$\mu \frac{d^2 x}{dt^2} = P + \Sigma m X$$

und zwei ähnliche Gleichungen.

Drückt man  $\frac{d^2 x}{dt^2}$  durch  $\omega_x, \omega_y, \omega_z$  aus und substituirt, so erhält man weiter

$$\mu \left[ z \frac{d\omega_y}{dt} - y \frac{d\omega_z}{dt} + \omega_y(\omega_x y - \omega_y x) - \omega_z(\omega_z x - \omega_x z) \right] = P + \Sigma m X$$

mit den entsprechenden beiden andern Gleichungen.

Lassen wir nun die im Raum festliegenden Axen in dem betrachteten Moment mit den Hauptaxen für den festen Punkt zusammenfallen, so können wir für  $\frac{d\omega_y}{dt}$  und  $\frac{d\omega_z}{dt}$  die Werthe aus den Euler'schen Gleichungen substituiren. Es wird dann

$$\begin{aligned} \mu \left[ \omega_1(B + C - A) \left( \frac{y\omega_2}{C} + \frac{z\omega_3}{B} \right) - (\omega_2^2 + \omega_3^2)x \right] \\ = P + \Sigma m X - \mu \left( \frac{M}{B} z - \frac{N}{C} y \right) \end{aligned}$$

mit ähnlichen Ausdrücken für  $Q$  und  $R$ .

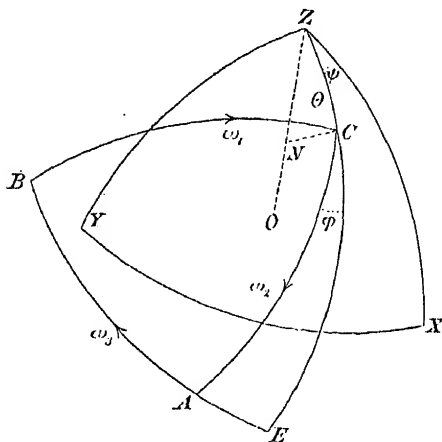
§ 255. Beisp.  $G$  sei der Schwerpunkt des Körpers; man zeige, dass die Ausdrücke auf den linken Seiten der Gleichungen, welche die Druckkräfte auf den festen Punkt angeben, die Componenten zweier Kräfte sind; die eine,  $\Omega^2 \cdot GH$ , ist parallel zu  $GH$ , einem Loth auf der Momentanaxe  $OI$ , unter  $\Omega$  die resultirende Winkelgeschwindigkeit verstanden; die andre,  $\Omega'^2 \cdot GK$ , ist senkrecht zur Ebene  $OGK$ , wenn  $GK$  normal auf der Geraden  $OJ$  steht, deren Richtungs cosinusse  $\frac{B-C}{A} \omega_2 \omega_3$ ,  $\frac{C-A}{B} \omega_3 \omega_1$ ,  $\frac{A-B}{C} \omega_1 \omega_2$  proportional sind und  $\Omega'^4$  die Summe der Quadrate dieser Grössen bedeutet.

§ 256. *Euler's geometrische Gleichungen. Man bestimme die geometrischen Gleichungen, welche die Bewegung des Körpers im Raum mit den Winkelgeschwindigkeiten des Körpers um drei bewegliche Axen  $OA, OB, OC$  verbinden.*

Man nehme den festen Punkt  $O$  zum Centrum einer Kugel, deren Radius die Einheit ist;  $X, Y, Z$  und  $A, B, C$  seien die Punkte, in welchen die Kugel von den festen bez. den beweglichen Axen geschnitten wird.  $ZC$  und  $BA$  oder ihre Verlängerungen mögen sich in  $E$  treffen. Es sei der Winkel  $XZC = \psi$ ,  $ZC = \theta$ ,  $ECA = \varphi$ ; man soll die geometrischen Beziehungen zwischen  $\theta, \varphi, \psi$  und  $\omega_1, \omega_2, \omega_3$  bestimmen.



Ziehe  $CN$  senkrecht zu  $OZ$ . Da  $\psi$  der Winkel ist, den die Ebene  $COZ$  mit der im Raum festliegenden Ebene  $XOZ$  bildet, so ist die Geschwindigkeit von  $C$  senkrecht



zur Ebene  $ZOC$  gleich  $CN \frac{d\psi}{dt}$ , was dasselbe ist wie  $\sin \theta \frac{d\psi}{dt}$ , weil der Radius  $OC$  der Kugel der Einheit gleichkommt. Die Geschwindigkeit von  $C$  längs  $ZC$  ist ferner  $\frac{d\theta}{dt}$ . Die Bewegung von  $C$  wird daher durch  $\frac{d\theta}{dt}$  und  $\sin \theta \frac{d\psi}{dt}$  längs  $ZC$  bez. senkrecht dazu dargestellt. Die Bewegung von  $C$  wird aber auch durch die Winkelgeschwindigkeiten  $\omega_1$  und  $\omega_2$  längs  $BC$  bez.

$CA$  ausgedrückt. Diese beiden Darstellungen derselben Bewegung müssen daher äquivalent sein. Die Komponenten längs  $ZC$  und senkrecht dazu ergeben daher

$$\left. \begin{aligned} \frac{d\theta}{dt} &= \omega_1 \sin \varphi + \omega_2 \cos \varphi \\ \sin \theta \frac{d\psi}{dt} &= -\omega_1 \cos \varphi + \omega_2 \sin \varphi \end{aligned} \right\}$$

und ähnlich die Komponenten längs  $CB$  und  $CA$ .

$$\left. \begin{aligned} \omega_1 &= \frac{d\theta}{dt} \sin \varphi - \frac{d\psi}{dt} \sin \theta \cos \varphi \\ \omega_2 &= \frac{d\theta}{dt} \cos \varphi + \frac{d\psi}{dt} \sin \theta \sin \varphi \end{aligned} \right\}.$$

Diese beiden Gruppen von Gleichungen sind identisch; die eine lässt sich aus der andern durch algebraische Umformung ableiten.

Auf dieselbe Art, indem man ein Loth von  $E$  auf  $OZ$  fällt, lässt sich zeigen, dass die Geschwindigkeit von  $E$  senkrecht zu  $ZE$  gleich  $\frac{d\psi}{dt} \sin ZE$  ist, was dasselbe ist wie  $\frac{d\psi}{dt} \cos \theta$ . Die Geschwindigkeit von  $A$  in Bezug auf  $E$  längs  $EA$  ist ebenso  $\frac{d\varphi}{dt} \sin CA$  und dieses ist dasselbe wie  $\frac{d\varphi}{dt}$ . Die ganze Geschwindigkeit von  $A$  im Raum längs  $AB$  wird daher durch  $\frac{d\psi}{dt} \cos \theta + \frac{d\varphi}{dt}$  dargestellt. Diese Bewegung wird aber auch durch  $\omega_3$  ausgedrückt. Wie zuvor müssen die beiden Darstellungen derselben Bewegung äquivalent sein. Man erhält daher

$$\omega_3 = \frac{d\psi}{dt} \cos \theta + \frac{d\varphi}{dt}.$$

Hätten wir in ähnlicher Weise die Bewegung eines andern Punktes des Körpers, z. B.  $B$ , sowohl durch  $\omega_1, \omega_2, \omega_3$ , als durch  $\theta, \varphi, \psi$  ausgedrückt, so hätten wir andre Gleichungen erhalten; da wir aber nicht mehr als drei voneinander unabhängige Relationen erhalten können, so wären wir nur zu Gleichungen gekommen, die algebraische Umformungen der früheren sind.

§ 257. Manchmal ist es nöthig, die Winkelgeschwindigkeiten des Körpers um die *festen* Axen  $OX, OY, OZ$  durch  $\theta, \varphi, \psi$  auszudrücken. Das kann auf folgende Art geschehen.  $\omega_x, \omega_y, \omega_z$  seien die Winkelgeschwindigkeiten um die festen Axen,  $\Omega$  die resultirende Winkelgeschwindigkeit. Geben wir dem Raum und auch dem Körper ausser seiner thatsächlichen Bewegung noch eine Winkelgeschwindigkeit  $-\Omega$  um die resultirende Rotationsaxe, so werden die Axen  $OA, OB, OC$  zu festliegenden Axen und die Axen  $OX, OY, OZ$  bewegen sich mit den Winkelgeschwindigkeiten  $-\omega_x, -\omega_y, -\omega_z$ . Wenn wir daher in den obigen Formeln  $\varphi$  mit  $-\psi, \theta$  mit  $-\theta, \psi$  mit  $-\varphi$  vertauschen, so wird  $\omega_1, \omega_2, \omega_3$  zu  $-\omega_x, -\omega_y, -\omega_z$  und wir erhalten

$$\omega_x = -\frac{d\theta}{dt} \sin \psi + \frac{d\varphi}{dt} \sin \theta \cos \psi,$$

$$\omega_y = \frac{d\theta}{dt} \cos \psi + \frac{d\varphi}{dt} \sin \theta \sin \psi,$$

$$\omega_z = \frac{d\varphi}{dt} \cos \theta + \frac{d\psi}{dt}.$$

§ 258. Beisp. 1.  $p, q, r$  seien die Richtungscosinusse von  $OZ$  in Bezug auf die Axen  $OA, OB, OC$ ; man zeige, dass man zweien der Euler'schen geometrischen Gleichungen die symmetrische Form

$$\frac{dp}{dt} - q\omega_3 + r\omega_2 = 0, \quad \frac{dq}{dt} - r\omega_1 + p\omega_3 = 0, \quad \frac{dr}{dt} - p\omega_2 + q\omega_1 = 0$$

geben kann. Die letzte Gleichung kann man durch Differentiation der letzten der drei Beziehungen

$$p = -\sin \theta \cos \varphi, \quad q = \sin \theta \sin \varphi, \quad r = \cos \theta$$

und Substitution des Werthes von  $\frac{d\theta}{dt}$  aus § 256 erhalten. Die andern lassen sich nach den Regeln der Symmetrie ableiten.

Beisp. 2. Man beweise, dass die Richtungscosinusse einer der beiden Gruppen der Euler'schen Axen in Bezug auf die andre durch die Formeln

$$\left. \begin{aligned} \cos XA &= -\sin \psi \sin \varphi + \cos \psi \cos \varphi \cos \theta \\ \cos YA &= \cos \psi \sin \varphi + \sin \psi \cos \varphi \cos \theta \\ \cos ZA &= -\sin \theta \cos \varphi \end{aligned} \right\}$$

$$\left. \begin{aligned} \cos XB &= -\sin \psi \cos \varphi - \cos \psi \sin \varphi \cos \theta \\ \cos YB &= \cos \psi \cos \varphi - \sin \psi \sin \varphi \cos \theta \\ \cos ZB &= \sin \theta \sin \varphi \end{aligned} \right\}$$

$$\left. \begin{aligned} \cos XC &= \sin \theta \cos \psi \\ \cos YC &= \sin \theta \sin \psi \\ \cos ZC &= \cos \theta \end{aligned} \right\}$$

gegeben sind.

bewegungsgrösse um eine feste Gerade auf hinreichend einfache Art durch die Coordinaten des Körpers auszudrücken suchen (§ 72). Wir benutzen dazu den allgemeinen in § 77 bewiesenen Satz

$$\frac{d}{dt} \left( \begin{array}{c} \text{Winkelbewegungsgrösse} \\ \text{um eine feste Gerade} \end{array} \right) = \left( \begin{array}{c} \text{Moment der} \\ \text{gegebenen Kräfte} \end{array} \right).$$

*Zweitens* kann man die Bewegung auf ein geeignetes System rechtwinkliger beweglicher Axen beziehen.  $h_1, h_2, h_3$  seien die Winkelbewegungsgrössen um drei rechtwinklige Axen  $OA, OB, OC$ ,  $L, M, N$  die Momente der gegebenen Kräfte um diese Axen. Da die Winkelbewegungsgrössen sich nach dem Parallelogrammgesetz zusammensetzen und zerlegen lassen, so hat man nach § 250

$$\frac{dh_1}{dt} - h_2 \theta_3 + h_3 \theta_2 = L,$$

$$\frac{dh_2}{dt} - h_3 \theta_1 + h_1 \theta_3 = M,$$

$$\frac{dh_3}{dt} - h_1 \theta_2 + h_2 \theta_1 = N.$$

§ 262. Die Winkelbewegungsgrösse um die  $z$ -Axe. Die Momentanbewegung eines Körpers um einen festen Punkt ist durch die Winkelgeschwindigkeiten  $\omega_x, \omega_y, \omega_z$  um drei Axen, die sich in diesem Punkt treffen, gegeben; man soll die Winkelbewegungsgrösse um die  $z$ -Axe finden.

$x, y, z$  seien die Coordinaten eines materiellen Punktes  $m$  des Körpers und  $u', v', w'$  die Componenten der Geschwindigkeit des Punktes parallel zu den Axen. Nach § 76 ist dann das Moment der Winkelbewegungsgrösse um die  $z$ -Axe

$$h_z = \Sigma m(xv' - yu').$$

Substituiert man  $u' = \omega_y z - \omega_z y$ ,  $v' = \omega_z x - \omega_x z$  nach § 238, so erhält man

$$h_z = \Sigma m(x^2 + y^2) \omega_z - (\Sigma m x z) \omega_x - (\Sigma m y z) \omega_y$$

und auf ähnliche Weise die Winkelbewegungsgrössen um die  $x$ - und  $y$ -Axe

$$h_1 = \Sigma m(y^2 + z^2) \omega_x - (\Sigma m x y) \omega_y - (\Sigma m x z) \omega_z,$$

$$h_2 = \Sigma m(z^2 + x^2) \omega_y - (\Sigma m y z) \omega_z - (\Sigma m y x) \omega_x.$$

Die Coefficienten von  $\omega_x, \omega_y, \omega_z$  sind hierin die Trägheits- und Deviationsmomente für die sich in dem festen Punkt schneidenden Axen.

§ 263. Gibt es in dem Körper keinen festen Punkt, so muss man die sämtlichen sechs Componenten der Bewegung benutzen. Die Form des Resultates hängt von dem Punkt ab, den man zum Reductionspunkt macht, und wird sehr einfach, wenn man den Schwerpunkt dazu

nimmt. Aus den in den §§ 73, 74 angeführten Gründen ist er im Allgemeinen der geeignetste Punkt.

$Oz$  sei die Axe, für welche die Winkelbewegungsgrösse gesucht wird,  $Ox$ ,  $Oy$  die beiden andern Axen, die mit  $Oz$  ein System rechtwinkliger Axen bilden.  $\bar{x}$ ,  $\bar{y}$ ,  $\bar{z}$  seien die Coordinaten des Schwerpunktes. Die Momentanbewegung des Körpers sei, wie in § 238, durch die Translationsgeschwindigkeiten  $u$ ,  $v$ ,  $w$  des Schwerpunktes parallel zu den Bezugsaxen und die Winkelgeschwindigkeiten  $\omega_x$ ,  $\omega_y$ ,  $\omega_z$  um drei parallele sich im Schwerpunkt treffende Axen dargestellt.

Nach § 74 ist die Winkelbewegungsgrösse um  $Oz$  der um eine parallele Axe, welche durch den als festen Punkt betrachteten Schwerpunkt geht, gleich, zusammen mit der Winkelbewegungsgrösse der ganzen im Schwerpunkt vereinigten Masse. Die erste ist im vorigen Paragraphen gefunden worden und die letzte ist offenbar  $M(\bar{x}v - \bar{y}u)$ . Die gesuchte Grösse ist daher

$$M(\bar{x}v - \bar{y}u) + \Sigma m(x^2 + y^2)\omega_z - (\Sigma m xz)\omega_x - (\Sigma m yz)\omega_y.$$

$M$  ist hierin die ganze Masse des Körpers und die Coefficienten von  $\omega_x$ ,  $\omega_y$ ,  $\omega_z$  sind die Trägheits- und Deviationsmomente für die Axen, welche sich im Schwerpunkt schneiden.

§ 264. **Bewegliche Axen.** Wenn die Bezugsaxen sich im Raum bewegen, so wird die Bewegung des Körpers während der Zeit  $dt$  mittelst der Componenten der Bewegung so construirt, *als ob die Axen für den Moment im Raum festlägen*. Siehe § 248. In den soeben gefundenen Ausdrücken für die Winkelbewegungsgrösse sind die Axen zwar als im Raum festliegend angenommen, aber sonst durchaus beliebig. Wählt man sie derart, dass das System der beweglichen Axen zur Zeit  $t$  mit ihnen zusammenfällt, so geben die Formeln die Winkelbewegungsgrössen um die beweglichen Axen für diesen speciellen Moment, mögen sie nun dieselben Lagen im Raum noch länger einnehmen oder nicht. *Die Formeln sind daher durchaus allgemein gültig und liefern die augenblicklichen Winkelbewegungsgrössen, 'mögen die Axen festliegen oder nicht.*

Liegen die gewählten Axen im Raum fest, so sind die Coefficienten von  $\omega_x$ ,  $\omega_y$ ,  $\omega_z$  in dem Ausdruck für  $h_3$  im Allgemeinen veränderlich und ihre Aenderungen können complicirten Gesetzen unterliegen. Als dann ist es vortheilhafter, in dem Körper festliegende Axen zu wählen, wie es Euler in seinen Bewegungsgleichungen, § 252, gethan hat.

Bewegt sich ein Körper um einen festen Punkt  $O$  und ist seine augenblickliche Bewegung durch die Winkelgeschwindigkeiten  $\omega_1$ ,  $\omega_2$ ,  $\omega_3$  um die im Körper festen Axen  $Ox'$ ,  $Oy'$ ,  $Oz'$  gegeben, so ist die Winkelbewegungsgrösse um die  $z'$ -Axe

$$h_3' = C\omega_3 - E\omega_1 - D\omega_2,$$

worin  $C$ ,  $E$ ,  $D$  absolute Constante sind, nämlich

$$C = \Sigma m(x'^2 + y'^2), \quad E = \Sigma m x' z', \quad D = \Sigma m y' z'.$$

Sind die im Körper festen Axen Hauptaxen, so verschwinden die Deviationsmomente und man erhält die Winkelbewegungsgrößen in den einfachen Formen

$$h_1' = A\omega_1, \quad h_2' = B\omega_2, \quad h_3' = C\omega_3,$$

worin  $A$ ,  $B$ ,  $C$  die Hauptträgheitsmomente des Körpers für den Coordinatenanfang sind, von dem angenommen ist, dass er im Raum festliege.

Auf diese Art kommt man zu einem neuen Beweis der Euler'schen Gleichungen. Substituiert man diese Werthe von  $h_1$ ,  $h_2$ ,  $h_3$  in die Gleichungen für die beweglichen Axen (§ 261), so wird die erste

$$\frac{d}{dt}(A\omega_1) - (B\omega_2)\theta_3 + (C\omega_3)\theta_2 = L$$

und, da die beweglichen Axen im Körper festliegen, also  $\theta_2 = \omega_2$ ,  $\theta_3 = \omega_3$  ist (§ 250), so nimmt die Gleichung die Euler'sche Gestalt an

$$A \frac{d\omega_1}{dt} - (B - C)\omega_2\omega_3 = L.$$

Der Beweis scheint kürzer zu sein als der in § 252 gegebene; in der That sind beide dieselben. Beide hängen von einem speciellen Fall des Fundamentalsatzes über bewegliche Axen ab (§§ 249, 250); der eine erfordert die Substitution für  $\frac{d^2x}{dt^2}$ ,  $\frac{d^2y}{dt^2}$  mit Weglassung gewisser Glieder, der andre die gleichwerthige Substitution für  $u'$ ,  $v'$  (§ 262).

§ 265. Eine für die Praxis bequeme Anleitung, die Winkelbewegungsgrößen eines Körpers um ein System fester oder beweglicher Axen zu finden.

Suchen wir unter der Voraussetzung, der Körper drehe sich um einen festen Punkt  $O$ , nach einem Axensystem  $Ox'$ ,  $Oy'$ ,  $Oz'$ , für welches sich die Winkelbewegungsgrößen leicht ermitteln lassen, so wird dies im Allgemeinen ein im Körper festliegendes Axensystem sein und die Größen  $h_1'$ ,  $h_2'$ ,  $h_3'$  sind alsdann im letzten Paragraphen gegeben worden.

Sind die Richtungscosinusse eines jeden der beiden Axensysteme in Bezug auf das andre durch das Diagramm wie in § 217

	$x, y, z$
$x'$	$a_1, a_2, a_3$
$y'$	$b_1, b_2, b_3$
$z'$	$c_1, c_2, c_3$

gegeben, so ist die Winkelbewegungsgröße um die  $z$ -Axe, da Momente dem Parallelogrammgesetz unterworfen sind,

$$h_3 = h_1' a_3 + h_2' b_3 + h_3' c_3.$$

Hauptsachsensystems  $Ox, Oy, Oz$  ab. Im Allgemeinen sind die Hauptaxen des Körpers für  $O$  am vortheilhaftesten. Alsdann wird

$$h_3 = A\omega_1 a_3 + B\omega_2 b_3 + C\omega_3 c_3.$$

Es sind noch  $\omega_1, \omega_2, \omega_3; a_3, b_3, c_3$  durch die Coordinaten des Körpers auszudrücken (§ 72). Sind diese Coordinaten die Euler'schen Winkel  $\theta, \varphi, \psi$ , so findet man die gesuchten Ausdrücke ausführlich in den §§ 256 und 258.

§ 266. *Ist der Körper einaxig, so dass also zwei Hauptträgheitsmomente  $A$  und  $B$  einander gleich sind, so lassen sich zwei einfache Ausdrücke für die Winkelbewegungsgrößen um die Axen  $Ox, Oy, Oz$  finden.*

*Erstens.* Zwei Coordinaten des Körpers seien die Euler'schen Winkel  $\theta, \psi$  der Symmetrieaxe. Die Axen  $Ox', Oz'$  mögen mit  $OE, OC$  (Fig. S. 230) zusammenfallen. Alsdann ist  $\varphi=0$  und aus der Figur ergibt sich, dass  $\omega_1 = -\frac{d\psi}{dt} \sin \theta$ ,  $\omega_2 = \frac{d\theta}{dt}$  ist. Da die Winkelbewegungsgrößen um  $Ox', Oy', Oz'$  gleich  $A\omega_1, A\omega_2, C\omega_3$  sind, so findet man durch einfache Zerlegung

$$h_1 = A \left[ -\sin \theta \frac{d\theta}{dt} - \sin \theta \cos \theta \cos \psi \frac{d\psi}{dt} \right] + C\omega_3 \sin \theta \cos \psi,$$

$$h_2 = A \left[ \cos \psi \frac{d\theta}{dt} - \sin \theta \cos \theta \sin \psi \frac{d\psi}{dt} \right] + C\omega_3 \sin \theta \sin \psi,$$

$$h_3 = A \sin^2 \theta \frac{d\psi}{dt} + C\omega_3 \cos \theta.$$

Man könnte für  $\omega_3$  seinen Werth aus der dritten Euler'schen geometrischen Gleichung einsetzen; damit würde man aber  $\frac{d\varphi}{dt}$  in die Gleichungen einführen und im Allgemeinen ist es vortheilhafter, statt dessen  $\omega_3$  beizubehalten.

Auf diese Weise werden die Winkelbewegungsgrößen eines einaxigen Körpers um beliebige Gerade durch die Richtungswinkel der Axe des Körpers und die Winkelgeschwindigkeit um sie ausgedrückt.

*Zweitens.* Statt der unsymmetrischen Coordinaten  $\theta, \psi$  kann man die Richtungs-cosinusse  $\xi, \eta, \zeta$  der Axe des Körpers benutzen. Nach dem in § 75 angegebenen Verfahren wollen wir den Körper durch ein System von Massenpunkten gleichen Trägheitsmoments ersetzen.

Die Winkelbewegungsgrößen des Körpers um die Hauptaxen für den festen Punkt  $O$  sind  $A\omega_1, A\omega_2, C\omega_3$ . An die Axe  $OC$  mögen nun ein oder mehrere imaginäre materielle Punkte derart befestigt werden, dass ihr vereinigtcs Trägheitsmoment für ein von  $O$  aus auf  $OC$  errichtetes Loth gleich  $A$  ist. Diese Massenpunkte mögen sich mit der Axe herumdrehen. Die Bewegung der Axe ist durch die Winkelgeschwindigkeiten  $\omega_1, \omega_2$  gegeben und die Winkelbewegungsgrößen dieser Punkte um die Axen  $OA, OB$  sind daher offenbar  $A\omega_1, A\omega_2$ . Sie sind dieselben, wie die des Körpers. Die Winkelbewegungsgrösse der Punkte um

$OC$  ist offenbar Null. Die Winkelbewegungsgrößen des Körpers um  $OA$ ,  $OB$ ,  $OC$  sind mithin dieselben, wie die der Massenpunkte zusammen mit einem Moment  $C\omega_3$  um  $OC$ . Aus dem Parallelogrammgesetz folgt, dass dieselbe Gleichheit für alle Axen besteht.

Folglich ist die Winkelbewegungsgröße eines einaxigen Körpers um eine beliebige durch  $O$  gehende Axe dieselbe, wie die eines oder mehrerer derart an seiner Axe angebrachten Massenpunkte, dass ihr vereinigtes Trägheitsmoment für  $O$  gleich  $A$  ist, zusammen mit der Winkelbewegungsgröße  $C\omega_3$  um die Axe.

Ein einzelner materieller Punkt werde in einem Abstand vom Koordinatenanfang, welcher der Einheit gleich ist, auf die Axe des Körpers gesetzt. Seine Masse wird daher durch  $A$  dargestellt.  $(\xi \eta \zeta)$  seien die Coordinaten des materiellen Punktes, auf die Axen  $x, y, z$  bezogen, also auch die Richtungscosinusse der Axen. Die Winkelbewegungsgrößen um die Coordinatenachsen sind also

$$\begin{aligned} h_1 &= A \left[ \eta \frac{d\zeta}{dt} - \zeta \frac{d\eta}{dt} \right] + C\omega_3 \xi, \\ h_2 &= A \left[ \zeta \frac{d\xi}{dt} - \xi \frac{d\zeta}{dt} \right] + C\omega_3 \eta, \\ h_3 &= A \left[ \xi \frac{d\eta}{dt} - \eta \frac{d\xi}{dt} \right] + C\omega_3 \zeta. \end{aligned}$$

Wollen wir lieber  $\theta, \varphi, \psi$  statt der Richtungscosinusse  $\xi, \eta, \zeta$  benutzen, so setzen wir für  $\xi, \eta, \zeta$  ihre Werthe  $\xi = \sin \theta \cos \psi$ ,  $\eta = \sin \theta \sin \psi$ ,  $\zeta = \cos \theta$ . Die Substitution in die letzte Gleichung ist leicht auszuführen, wenn man sich an den Satz der Differenzialrechnung erinnert:  $\xi d\eta - \eta d\xi = r^2 d\psi$ . (Vergl. § 76.) Wir kommen so wieder zu denselben Ausdrücken für die Momente  $h_1, h_2, h_3$  wie zuvor.

Wenn der einaxige Körper kleine Schwingungen macht und die Axe  $OC$  der Axe  $Oz$  immer so nahe bleibt, dass man die Quadrate von  $\theta$  vernachlässigen kann, so ist

$$\begin{aligned} \xi &= \theta \cos \psi, & \eta &= \theta \sin \psi, & \zeta &= 1, \\ \left. \begin{aligned} h_1 &= -A \frac{d\eta}{dt} + C\omega_3 \xi \\ h_2 &= A \frac{d\xi}{dt} + C\omega_3 \eta \\ h_3 &= C\omega_3 \end{aligned} \right\} \end{aligned}$$

Diese Formeln für die Winkelbewegungsgrößen um die festen Axen sind sehr einfach.

Bewegt sich der Körper frei im Raum, so benutze man den Schwerpunkt statt des festen Punktes. Es ist dann am besten, an die Axe zwei gleiche materielle Punkte auf beiden Seiten und in gleichem Abstand vom Schwerpunkt so zu befestigen, dass der Schwerpunkt des gedachten Systems mit dem des Körpers zusammenfällt. Die Winkelbewegungsgröße des freien Körpers um irgend eine Gerade ist alsdann dieselbe, wie die des Punktesystems zusammen mit dem Paar  $C\omega_3$  um die Axe.

Beisp. 1. Ein Körper, der nicht nothwendigerweise einaxig zu sein braucht, dreht sich um einen festen Punkt  $O$ . Drei materielle Punkte werden in solchen Abständen  $a, b, c$  von  $O$  an die Hauptachsen befestigt, dass

$$Ma^2 = \frac{1}{2}(B + C - A), \quad Mb^2 = \frac{1}{2}(C + A - B), \quad Mc^2 = \frac{1}{2}(A + B - C)$$

ist. Man beweise, dass die Winkelbewegungsgröße des Körpers um eine beliebige durch  $O$  gehende Gerade derjenigen der Punkte gleich ist. Es folgt dies unmittelbar aus § 75.

Beisp. 2. Ein der Schwerkraft unterworfenen Stab wird gezwungen auf dem Mantel eines glatten Umdrehungskegels zu bleiben, dessen Spitze zugleich der Aufhängungspunkt des Stabes ist. Man zeige, dass die Winkelgeschwindigkeit des Stabes um die Axe des Kegels dieselbe ist, wie die eines einfachen Pendels von der Länge  $\frac{2}{3} \cdot a \frac{\sin \alpha}{\sin \beta}$ , wo  $a$  die Länge des Stabes,  $\alpha$  den halben Winkel an der Spitze des Kegels und  $\beta$  den Winkel bedeutet, den die Axe des Kegels mit der Verticalen macht. [St. John's Coll.]

Um die Momente der Effectivkräfte zu finden, vereinige man die Masse in einem Punkt gleichen Trägheitsmomentes und zur Ermittlung der Momente der gegebenen Kräfte im Schwerpunkt. Setzt man die Momente um die Axe des Kegels gleich, so ergibt sich das Resultat sofort.

Beisp. 3. Die Hauptträgheitsmomente eines Körpers für den festen Punkt  $O$ , um den er sich dreht, sind sämmtlich gleich.  $\theta, \varphi, \psi$  sind die Euler'schen Coordinaten der in dem Körper festliegenden Axen  $OA, OB, OC$ ; man zeige, dass die Winkelbewegungsgrößen um die im Raum festliegenden Axen bez.

$$h_1 = A \left( -\sin \psi \frac{d\theta}{dt} + \sin \theta \cos \psi \frac{d\varphi}{dt} \right),$$

$$h_2 = A \left( \cos \psi \frac{d\theta}{dt} + \sin \theta \sin \psi \frac{d\varphi}{dt} \right),$$

$$h_3 = A \left( \frac{d\psi}{dt} + \cos \theta \frac{d\varphi}{dt} \right)$$

sind.

§ 267. Beisp. 1. Die Bewegung eines Körpers ist durch die Translationsgeschwindigkeiten  $(u, v, w)$  des Schwerpunktes und die Winkelgeschwindigkeiten  $(\omega_x, \omega_y, \omega_z)$  gegeben; man beweise, dass die Winkelbewegungsgrösse um die Gerade  $\frac{x-f}{l} = \frac{y-g}{m} = \frac{z-h}{n}$  dem Ausdruck

$$lh_1 + mh_2 + nh_3 + M \begin{vmatrix} l, m, n \\ u, v, w \\ f, g, h \end{vmatrix}$$

gleich ist, worin  $M$  die Masse des Körpers bedeutet,  $h_1, h_2, h_3$  die in § 262 angegebenen Werthe haben und  $(l, m, n)$  die augenblicklichen Richtungscosinus der gegebenen Geraden sind.

Dies kann mit Hülfe des in § 74 bewiesenen Satzes geschehen. Die Winkelbewegungsgrösse um eine Parallele zu der gegebenen Axe ist offenbar  $lh_1 + mh_2 + nh_3$ ; alsdann hat man die Winkelbewegungsgrösse der ganzen im Schwerpunkt vereinigten Masse um die gegebene Gerade zu ermitteln und beide Resultate zu addiren.

$P$  (siehe die Figur S. 216) sei der Punkt  $(fgh)$ . Wir wollen zuerst die Winkelbewegungsgrösse um ein System von Axen suchen, die den gegebenen Coordinatenaxen parallel sind und  $P$  zum Anfang haben. Offenbar ist die Verlängerung von  $NP$  die neue  $z$ -Axe. Das Moment der Geschwindigkeit des Coordinatenanfangs  $O$  um  $NP$  ist, wie man sieht,  $u \cdot MN - v \cdot OM$ , was das Nämliche ist, wie  $ug - vf$ , und dreht in positiver Richtung um  $NP$ . Ebenso sind die Momente der Geschwindigkeiten von  $O$  um die zu  $x$  und  $y$  Parallelen  $vh - wg$  und  $wf - uh$ . Multiplicirt man diese drei Momente bez. mit  $(n, l, m)$ , so erhält man das Moment der Geschwindigkeit des Schwerpunktes um die Gerade. Multiplicirt man dieses mit  $M$ , so findet man die Winkelbewegungsgrösse der im Schwerpunkt vereinigten Masse. Das gesuchte Resultat ergibt sich daraus unmittelbar.



§ 267. Beisp. 2. Die Winkelbewegungsgrösse eines Körpers um die Momentanaxe und ebenso um eine Axe zu finden, welche die Momentanaxe rechtwinklig schneidet.

Nimmt man die Momentanaxe zur  $z$ -Axe, so kann man die in § 262 gegebenen Ausdrücke für  $h_1, h_2, h_3$  benutzen.

Im vorliegenden Fall ist  $\omega_x = 0, \omega_y = 0$  und  $\omega_z = \Omega$ , unter  $\Omega$  die resultirende Winkelgeschwindigkeit des Körpers verstanden. Die Winkelbewegungsgrössen um die  $x, y, z$ -Axen sind daher bez.

$$h_1 = -(\Sigma m x z) \Omega, \quad h_2 = -(\Sigma m y z) \Omega, \quad h_3 = \Sigma m (x^2 + y^2) \Omega.$$

Daraus folgt, dass die Winkelbewegungsgrösse um irgend eine auf der Momentanaxe  $Oz$  senkrechte Gerade  $Ox$  nur dann Null ist, wenn das Deviationsmoment für die beiden Axen Null ist.

Um sich dies vollständig klar zu machen, bedenke man, dass die Winkelgeschwindigkeiten  $\omega_x, \omega_y, \omega_z$  nur dazu benutzt wurden, die Bewegung des Körpers während der Zeit  $dt$  zu construiren. Ist  $Oz$  die Momentanaxe (vergleiche die Figur S. 216), so bewegt sich der in  $P$  liegende materielle Punkt des Körpers senkrecht zur Ebene  $PLO$ , die Richtung seiner Geschwindigkeit ist also nicht parallel zu  $Ox$  und schneidet auch  $Ox$  nicht. Die Geschwindigkeit des Punktes hat daher ein Moment um  $Ox$ , obwohl  $Ox$  senkrecht auf der Momentanaxe steht. Versteht man unter  $\theta$  den Winkel  $PMN$  und unter  $r$  die Gerade  $PM$ , so ist

$$r^2 \frac{d\theta}{dt} = y \frac{dz}{dt} - z \frac{dy}{dt} = r^2 \omega_x - xz \omega_z - xy \omega_y,$$

so dass also die Winkelgeschwindigkeit  $\frac{d\theta}{dt}$  des materiellen Punktes  $P$  um  $Ox$ , vorausgesetzt dass  $\omega_x = 0, \omega_y = 0$  ist, nur dann verschwindet, wenn der Punkt entweder in der  $xy$ - oder der  $yz$ -Ebene liegt.

Beisp. 3. Eine Gerade  $OL$  dreht sich um den festen Punkt  $O$  so, dass  $\frac{dh}{dt} = N$  ist, unter  $h$  die Winkelbewegungsgrösse eines Körpers um  $OL$  und unter  $N$  das Moment der gegebenen Kräfte verstanden. Man beweise, dass jeder Punkt von  $OL$  sich senkrecht zu der Ebene bewegt, die ihn und die resultirende Axe der Winkelbewegungsgrösse für  $O$  enthält.

Beisp. 4. Eine dreieckige Lamelle  $ACB$ , deren Masse  $M$  ist, dreht sich mit der Winkelgeschwindigkeit  $\omega$  um die Seite  $CA$ . Man zeige, dass die Winkelbewegungsgrösse um die Seite  $CB$  gleich  $\frac{1}{12} M ab \sin^2 C \omega$  ist, wenn  $a$  und  $b$  die Seiten sind, die den Winkel  $C$  einschliessen.

Beisp. 5. Zwei Stäbe  $OA, AB$  sind bei  $A$  durch ein Gelenk verbunden und an dem festen Punkt  $O$  aufgehängt. Das System dreht sich mit der Winkelgeschwindigkeit  $\omega$  um eine durch  $O$  gehende verticale Gerade so, dass die beiden Stäbe in einer verticalen Ebene liegen.  $\theta, \varphi$  sind die Neigungen der Stäbe gegen die Verticale,  $a, b$  ihre Längen,  $M, M'$  ihre Massen; man zeige, dass die Winkelbewegungsgrösse um die verticale Axe

$$\omega \left[ \left( \frac{1}{3} M + M' \right) a^2 \sin^2 \theta + M' ab \sin \theta \sin \varphi + \frac{1}{3} M' b^2 \sin^2 \varphi \right]$$

ist.

Beisp. 6. Einem graden Kegel, dessen Spitze  $O$  festliegt, wird die Winkelgeschwindigkeit  $\omega$  um seine Axe  $OC$  mitgetheilt, während seine Axe zugleich im Raum in Bewegung gesetzt wird. Der halbe Winkel an der Spitze des Kegels ist  $\frac{1}{4} \pi$  und seine Höhe  $h$ ,  $\theta$  die Neigung der Axe gegen eine feste Gerade  $Oz$  und  $\psi$  der Winkel, den die Ebene  $zOC$  mit einer durch  $Oz$  gehenden festen

Ebene macht. Man beweise, dass die Winkelbewegungsgrösse um  $Oz$  gleich  $\frac{3}{4} M h^2 \left( \sin^2 \theta \frac{d\psi}{dt} + \frac{2}{5} \omega \cos \theta \right)$  ist, unter  $M$  die Masse des Kegels verstanden.

Beisp. 7. Ein Stab  $AB$  ist mittelst eines Fadens an dem festen Punkt  $O$  aufgehängt und bewegt sich auf irgend eine Art.  $(l, m, n), (p, q, r)$  sind die Richtungscosinusse des Fadens und des Stabes in Bezug auf rechtwinklige Axen  $Ox, Oy, Oz$ ; man zeige, dass die Winkelbewegungsgrösse um die  $z$ -Axe

$$M b^2 \left( l \frac{dm}{dt} - m \frac{dl}{dt} \right) + M \frac{a^2}{3} \left( p \frac{dq}{dt} - q \frac{dp}{dt} \right) + M \frac{ab}{2} \left( p \frac{dm}{dt} - m \frac{dp}{dt} + l \frac{dq}{dt} - q \frac{dl}{dt} \right)$$

ist, wenn  $M$  die Masse des Stabes und  $a, b$  die Längen des Stabes und des Fadens bedeuten.

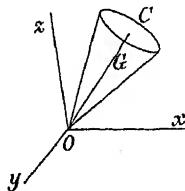
§ 268. Als Beispiel, wie diese Ausdrücke für die Winkelbewegungsgrösse eines Körpers anzuwenden sind, wollen wir sie zur Lösung zweier Probleme über die Bewegung eines Körpers im Raum von drei Dimensionen benutzen. Die Bezugsaxen liegen bei ihnen im Raum fest, die Benutzung beweglicher Axen behalten wir uns für später vor. Weiteres findet man in dem zweiten Band, in welchem ein ganzes Kapitel von Beispielen und Erläuterungen den verschiedenen Methoden zur Bestimmung der Bewegung der Körper im Raum von drei Dimensionen gewidmet ist.

## Bewegung eines Kreisels.

**Problem 1.** Ein einaxiger Kreisel dreht sich auf einem vollkommen rauhen Tisch derart, dass seine Axe nahezu vertical bleibt; man finde die kleinen Schwingungen des Kreisels<sup>1)</sup>.

$O$  sei die Spitze,  $OC$  die Axe des Kreisels.  $C$  und  $A$  seien die Trägheitsmomente für die Axe  $OC$  und ein durch  $O$  gehendes Loth auf  $OC$ . Da der Schwerpunkt  $G$  des Kreisels in seiner Axe liegt, so haben die gegebenen Kräfte kein Moment um  $OC$ . Es ist ferner  $A = B$  und daher nach Euler's dritter dynamischer Gleichung

$$C \frac{d\omega_s}{dt} = 0.$$



Die Winkelgeschwindigkeit des Kreisels um seine Axe bleibt daher immer dieselbe.  $\omega_s = n$  sei diese constante Winkelgeschwindigkeit.

$\xi, \eta, \zeta$  seien die Richtungscosinusse von  $OC$  in Bezug auf Axen, die im Raum festliegen, nämlich  $Ox, Oy, Oz$ , von denen  $Oz$  vertical ist. Da die Axe des Kegels stets nahezu vertical bleibt, so hat man  $\zeta = 1$ , während  $\xi, \eta$  kleine Grössen sind, deren Quadrate man vernachlässigen kann. Es sei  $l = OG$  und die Masse werde durch die Einheit dargestellt.

1) Die allgemeine Bewegung eines Kreisels unter der Wirkung der Schwere wird im zweiten Band besprochen werden. Die kleinen Schwingungen unsymmetrischer und geneigter Kreisel ebenso wie eine kurze historische Uebersicht findet man an derselben Stelle.

Die Momente der an  $G$  angreifenden Schwerkraft um die Axen findet man nach den gewöhnlichen Formeln

$$\begin{aligned} L &= yZ - zY = -gl\eta, \\ M &= zX - xZ = gl\xi, \end{aligned}$$

wobei  $X=0$ ,  $Y=0$ ,  $Z=-g$  die Componenten der Schwere sind. Die Winkelbewegungsgrößen des Körpers um dieselben Axen sind nach § 265

$$\begin{aligned} h_1 &= -A \frac{d\eta}{dt} + Cn\xi \\ h_2 &= A \frac{d\xi}{dt} + Cn\eta \end{aligned} \left. \vphantom{\begin{aligned} h_1 \\ h_2 \end{aligned}} \right\}.$$

Daraus folgt nach § 261

$$\begin{aligned} -A \frac{d^2\eta}{dt^2} + Cn \frac{d\xi}{dt} &= -gl\eta \\ A \frac{d^2\xi}{dt^2} + Cn \frac{d\eta}{dt} &= gl\xi \end{aligned} \left. \vphantom{\begin{aligned} -A \frac{d^2\eta}{dt^2} + Cn \frac{d\xi}{dt} \\ A \frac{d^2\xi}{dt^2} + Cn \frac{d\eta}{dt} \end{aligned}} \right\}.$$

Die Gleichung, die man aus der Winkelbewegungsgröße um die  $z$ -Axe erhält, zeigt nur wieder, dass  $\omega_z$  constant ist, was wir schon aus den Euler'schen Gleichungen abgeleitet haben.

Um die Gleichungen aufzulösen, setze man

$$\xi = P \cos(\mu t + f), \quad \eta = Q \sin(\mu t + f);$$

man findet durch Substitution dieser Werthe

$$\begin{aligned} (A\mu^2 + gl)Q - Cn\mu P &= 0 \\ Cn\mu Q - (A\mu^2 + gl)P &= 0 \end{aligned}$$

und daraus

$$A\mu^2 + gl = \pm Cn\mu.$$

Es ist nicht nöthig, beide Vorzeichen auf der rechten Seite zu nehmen. Wählen wir das eine, so besteht die Wirkung des andern nur darin, dass es das Vorzeichen von  $\mu$  und damit nur die bis jetzt unbestimmten Constanten  $Q$  und  $f$  ändert. Ohne Einbusse an Allgemeinheit können wir daher *das obere Zeichen* wählen. Dadurch werden die beiden resultirenden Werthe von  $\mu$  positiv und  $P=Q$ . Die Werthe von  $\mu$  sind

$$\mu = \frac{Cn}{2A} \pm \frac{(C^2n^2 - 4gAl)^{\frac{1}{2}}}{2A}.$$

Bezeichnet man sie mit  $\mu_1$  und  $\mu_2$ , so erhält man

$$\begin{aligned} \xi &= P_1 \cos(\mu_1 t + f_1) + P_2 \cos(\mu_2 t + f_2), \\ \eta &= P_1 \sin(\mu_1 t + f_1) + P_2 \sin(\mu_2 t + f_2), \end{aligned}$$

worin  $P_1$ ,  $P_2$ ,  $f_1$ ,  $f_2$  vier Constante sind, die durch die Anfangswerthe von  $\xi$ ,  $\eta$ ,  $\frac{d\xi}{dt}$ ,  $\frac{d\eta}{dt}$  bestimmt werden. Die Anfangswerthe der Coordinaten wollen wir durch den Index Null darstellen. Es wird dann

$$\begin{aligned} \xi_0 &= P_1 \cos f_1 + P_2 \cos f_2, \\ \eta_0 &= P_1 \sin f_1 + P_2 \sin f_2, \\ -\frac{d\xi_0}{dt} &= P_1 \mu_1 \sin f_1 + P_2 \mu_2 \sin f_2, \\ \frac{d\eta_0}{dt} &= P_1 \mu_1 \cos f_1 + P_2 \mu_2 \cos f_2. \end{aligned}$$

Daraus folgt

$$\begin{aligned} P_1^2 (\mu_1 - \mu_2)^2 &= \left( \frac{d\eta_0}{dt} - \mu_2 \xi_0 \right)^2 + \left( \frac{d\xi_0}{dt} + \mu_2 \eta_0 \right)^2 \\ P_2^2 (\mu_1 - \mu_2)^2 &= \left( \frac{d\eta_0}{dt} - \mu_1 \xi_0 \right)^2 + \left( \frac{d\xi_0}{dt} + \mu_1 \eta_0 \right)^2 \end{aligned}$$

Sind  $\theta, \psi$  die Winkelkoordinaten der Axe, so erhält man

$$\begin{aligned} 0^2 &= \xi^2 + \eta^2 = P_1^2 + P_2^2 + 2P_1P_2 \cos[(\mu_1 - \mu_2)t + f_1 - f_2], \\ \theta^2 \frac{d\psi}{dt} &= \xi \frac{d\eta}{dt} - \frac{d\xi}{dt} \eta = P_1^2 \mu_1 + P_2^2 \mu_2 + P_1P_2 (\mu_1 + \mu_2) \cos[(\mu_1 - \mu_2)t + f_1 - f_2]. \end{aligned}$$

Nimmt man an,  $P_1$  und  $P_2$  wären einander nicht gleich, so kann, wie man sieht,  $\theta$  niemals verschwinden, d. h. die Axe des Kreisels kann niemals genau vertical werden. Ebenso kann  $\frac{d\psi}{dt}$  nur dann verschwinden, wenn  $P_1P_2(\mu_1 + \mu_2)$  grösser als  $P_1^2\mu_1 + P_2^2\mu_2$  ist, d. h. die Ebene  $ZOC$  dreht sich um  $OZ$  entweder mit zeitweisen Umkehrungen der Richtung oder immer in derselben Richtung, je nachdem  $\frac{P_1}{P_2}$  zwischen  $\frac{\mu_2}{\mu_1}$  und der Einheit liegt oder nicht.

Soll  $P_1 = P_2$  sein, so muss Anfangs

$$2 \left( \xi \frac{d\eta}{dt} - \frac{d\xi}{dt} \eta \right) = (\mu_1 + \mu_2) (\xi^2 + \eta^2)$$

sein. Dies erfordert, dass  $\frac{d\psi}{dt}$  Anfangs von  $\frac{1}{2}(\mu_1 + \mu_2)$  um kleine Grössen von der Ordnung  $P$  differirt. Alsdann behält  $\frac{d\psi}{dt}$  während der Bewegung sein Vorzeichen und die Axe wird in constanten Intervallen  $\frac{2\pi}{\mu_1 - \mu_2}$  vertical.

Wir haben angenommen, die Werthe von  $\mu$  seien sowohl reell als ungleich. Ist der Werth von  $n$  so klein, dass die Werthe von  $\mu$  imaginär werden, so enthalten die Werthe von  $\xi$  und  $\eta$  reelle Exponentialgrössen. Alsdann bleiben diese Werthe im Allgemeinen nicht klein. Es zeigt dies an, dass der Kreisel nicht so schnell um seine Axe rotirt, dass die Axe vertical bleiben könnte. Er verlässt seine Anfangslage.

Ist  $C^2n^2 = 4gAl$ , so sind die beiden Werthe von  $\mu$  reell und gleich. Alsdann wird, wie man leicht sieht, den Gleichungen durch

$$\begin{aligned} \xi &= P_1 \cos(\mu t + f_1) + P_2 t \cos(\mu t + f_2), \\ \eta &= P_1 \sin(\mu t + f_1) + P_2 t \sin(\mu t + f_2) \end{aligned}$$

genügt, so dass also die Bewegung im Allgemeinen unstabil ist. Die Axe des Kreisels kann nur dann nahezu vertical bleiben, wenn die Anfangsbedingungen derart sind, dass  $P_2 = 0$  ist.

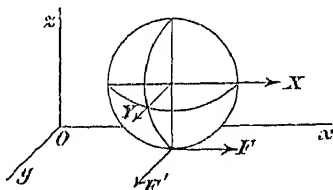
Beisp. Ein einaxiger Körper rotirt um seine Axe mit der Winkelgeschwindigkeit  $n$ . Zwei unausdehnbare Fäden sind an zwei Punkten der Axe in gleichen Abständen  $b$  von dem Schwerpunkt  $G$  des Körpers befestigt. Die andern Enden der Fäden werden an zwei im Raum festliegende Punkte geheftet. Die Länge eines jeden Fadens ist  $a$  und seine Spannung  $T$ . Die Masse des Körpers ist die Einheit. Man beweise, dass die Periode  $\frac{2\pi}{p}$  der Linearschwingungen von  $G$  durch

$ap^2 = 2T$ , die Perioden  $\frac{2\pi}{q}$  der Winkelschwingungen der Axe dagegen durch

$Aq^2 - Cnq = 2T(a + b)\frac{b}{a}$  gegeben sind.

## Bewegung einer Kugel.

§ 269. **Problem 2.** Die Bewegung einer Kugel auf einer vollkommen rauhen Ebene zu finden.



Die Ebene möge die  $xy$ -Ebene sein und  $F, F'$  die Componenten der Reibung am Berührungspunkt parallel diesen Axen.  $X, Y$  seien die Componenten der gegebenen Kräfte, die am Mittelpunkt angreifen sollen.  $a$  sei der Radius der Kugel,  $k$  der Trägheitsradius für einen Durchmesser und ihre Masse sei die Einheit.

Die Winkelbewegungsgrößen um die der  $x$ - und  $y$ -Achse parallelen Durchmesser sind  $k^2 \omega_1$  und  $k^2 \omega_2$ . Diese Richtungen liegen im Raum fest; nach § 77 oder § 161 ist daher

$$k^2 \frac{d\omega_1}{dt} = F' a, \quad k^2 \frac{d\omega_2}{dt} = -F a.$$

Sind  $u$  und  $v$  die Geschwindigkeiten des Schwerpunktes parallel den Axen, so ist ferner

$$\frac{du}{dt} = X + F, \quad \frac{dv}{dt} = Y + F'$$

und da der Berührungspunkt der Kugel und der Ebene nicht gleitet,

$$u - a\omega_2 = 0, \quad v - a\omega_1 = 0.$$

Durch Elimination von  $F, F', \omega_1$  und  $\omega_2$  ergibt sich

$$\frac{du}{dt} = \frac{a^2}{a^2 + k^2} X, \quad \frac{dv}{dt} = \frac{a^2}{a^2 + k^2} Y.$$

Es sind dies die Bewegungsgleichungen einer Kugel, die sich wie ein materieller Punkt ohne Rotation auf einer glatten Ebene unter der Wirkung derselben, aber im Verhältniss von  $a^2$  zu  $a^2 + k^2$  reducirten Kräfte bewegt. Da  $k^2 = \frac{2}{5} a^2$  ist, so lässt sich dies so aussprechen:

*Wenn eine homogene Kugel unter der Wirkung ganz beliebiger Kräfte, deren Resultante durch das Centrum der Kugel geht, auf einer vollkommen rauhen festen Ebene rollt, so ist die Bewegung des Centrums dieselbe als ob die Ebene glatt wäre und sämtliche Kräfte auf fünf Siebentel ihres früheren Werths reducirt würden<sup>1)</sup>.*

Beisp. 1. Die Ebene ist nicht vollkommen rau, der Reibungscoefficient jedoch grösser als  $\frac{2R}{7Z}$ , unter  $R$  die resultirende gegebene Kraft parallel zur Ebene und unter  $Z$  die Normalkraft verstanden. Man beweise, dass die Reibung immer gross genug ist, um die Kugel vor dem Gleiten zu bewahren.

Beisp. 2. Eine Kugel wird auf eine schiefe Ebene gesetzt, die rau genug ist, um Gleiten zu verhüten und ihr eine Geschwindigkeit in irgend einer Richtung mitgetheilt. Man zeige, dass ihr Mittelpunkt eine Parabel beschreibt. Wenn  $V$  die horizontale Anfangsgeschwindigkeit des Mittelpunktes und  $\alpha$  die Neigung der Ebene gegen den Horizont bedeutet, so ist der Parameter  $\frac{14}{5} \frac{V^2}{g \sin \alpha}$ .

1) Dieser Satz wurde von dem Verfasser als Problem in den Mathematical Tripos, 1860 gegeben; siehe die Lösungen von diesem Jahr. Einen andern Beweis findet man im 2. Band, aus welchem sich auch der entsprechende Satz für den Fall ergibt, in welchem die Kugel auf einer andern Kugel rollt.

Beisp. 3. Eine homogene Kugel rollt auf einer vollkommen rauhen Ebene unter der Wirkung einer Kraft, die dem Quadrat des Abstandes von einem Punkt in der Ebene, in der sich das Centrum bewegt, umgekehrt proportional ist. Man beweise, dass ihr Centrum einen Kegelschnitt beschreibt und dass, wenn die Kugel in dem Augenblick, in welchem der Abstand ihres Centrums von dem Sitz der Kraft ein Viertel der Hauptaxe der Bahn wird, an einen glatten Theil der Ebene kommt, die Hauptaxe der Bahn plötzlich in dem Verhältniss 7 : 13 reducirt wird.

[Trin. Coll.]

Beisp. 4. Eine homogene Kugel bewegt sich ohne Rotation unter der Wirkung einer Centralkraft derart auf einer glatten horizontalen Ebene, dass das Centrum der Kugel eine Ellipse beschreibt, in deren Brennpunkt sich der Sitz der Kraft befindet. Die Kugel gelangt an einen Theil der Ebene, der vollständig rauh ist, zu einer Zeit, zu welcher der Abstand ihres Centrums von dem Sitz der Kraft  $\frac{1}{n}$  tel der grossen Axe ihrer Bahn ist; man zeige, dass die grosse Axe in dem Verhältniss 7 : 5 + 2n kleiner wird. Kommt die Kugel wieder an den glatten Theil der Ebene, wenn der Abstand ihres Centrums von dem Brennpunkt derselbe Theil der grossen Axe ist, wie zuvor, so wird die Länge der grossen Axe wieder in demselben Verhältniss vermindert.

Beisp. 5. Zwei Kugeln von gleichem Volumen, aber verschiedenen Massen, ziehen sich nach dem Newton'schen Gesetz an und rollen auf einer rauhen Ebene. Man zeige, dass beide in Bezug auf ihren gemeinschaftlichen Schwerpunkt Ellipsen beschreiben, die diesen Punkt zu einem Brennpunkt haben.

§ 270. In der Regel werden die Hauptaxen zu Bezugsaxen gewählt, weil die Momente der Effectivkräfte für sie äusserst einfach sind. Die etwas langen Gleichungen in § 252 reduciren sich auf die einfache Euler'sche Gestalt, wenn man sie auf die Hauptaxen bezieht. Manchmal jedoch ist es von Vortheil, andre Axen zu wählen, falls diese den geometrischen Bedingungen des Problems besser entsprechen. Die Discussion solcher Axen behalten wir uns für den zweiten Theil vor. Wenn aber die Bewegung stetig ist, die Winkelgeschwindigkeiten also constant sind, so nehmen die Gleichungen in § 252 auch ohne Reduction manchmal eine so einfache Form an, dass sie ohne Schwierigkeit aufzulösen sind.

Beisp. *Ein schwerer Körper ist mittelst zweier Gelenke an eine horizontale Axe befestigt, um welche er sich frei drehen kann. Die Axe lässt man mit gleichförmiger Winkelgeschwindigkeit  $\omega$  um eine verticale, sie im Punkt O schneidende Gerade rotiren. Man soll finden, unter welchen Bedingungen der Körper einen constanten Winkel mit der Verticalen macht.*

Die horizontale im Körper befestigte Axe nehme man zur  $z$ -Axe. Die Verticale liegt dann in der  $xy$ -Ebene und möge mit der  $x$ - bez.  $y$ -Axe die Winkel  $\theta$  und  $\frac{1}{2}\pi - \theta$  machen. Das ganze System dreht sich um die Verticale mit der Winkelgeschwindigkeit  $\omega$ . Durch Zerlegung erhält man daher  $\omega_x = \omega \cos \theta$ ,  $\omega_y = \omega \sin \theta$ ,  $\omega_z = 0$ . Da diese Winkelgeschwindigkeiten constant sind, so wird die allgemeine Momentengleichung des § 252

$$-\Sigma mxy(\omega_x^2 + \omega_y^2) + \Sigma m(x^2 + y^2)\omega_x\omega_y = N.$$

Um  $N$  zu finden, zerlegen wir das Gewicht  $Mg$  parallel zu den Axen; es ist dann  $X = -Mg \cos \theta$ ,  $Y = -Mg \sin \theta$ ,  $Z = 0$ , und wenn  $(x, y, z)$  die Coordinaten des Schwerpunktes sind,  $N = xY - yX$ . Die gesuchte Beziehung zwischen  $\omega$  und  $\theta$  ist daher

$$\omega^2 \left[ \cos 2\theta \Sigma mxy - \frac{1}{2} \sin 2\theta \Sigma m(x^2 - y^2) \right] = Mg(x \sin \theta - y \cos \theta).$$

Die Integrale  $\Sigma mxy$  und  $\Sigma m(x^2 - y^2)$  kann man durch die Trägheits- und Deviationsmomente des Körpers auf die gewöhnliche Art ausdrücken.

Probleme über gleichförmige Bewegung lassen sich oft leicht durch directe Anwendung des D'Alembert'schen Principis lösen. So beschreibt in dem eben besprochenen Problem jedes Element des Körpers mit gleichförmiger Winkelgeschwindigkeit einen horizontalen Kreis, dessen Mittelpunkt in der verticalen Axe liegt. Ist  $r$  der Radius des Kreises, so hat die Effectivkraft  $m\omega^2 r$ , die an dem Element angreift, die Richtung des Radius. Der Körper lässt sich daher so ansehen, als ob er im Gleichgewicht wäre unter der Wirkung seines Gewichtes und eines Systems von Kräften, die direct von der verticalen Axe aus wirken und dem Abstand von dieser Axe proportional sind. Die oben gefundene Gleichung erhält man, wenn man die Momente um  $Oz$  nimmt.

Beisp. 1. Wird dem Körper ein Stoss in der Richtung der  $z$ -Axe gegeben und lässt man ihn um die Verticale mit derselben Winkelgeschwindigkeit, wie zuvor, rotiren, so hat dies, wie man zeigen möge, keinen Einfluss auf die Neigung des Körpers gegen die Verticale.

Beisp. 2. Der Körper sei eine schwere Scheibe, die sich um eine horizontale in ihrer Ebene liegende Axe  $Oz$  drehen kann; man zeige, dass die Ebene der Scheibe vertical steht, solange  $h^2\omega^2$  nicht grösser als  $gh$  wird, unter  $h$  den Abstand des Schwerpunktes der Scheibe von  $Oz$  und unter  $h$  den Trägheitsradius für  $Oz$  verstanden.

Beisp. 3. Wenn der Körper eine kreisförmige Scheibe ist, die sich um eine horizontale auf ihrer Ebene senkrechte und ihren Umfang schneidende Axe drehen kann, so lässt sich zeigen, dass die Winkelgeschwindigkeit  $\omega$ , wenn  $\theta$  den Winkel bedeutet, den die Tangente an die Scheibe bei dem Gelenk mit der Verticalen macht, durch  $\omega^2 a \sin \theta = g$  gegeben ist.

Beisp. 4. Zwei gleiche Bälle  $A$  und  $B$  werden an die Enden zweier gleicher dünner Stäbe  $Aa$ ,  $Bb$  befestigt. Die Enden  $a$  und  $b$  sind durch Gelenke mit einem festen Punkt  $O$  verbunden und das Ganze wird um eine verticale durch  $O$  gehende Axe, wie bei dem Regulator einer Dampfmaschine, in Rotation gesetzt. Wenn die Masse der Stäbe vernachlässigt wird, zu zeigen, dass die Rotationszeit der Schwingungsdauer eines Pendels gleichkommt, dessen Länge der verticale Abstand jeder Kugel von den Gelenken bei  $O$  ist.

Beisp. 5. Wenn in dem vorigen Beispiel  $m$  die Masse eines jeden dünnen Stabes,  $M$  die einer Kugel,  $l$  die Länge eines Stabes,  $r$  der Radius einer Kugel,  $h$  die Tiefe eines jeden Mittelpunktes unter dem Gelenk bedeutet, so ist die Länge des Pendels

$$\frac{h}{l+r} \frac{M(l+r)^2 + \frac{1}{3} ml^2}{M(l+r) + \frac{1}{2} ml}.$$

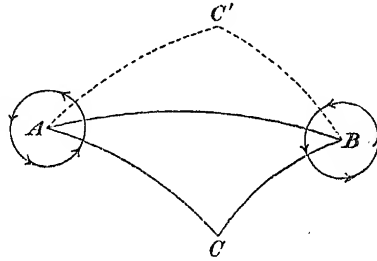
## Endliche Rotationen.

§ 271. Sind die Rotationen, welche zusammenzusetzen sind, ihrer Grösse nach endlich, so ist das Verfahren zur Ermittlung ihrer Resultanten etwas complicirt. Wie schon in § 229 erwähnt wurde, sind solche Rotationen in der Dynamik der Systeme starrer Körper nicht von grosser Bedeutung. Wir wollen daher nur einige Sätze kurz erwähnen, welche dieselben für den Fall unendlich kleiner Bewegung schon besprochenen Sätze in besseres Licht zu setzen im Stande sind. Wir beginnen mit dem Satz, der dem Parallelogramm der Winkelgeschwindigkeiten entspricht.

**Der Satz von Rodriguez.** *Ein Körper erleidet nacheinander zwei Rotationen, 1) eine Rotation um eine Axe  $OA$  von der Amplitude  $\theta$ , 2) eine darauf folgende Rotation um eine Axe  $OB$  von der Amplitude  $\theta'$ ; die beiden Axen liegen im Raum fest. Man soll die Rotationen zusammensetzen.*

Die auf  $OA, OB$  aufgetragenen Längen sollen diese Rotationen auf die in § 231 erklärte Art darstellen.

Die Richtungen der Axen  $OA, OB$  mögen eine Kugel, deren Centrum in  $O$  liegt, in  $A$  und  $B$  treffen. Auf dieser Kugel trage man an  $BA$  in der der Rotation um  $OA$  entgegengesetzten Richtung den Winkel  $BAC$  gleich  $\frac{1}{2}\theta$  an und ebenso den Winkel  $ABC$  gleich  $\frac{1}{2}\theta'$ , doch in derselben Rich-



tung, in der die Rotation um  $OB$  erfolgt und die Bogen mögen sich in  $C$  schneiden. Schliesslich trage man noch die Winkel  $BAC'$  und  $ABC'$  gleich  $BAC$  bez.  $ABC$  auf der andern Seite von  $AB$  auf.

Die Rotation  $\theta$  um  $OA$  bringt jeden Punkt  $P$  in  $OC$  in die Gerade  $OC'$  und die folgende Rotation  $\theta'$  um  $OB$  bringt den Punkt  $P$  wieder zurück nach  $OC$ . Die Punkte von  $OC$  sind daher nach der doppelten Rotation in ihrer früheren Lage und  $OC$  ist deshalb die Axe der einzelnen Rotation, durch welche die gegebene Verrückung des Körpers sich herstellen lässt. Die Gerade  $OC$  heisst die resultirende Rotationsaxe. Wird die Reihenfolge der Rotationen umgekehrt, so dass der Körper zuerst um  $OB$  und dann um  $OA$  rotirt, so würde  $OC'$  die resultirende Axe sein. Liegen die Axen  $OA, OB$  in dem Körper fest, so würde die Rotation  $\theta$  um  $OA$  die Axe  $OB$  in eine Lage  $OB'$  bringen. Der Körper kann dann von seiner ersten in seine letzte Lage durch die Rotationen  $\theta, \theta'$  um die im Raum festliegenden Axen  $OA, OB'$  gebracht werden. Dieselbe Construction liefert mithin wieder die Lage der resultirenden Axe und die Rotation um sie.

Um die Grösse  $\theta''$  der Rotation um die resultirende Axe  $OC$  zu finden, bemerken wir, dass ein in  $OA$  angenommener Punkt  $P$  durch die Rotation  $\theta$  um  $OA$  nicht in Bewegung gesetzt wird und durch die darauf folgende Rotation  $\theta'$  um  $OB$  in eine solche Lage  $P'$  kommt, dass  $PP'$  durch die Ebene  $OBC$  rechtwinklig halbt wird. Die Rotation  $\theta''$  um  $OC$  muss aber dem Punkt  $P$  dieselbe Verschiebung geben; daher ist für den Normalfall  $\theta''$  das Doppelte des Aussenwinkels zwischen den Ebenen  $OCA$  und  $OCB$ . Wird die Folge der Rotationen umgekehrt, so ist die Rotation um die resultirende Axe  $OC'$  das Doppelte des Aussenwinkels bei  $C'$ , welcher dem bei  $C$  gleich ist. Obwohl also die Lage der resultirenden Rotationsaxe von der Folge der Rotationen abhängt, so ist doch die resultirende Rotationswinkel von ihr unabhängig.

§ 272. Eine Rotation, deren Amplitude das Doppelte eines Innenwinkels des sphärischen Dreiecks  $ABC$  beträgt, ist der Rotation gleich und gesetzt, deren Amplitude das Doppelte des zu ihm gehörigen Aussenwinkels beträgt. Denn da die Summe der beiden Winkel  $\pi$  ist, so unterscheiden sich die Rotationen nur durch  $2\pi$  und es leuchtet ein, dass eine Rotation um einen Winkel  $2\pi$  die Lage eines Punktes des Körpers nicht ändern kann. Es ist dies nur eine andre Art den Satz auszusprechen, dass ein Körper, der sich um eine feste Axe dreht, von einer gegebenen Lage in eine andre durch Drehung um die Axe sowohl in der einen als der andern Richtung gebracht werden kann.

§ 273. Dem Satz über die Zusammensetzung endlicher Rotationen kann man folgende Fassung geben:



Ist  $ABC$  ein sphärisches Dreieck, so ist eine Rotation um  $OA$  von  $C$  nach  $B$  hin von der Amplitude gleich dem doppelten inneren Winkel bei  $A$ , gefolgt von einer Rotation um  $OB$  von  $A$  nach  $C$  hin von einer Amplitude gleich dem doppelten inneren Winkel bei  $B$  der Rotation um  $OC$  von  $B$  nach  $A$  hin, deren Amplitude dem doppelten inneren Winkel bei  $C$  gleichkommt, gleich und entgegengesetzt.

Man merke, dass die Reihenfolge, in welcher die Axen zu nehmen sind, bei dem Umgang um das Dreieck den Rotationen entgegengesetzt ist.

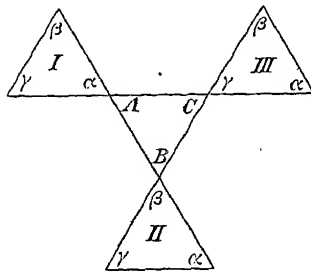
Da die Beweise des § 271 in ihren Grundzügen von Rodriguez herrühren, so hat man dem Satz seinen Namen gegeben. Die Abhandlung von Rodriguez findet man im 5. Band von Liouville's Journal, 1840.

Beisp. Wenn zwei Rotationen  $\theta, \theta'$  um zwei Axen  $OA, OB$ , die senkrecht aufeinander stehen, zu einer einzigen Rotation  $\varphi$  um die Axe  $OC$  vereinigt werden, so ist

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} COA &= \operatorname{tg} \frac{\theta'}{2} \operatorname{cosec} \frac{\theta}{2}, & \operatorname{tg} COB &= \operatorname{tg} \frac{\theta}{2} \operatorname{cosec} \frac{\theta'}{2} \quad \text{und} \\ \cos \frac{\varphi}{2} &= \cos \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta'}{2}. \end{aligned}$$

§ 274. Der Sylvester'sche Satz. Aus dem Satz von Rodriguez lässt sich sich der Sylvester'sche dadurch ableiten, dass man das Polardreieck  $A'B'C'$  zieht. Da die Seite  $B'C'$  das Supplement des Winkels  $A$  ist, so unterscheidet sich eine der Richtung und Grösse nach durch  $2B'C'$  dargestellte Rotation von der durch  $2A$  in der entgegengesetzten Richtung dargestellten durch eine Rotation von der Amplitude  $2\pi$ . Eine Rotation  $2\pi$  kann aber die Lage des Körpers nicht ändern, daher sind die beiden Rotationen  $2B'C'$  und  $2A$  der Grösse nach äquivalent, dagegen der Richtung nach entgegengesetzt. Ist daher  $A'B'C'$  ein beliebiges sphärisches Dreieck, so bewirkt eine Rotation zweimal  $B'C'$ , gefolgt von einer Rotation zweimal  $C'A'$ , dieselbe Verrückung des Körpers wie eine Rotation zweimal  $B'A'$ . Unter einer Rotation  $B'C'$  versteht man dabei eine Rotation um eine zur Ebene  $B'C'$  senkrechte Axe, die den Punkt  $B'$  nach  $C'$  bringt.

§ 275. Den folgenden Beweis des vorstehenden Satzes hat Prof. Donkin in dem *Phil. Mag.* für 1851 gegeben.  $ABC$  sei ein beliebiges Dreieck auf einer im Raum festliegenden Kugel,  $\alpha\beta\gamma$  ein Dreieck auf einer gleichen und concentrischen Kugel, die sich um ihren Mittelpunkt bewegen kann. Die Seiten und Winkel von  $\alpha\beta\gamma$  sind denen von  $ABC$  gleich, aber anders angeordnet, indem das eine Dreieck das umgekehrte oder Bild des andern ist. Wird das Dreieck  $\alpha\beta\gamma$  in die Lage  $I$  gebracht, so dass die den Winkel  $\alpha$  enthaltenden Seiten in denselben grössten Kreisen mit den den Winkel  $A$  enthaltenden liegen, so kann es offenbar längs  $AB$  in die Lage  $I$  und dann längs  $BC$  in die Lage  $III$  gleiten und kann ebenso auch durch Gleiten längs  $AC$  in diese letztere Lage gebracht werden.  $\alpha\beta\gamma$  aber längs  $AB$  gleiten lassen ist äquivalent damit, sowohl  $\beta$  als  $\alpha$  längs eines Bogens, der doppelt so gross als  $AB$  ist, um eine auf die Ebene  $AB$  senkrechte Axe bewegen. Dasselbe gilt, wenn das Dreieck längs  $BC$  oder  $AC$  gleitet. Zweimal die Rotation  $AB$ , gefolgt von zweimal der Rotation  $BC$ , bewirkt mithin dieselbe Verrückung wie zweimal die Rotation  $AC$ .



$AB$  gleiten lassen ist äquivalent damit, sowohl  $\beta$  als  $\alpha$  längs eines Bogens, der doppelt so gross als  $AB$  ist, um eine auf die Ebene  $AB$  senkrechte Axe bewegen. Dasselbe gilt, wenn das Dreieck längs  $BC$  oder  $AC$  gleitet. Zweimal die Rotation  $AB$ , gefolgt von zweimal der Rotation  $BC$ , bewirkt mithin dieselbe Verrückung wie zweimal die Rotation  $AC$ .

§ 276. Rotationspaare. Sollen die Rotationen um zwei parallele Axen zu einer einzigen zusammengesetzt werden, so bedarf das Verfahren von Rodriguez nur einer ge-

ringen Aenderung. Statt Bogen auf einer Kugel zu ziehen, lege man Ebenen durch die Axen, welche mit der die beiden Axen enthaltenden Ebene dieselben Winkel wie zuvor machen. Ihre Durchschnittslinie ist die resultirende Axe. Ein specieller Fall verdient Beachtung. Wenn  $\theta = -\theta'$  ist, so liegt die resultirende Axe im Unendlichen. Eine Rotation um eine im Unendlichen liegende Axe ist aber offenbar eine Translation. Eine Rotation  $\theta$  daher um eine Axe  $OA$ , gefolgt von einer gleichen und entgegengesetzten Rotation um eine parallele Axe  $O'B$ , im Abstand  $a$  von  $OA$ , ist einer Translation  $2a \sin \frac{1}{2} \theta$  äquivalent, welche die Richtung der Sehne des von einem beliebigen Punkt in  $OA$  beschriebenen Bogens hat und senkrecht auf der Ebene steht, die durch  $OA$  geht und mit der die Axen enthaltenden Ebene den Winkel  $\frac{1}{2} \theta$  macht. Dies folgt auch auf einfache Art aus § 223.

§ 277. *Conjugirte Rotationen.* Jede gegebene Verrückung eines Körpers lässt sich durch zwei endliche Rotationen darstellen, von denen die eine um eine beliebige gegebene Gerade und die andre um eine zweite Gerade stattfindet, welche die erste nicht nothwendigerweise schneiden muss. Wenn eine Verrückung so dargestellt wird, so heissen die Axen *conjugirte Axen* und die Rotationen *conjugirte Rotationen*.

$OA$  sei die gegebene Gerade und die gegebene Verrückung sei durch die Rotation  $\varphi$  um eine Gerade  $OR$  und die Translation  $OT$  dargestellt. Wir wünschen die Rotation um  $OR$  in zwei Rotationen zu zerlegen, eine um  $OA$ , die andere auf sie folgende um  $OB$ , wenn  $OB$  eine auf  $OT$  senkrechte Gerade ist. Zu diesem Zweck verfahren wir, wie in § 271 und beschreiben eine Kugel, deren Mittelpunkt  $O$  und Radius die Einheit ist.  $OA, OR, OT$  mögen sie in  $A, R, T$  schneiden. Den Winkel  $ARB$  machen wir dem Supplementwinkel von  $\frac{\varphi}{2}$

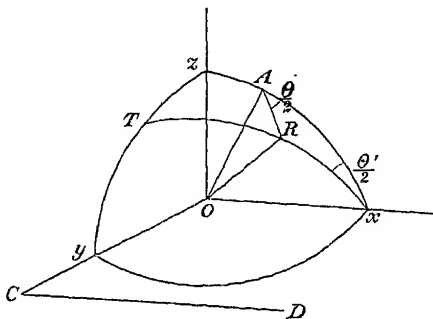
gleich, verlängern  $RB$  nach  $B$ , so dass  $TB = \frac{\pi}{2}$  ist und verbinden  $A$  und  $B$ . Nach dem Sylvester'schen Satz wird nun die Rotation  $\varphi$  durch eine Rotation um  $OA$ , die wir  $\theta$  nennen wollen, und die darauf folgende um  $OB$ , die  $\theta'$  heissen mag, dargestellt.

Nach § 276 ist die Rotation  $\theta'$  einer gleichen Rotation  $\theta'$  um eine parallele Axe  $CD$  zusammen mit einer Translation äquivalent, welche man so einrichten kann, dass sie die Translation  $OT$  aufhebt. Dieser Fall tritt ein, wenn der Winkel, den  $OT$  mit der Ebene von  $OB, CD$  macht,  $\frac{1}{2}(\pi - \theta')$  ist und auf der einen oder andern Seite von  $OT$  je nach der Richtung der Rotation liegt und wenn der Abstand  $r$  zwischen  $OB$  und  $CD$  derart ist, dass  $2r \sin \frac{1}{2} \theta' = OT$  ist.

Auf diese Art ist die ganze Verrückung auf die Rotation  $\theta$  um  $OA$ , gefolgt von der Rotation  $\theta'$  um  $CD$  reducirt worden.

§ 278. *Zusammensetzung von Schraubenbewegungen.* Zwei aufeinander folgende Verrückungen eines Körpers kann man durch zwei successive Schraubenbewegungen darstellen. Man soll diese zusammensetzen.

Der Körper möge zuerst eine Rotation  $\theta$  um die Axe  $OA$  mit der Translation  $a$  und dann die Rotation  $\theta'$  um  $CD$  mit der Translation  $a'$  haben.  $OC$  sei der kürzeste Abstand zwischen  $OA$  und  $CD$  und möge der leichteren Darstellung wegen die  $y$ -Axe sein.  $O$  sei der



Coordinatenanfang und die  $x$ -Axe parallel zu  $CD$ , so dass also  $OA$  in der  $xz$ -Ebene liegt. Es sei  $OC = r$  und der Winkel  $AOx = \alpha$ . Man ziehe die Ebene  $xOT$  so, dass sie mit der  $xz$ -Ebene den Winkel  $\frac{1}{2}\theta'$  macht; sie schneide die  $yz$ -Ebene in  $OT$ . Ferner ziehe man eine zweite Ebene  $AOR$ , die mit der  $xz$ -Ebene den Winkel  $\frac{1}{2}\theta$  macht und die Ebene  $xOT$  in  $OR$  schneidet.

Man verlängere  $AO$  bis zu einem in der Figur nicht angegebenen Punkt  $P$ , so dass  $PO = a$  ist, und  $P$  sei der Reductionspunkt, auf welchen die ganze Verrückung des Körpers bezogen wird. Die Rotation  $\theta'$  ist einer Rotation  $\theta$  um  $Ox$  zusammen mit einer Translation  $2r \sin \frac{1}{2}\theta'$  längs  $OT$  nach § 223 äquivalent. Nach § 271 ist die Rotation  $\theta$  um  $OA$ , gefolgt von  $\theta'$  um  $Ox$  gleichwerthig mit der Rotation  $\Omega$  um  $OR$ , wenn  $\Omega$  der doppelte Winkel  $ART$  ist, so dass

$$\sin \frac{1}{2}\Omega = -\cos \frac{1}{2}\theta \cos \frac{1}{2}\theta' + \sin \frac{1}{2}\theta \sin \frac{1}{2}\theta' \cos \alpha$$

ist. Die ganze Verrückung wird nun dargestellt durch (1) eine Translation des Reductionspunktes  $P$  nach  $O$ , (2) die Rotation  $\Omega$  und (3) eine weitere Translation welche die Resultante der Translationen  $2r \sin \frac{1}{2}\theta'$  längs  $OT$  und  $a'$  längs  $Ox$  ist. Nach § 219 können diese Verrückungen in beliebiger Reihenfolge vorgenommen werden, da sie sich sämmtlich auf denselben Reductionspunkt beziehen. Man kann sie daher in eine einzige Schraubenbewegung auf die in § 223 angegebene Art zusammensetzen. Sie heisst die *resultirende Schraubenbewegung*. Eine Schraubenbewegung, die dieser resultirenden gleich und entgegengesetzt ist, bringt den Körper wieder in seine ursprüngliche Lage zurück.

Die Rotationsamplitude der resultirenden Schraubenbewegung ist  $\Omega$  und ihre Axe ist nach § 220 parallel zu  $OR$ . Aus § 271 ergibt sich, dass der Sinus der halben Rotationsamplitude einer jeden Schraubenbewegung dem Sinus des Winkels zwischen den Axen der beiden andern Schraubenbewegungen proportional ist.

Um die Translation längs der Axe der resultirenden Schraubenbewegung zu finden, muss man nach § 222 die Projectionen der drei Translationen  $OT$ ,  $a$ ,  $a'$  auf  $OR$  addiren. Die Projection von  $OT$  ist  $2r \sin \frac{1}{2}\theta' \cos TR = 2r \cos Ty \cdot \cos TR$ , also der doppelten Projection des kürzesten Abstandes  $r$  auf die Rotationsaxe gleich. Bezeichnet  $T$  die gesuchte Translation, so hat man

$$T = 2r \cos Ry + a \cos RA + a' \cos Rx.$$

§ 279. Sind die zusammenzusetzenden Schraubenbewegungen einfache Rotationen, so ist  $\alpha = 0$ ,  $a' = 0$  und es lässt sich leicht zeigen, dass

$$T \sin \frac{1}{2}\Omega = 2r \sin \frac{1}{2}\theta \sin \frac{1}{2}\theta' \sin \alpha$$

ist. In § 277 ist bewiesen worden, dass man jede Verrückung durch zwei conjugirte Rotationen auf unendlich verschiedene Art darstellen kann; aus dem Vorigen ergibt sich nun, dass in allen diesen Fällen  $r \sin \frac{1}{2}\theta \sin \frac{1}{2}\theta' \sin \alpha$  sich gleich bleibt. Sind die Rotationen unbegrenzt klein und  $\omega dt$  bez.  $\omega' dt$  gleich, so wird daraus  $\frac{1}{4} r \omega \omega' (dt)^2 \sin \alpha$ , d. h. das Product aus einer Winkelgeschwindigkeit und dem Moment ihrer conjugirten Winkelgeschwindigkeit um ihre Axe ist für alle dieselbe Bewegung darstellenden conjugirten Winkelgeschwindigkeiten dasselbe.

Beisp. 1. Sind die zusammenzusetzenden Schraubenbewegungen einfache endliche Rotationen, so lässt sich zeigen, dass die Gleichungen für die Axe der resultirenden Schraubenbewegung

$$\begin{aligned} -x \operatorname{tg} \varphi' + y \sin \frac{1}{2}\theta' + z \cos \frac{1}{2}\theta' &= r \sin \frac{1}{2}\theta', \\ y \cos \frac{1}{2}\theta' - z \sin \frac{1}{2}\theta' &= r \sin \frac{1}{2}\theta' \cos \varphi' \cotg \frac{1}{2}\Omega \end{aligned}$$

sind, worin  $\varphi'$  den Winkel  $xOR$  und  $\Omega$  die resultirende Rotation bedeutet. Die erste Gleichung drückt aus, dass die Centralaxe in der Ebene liegt, welche die von  $O$  aus auf  $OR$  in der Ebene  $xOR$  senkrecht gezogene, die Translation in dieser Richtung darstellende Gerade rechtwinklig halbirt; die zweite, dass die Centralaxe in einer zu  $TOR$  parallelen Ebene liegt, welche den in § 225 bestimmten Abstand von  $TOR$  hat.

§ 280. Die Geschwindigkeit der Punkte. Die Formeln sind etwas complicirter als die entsprechenden in § 238 für unendlich kleine Bewegungen.

Die Verrückung eines Körpers ist durch eine Rotation von der endlichen Amplitude  $\theta$  um eine Axe  $OI$  gegeben, die durch den Coordinatenanfang geht und deren Richtungscosinusse  $(l, m, n)$  sind. Man soll die dadurch bedingten Aenderungen der Coordinaten  $(x, y, z)$  eines Punktes  $P$  finden.

Statt den Körper zu verrücken, wollen wir die Coordinatenachsen um den gleichen Winkel  $\theta$  und um dieselbe Axe  $OI$ , jedoch in entgegengesetzter Richtung rotiren lassen. Das Problem wird dann die Umkehrung des in § 217 besprochenen.

Die Axen  $Ox, Oy, Oz$  mögen nach dieser Rotation die Lagen  $Ox', Oy', Oz'$  einnehmen; die neuen Coordinaten von  $P$  seien

$$x' = x + \delta x, \quad y' = y + \delta y, \quad z' = z + \delta z$$

und  $\alpha, \beta, \gamma$  die Richtungswinkel von  $OI$  auf beide Axensysteme bezogen. Die Axen mögen eine Kugel vom Radius gleich der Einheit in  $A, B, C; A', B', C'$  treffen. Durch Projection erhält man

$$x' = x \cos AA' + y \cos BA' + z \cos CA',$$

aus dem sphärischen Dreieck  $IAA'$

$$\sin \frac{1}{2} AA' = \sin \alpha \sin \frac{1}{2} \theta$$

und aus den beiden sphärischen Dreiecken  $BIA, BIA'$

$$0 = \cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta \cos Z,$$

$$\cos BA' = \cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta \cos(Z + \theta),$$

worin  $Z$  den Winkel  $AIB$  bezeichnet. Beachtet man, dass  $l = \cos \alpha, m = \cos \beta, n = \cos \gamma$  ist, so ergibt die erste Gleichung  $\operatorname{tg} Z = -\frac{n}{lm}$  und die zweite

$\cos BA' = lm - lm(\cos \theta - \operatorname{tg} Z \sin \theta) = \sin \theta \left( -n + lm \operatorname{tg} \frac{1}{2} \theta \right)$ . Auf ähnliche Weise erhält man durch Aenderung des Vorzeichens von  $\theta$ ,

$$\cos CA' = \sin \theta \left( m + ln \operatorname{tg} \frac{1}{2} \theta \right),$$

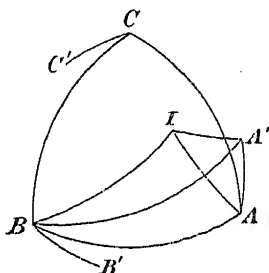
also

$$\operatorname{cosec} \theta \delta x = -x \operatorname{tg} \frac{1}{2} \theta + mz - ny + l \operatorname{tg} \frac{1}{2} \theta (lx + my + nz) \quad (1)$$

und ähnliche Ausdrücke für  $\delta y, \delta z$ .

Wenn der Coordinatenanfang eine Translation hat, deren Componenten parallel den Axen  $Ox, Oy, Oz$  durch  $a, b, c$  dargestellt werden, so müssen diese zu den obigen Werthen von  $\delta x, \delta y, \delta z$  addirt werden.

Nimmt man an, die Verrückung sei durch eine Translation  $(a, b, c)$  und eine Rotation  $\theta$  um die Axe  $(l, m, n)$  gegeben, so ergeben sich die Gleichungen der Centralaxe ohne Schwierigkeit. Die gesuchte Axe ist parallel zu  $OI$  (§ 225) und die Translation längs derselben der Projection der Translation des Coordinaten-



$$\frac{\delta x}{l} = \frac{\delta y}{m} = \frac{\delta z}{n} = la + mb + nc \dots \dots \dots (\Lambda)$$

gentügen. Sind  $f, g, h$  die Coordinaten des Fusspunktes des vom Coordinatenanfang auf die Centralaxe gefällten Lothes, so ist

$$2f = a - l(al + bm + cn) - (bn - cm) \cotg \frac{1}{2} \theta$$

mit ähnlichen Ausdrücken für  $g, h$ . Die Gleichung der Centralaxe nimmt dann die einfache Gestalt an

$$\frac{x-f}{l} = \frac{y-g}{m} = \frac{z-h}{n}.$$

Um den Ausdruck für  $f$  zu erhalten, setze man  $f, g, h$  statt  $x, y, z$  in die Werthen von  $\delta x, \delta y, \delta z$ . Bezeichnet man die rechte Seite der Gl. (A) der Kürze wegen mit  $K$  und beachtet, dass  $fl + gm + hn = 0$  ist, so erhält man

$$lK - a = \left( -f \operatorname{tg} \frac{1}{2} \theta + mh - ng \right) \sin \theta$$

und zwei ähnliche Gleichungen. Multiplicirt man diese drei Gleichungen mit  $-\operatorname{tg} \frac{1}{2} \theta, n$  bez.  $-m$  und addirt, so wird

$$(a - lK) \operatorname{tg} \frac{1}{2} \theta - (bn - cm) = f(1 + \operatorname{tg}^2 \frac{1}{2} \theta) \sin \theta,$$

woraus sich der gesuchte Werth von  $f$  sofort ergibt.

Wenn  $\xi, \eta, \zeta$  die Coordinaten des *Mittelpunktes der ganzen Verschiebung eines Punktes*  $P$  bezeichnen, so ist  $\xi = x + \frac{1}{2} \delta x$ , etc. Die Ausdrücke für die Componenten der Verschiebung nehmen dann die Gestalt an

$$\delta x = a + 2 \operatorname{tg} \frac{1}{2} \theta \left[ m \left( \xi - \frac{1}{2} c \right) - n \left( \eta - \frac{1}{2} b \right) \right] \dots \dots \dots (2)$$

Dies stimmt mit den von Rodriguez gefundenen Resultaten überein. Um die Gleichungen (2) zu erhalten, beachte man, dass ein Körper, der um  $OI$  durch einen Winkel  $\theta$  gedreht wurde, wenn man ihn rückwärts um denselben Winkel rotiren lässt, seine frühere Lage wieder einnimmt. Setzt man daher  $x + \delta x$ , etc. anstatt  $x, y, z$  auf der rechten Seite der Gl. (1) und ändert das Vorzeichen von  $\theta$ , so erhält man dieselbe linke Seite mit  $-\delta x$  und  $-\theta$  an Stelle von  $\delta x$  und  $\theta$ . Es wird also

$$\operatorname{cosec} \theta \delta x = + (x + \delta x) \operatorname{tg} \frac{1}{2} \theta + m(z + \delta z) - n(y + \delta y) - l \operatorname{tg} \frac{1}{2} \theta \{ l(x + \delta x) + \dots \}$$

Bedenkt man, dass  $l\delta x + m\delta y + n\delta z = 0$  ist, weil nur Rotation stattfindet (§ 222, so findet man durch Addition

$$\delta x = 2(m\xi_1 - n\eta_1) \operatorname{tg} \frac{1}{2} \theta,$$

worin  $\xi_1 = x + \frac{1}{2} \delta x$ , etc. die Coordinaten des Mittelpunktes der durch die Rotation allein bewirkten Verrückung sind. Hat der Coordinatenanfang ebenfalls eine Translation, die durch  $a, b, c$  dargestellt wird, so schliessen wir diese in die Werthe von  $\delta x, \delta y, \delta z$  ein. Weil  $\xi, \eta, \zeta$  die Coordinaten des Mittelpunktes der *ganzen* Verrückung sind, so setze man  $\xi_1 = \xi - \frac{1}{2} a$ , etc. Man erhält dann unmittelbar die Gleichungen (2).

Da die ganze Verschiebung eines Punktes der Centralaxe längs dieser Axe stattfindet, so sind  $\xi, \eta, \zeta$  auch die Coordinaten eines Punktes der Centralaxe. Die Gleichungen der Centralaxe kann man daher auch bilden, indem man die Werthe von  $\delta x, \delta y, \delta z$  in (A) substituirt.

§ 281. Durch Benutzung der Formeln für  $\delta x, \delta y, \delta z$  kann man die Componenten der ganzen Verschiebung eines Punktes  $P$  in Folge zweier Schraubenbewegungen finden, die der Reihe nach um zwei durch beliebige Punkte  $(f, g, h), (f', g', h')$  gehende Axen  $(l, m, n), (l', m', n')$  stattfinden. Bezeichnet man die Rotationen und Translationen mit  $(\theta, v), (\theta', v')$ , so sind die Verschiebungen von  $(xyz)$  in Folge der ersten

$$\delta x = vl + \sin \theta [-t(x-f) + m(z-h) - n(y-g) + ltP],$$

worin

$$P = l(x-f) + m(y-g) + n(z-h) \quad \text{und} \quad t = \operatorname{tg} \frac{1}{2} \theta$$

ist, mit ähnlichen Ausdrücken für  $\delta y, \delta z$ .

Die Verschiebungen  $\delta'x, \delta'y, \delta'z$  in Folge der zweiten Schraubenbewegung ergeben sich, wenn man  $x + \delta x - f'$ , etc. für  $x, y, z$ ;  $l', m', n'$  für  $l, m, n$  und  $\theta', v'$  für  $\theta, v$  setzt. Addirt man beide, so erhält man die ganze Verschiebung  $\Delta x = \delta x + \delta'x$ , etc. in Folge beider Schraubenbewegungen. Das Verfahren bietet weiter keine Schwierigkeiten dar, nur ist das Resultat im Allgemeinen etwas lang. Wir kommen so zu drei linearen Ausdrücken für die Componenten  $\Delta x, \Delta y, \Delta z$  der ganzen Verschiebung in Folge beider Schraubenbewegungen. Sie haben die Form

$$\Delta x = a + Ax + By + Cz$$

und ähnlich für  $\Delta y, \Delta z$ .

Um die Centralaxe der beiden Schraubenbewegungen zu finden, beachte man, dass der Ort von Punkten, deren Verschiebungen gleich und parallel sind, eine der resultirenden Schraubenaxe parallele Gerade ist, § 220. Setzt man daher  $\Delta x = a, \Delta y = b, \Delta z = z$ , so erhält man drei Gleichungen ersten Grades, von welchen immer zwei die Verhältnisse von  $x, y, z$  bestimmen und daher die Richtungscosinusse der Centralaxe angeben. Sie seien  $\lambda, \mu, \nu$ . Die Gleichung der Centralaxe ist dann

$$\frac{\Delta x}{\lambda} = \frac{\Delta y}{\mu} = \frac{\Delta z}{\nu} = \lambda a + \mu b + \nu c.$$

## Kapitel VI.

### Die Bewegungsgrösse.

§ 282. Das Kapitel hat die Ueberschrift „Bewegungsgrösse“ erhalten, obgleich nur ein Theil seines Inhalts durch sie ausgedrückt wird. Am besten lässt sich der Inhalt des Kapitels in dem folgenden Problem aussprechen. Die Umstände der Bewegung eines Systems zur Zeit  $t_0$  sind gegeben; zur Zeit  $t_1$  bewegt sich das System unter anderen Umständen; man soll die Beziehungen bestimmen, welche zwischen den beiden Bewegungen existiren. Die Art, auf welche diese Aenderungen durch die Kräfte bewirkt werden, ist nicht Gegenstand der Untersuchung. Wir wollen nur bestimmen, welche Aenderungen in der Zeit  $t_1 - t_0$  vorgegangen sind. Ist die Zeit  $t_1 - t_0$  sehr klein und sind die Kräfte sehr gross, so wird es zum allgemeinen Problem der Momentankräfte. Auch dieses soll in dem Kapitel behandelt werden.

Das System möge auf beliebige feste Axen  $Ox, Oy, Oz$  bezogen werden. Die sechs allgemeinen Bewegungsgleichungen lassen sich dann nach § 71 in der Form schreiben

$$\left. \begin{aligned} \Sigma m \frac{d^2 z}{dt^2} &= \Sigma m Z, \\ \Sigma m \left( x \frac{d^2 y}{dt^2} - y \frac{d^2 x}{dt^2} \right) &= \Sigma m (x Y - y X) \end{aligned} \right\}.$$

Integrirt man sie von  $t = t_0$  bis  $t = t_1$ , so ergibt sich

$$\begin{aligned} \left( \Sigma m \frac{dz}{dt} \right)_{t_0}^{t_1} &= \Sigma m \int_{t_0}^{t_1} Z dt, \\ \left[ \Sigma m \left( x \frac{dy}{dt} - y \frac{dx}{dt} \right) \right]_{t_0}^{t_1} &= \Sigma m \int_{t_0}^{t_1} (x Y - y X) dt. \end{aligned}$$

Eine beschleunigende Kraft  $F$  greife an einem in Bewegung befindlichen materiellen Punkt  $m$  während der Zeit  $t_1 - t_0$  an und diese Zeit werde in Intervalle getheilt, von denen jedes gleich  $dt$  ist. In der Mitte eines jeden solchen Intervalls ziehe man von der Lage aus, die  $m$  in diesem Augenblick hat, eine Linie, welche den Werth, den

Resultat. Man zeige, dass

$$X_{2n+1} - 5X_{2n+2} - 2X_{2n+3} = 0$$

und

$$X_{2n+3} - 5X_{2n+1} - 2X_{2n} = 0$$

ist, wenn  $X_n$  die Stossaction am  $n$ ten Eckpunkt bezeichnet, und finde daraus  $X_n$ .

Beisp. 5. Zwei gleichförmige Stäbe  $AB$ ,  $BC$  von gleicher Länge und Masse, die bei  $B$  durch ein glattes Gelenk verbunden sind, liegen auf einer glatten, horizontalen Ebene; das Ende  $A$  wird so getroffen, dass es sich mit gegebener Geschwindigkeit in einer Richtung zu bewegen beginnt, welche die Winkel  $\theta$ ,  $\varphi$  mit den Stäben macht; man zeige, dass, wenn  $\sin(2\varphi - \theta) = 3 \sin \theta$  ist,  $AB$  seine Bewegung ohne Rotation beginnt. [Coll. Exam. 1880.]

Man nehme die Momente für den Stab  $BC$  um  $B$  und für beide Stäbe um  $A$ , so wie in § 169 gezeigt wurde.

Beisp. 6. Drei gleiche und ähnliche Stäbe, welche sich um ihr gemeinschaftliches Ende drehen können, werden rechtwinklig zueinander so gehalten, dass sich die drei anderen Endpunkte in einer horizontalen Ebene befinden und das gemeinschaftliche Ende entweder ober- oder unterhalb liegt. Man lässt sie nun auf eine glatte unelastische horizontale Ebene fallen; man zeige, dass die Geschwindigkeit ihres Schwerpunkts sich um die Hälfte vermindert.

§ 178. Die beiden Punkte des Maximalstosses. Eine freie unelastische Lamelle von beliebiger Gestalt dreht sich in ihrer eigenen Ebene um das Momentancentrum  $S$  und stösst an dem Punkt  $P$ , welcher in der den Schwerpunkt  $G$  mit  $S$  verbindenden Geraden liegt, gegen ein Hinderniss. Man bestimme die Lage des Punktes  $P$ , wenn die Grösse des Stosses ein Maximum sein soll. [Poinso, Sur la percussion des corps, Liouville's Journal, 1857].

Erstens. Das Hinderniss  $P$  sei ein festliegender Punkt. Es sei  $GP = x$  und  $R$  die Stosskraft. Setzt man  $SG = h$  und sind  $\omega$ ,  $\omega'$  die Winkelgeschwindigkeiten um  $G$  vor und nach dem Zusammentreffen, so ist  $h\omega$  die Translationsgeschwindigkeit von  $G$  grade vor dem Stoss.  $v'$  sei ferner die Translationsgeschwindigkeit von  $G$  grade nach dem Zusammentreffen. Man erhält die Gleichungen

$$\omega' - \omega = \frac{-Rx}{Mh^2}, \quad v' - h\omega = -\frac{R}{M} \quad \dots \quad (1)$$

und, wenn man annimmt, der Stosspunkt werde zum Stillstand gebracht,

$$v' + x\omega' = 0 \quad \dots \quad (2).$$

Mit Hilfe dieser Gleichungen drückt man  $R$  durch  $x$  aus und macht  $R$  zu einem Maximum. Man findet so zwei Werthe für  $x$ , einen positiven und einen negativen. Beide entsprechen Punkten stärksten Stosses, aber in entgegengesetzter Richtung. Es gibt einen Punkt  $P$ , mit dem der Körper vor und einen Punkt  $P'$ , mit dem er hinter der Richtung seiner Translation im Raum stärker als mit jedem andern Punkt widerschlägt.

Die beiden Punkte  $P$ ,  $P'$  haben gleichen Abstand von  $S$  und wenn  $O$  das Schwingungscentrum in Bezug auf  $S$  als Aufhängungscentrum ist, so wird  $SP^2 = SG \cdot SO$ . Macht man  $P$  zum Aufhängungspunkt, so ist  $P'$  das entsprechende Schwingungscentrum und  $PP'$  wird in  $G$  und  $O$  harmonisch getheilt. Ferner ist die Grösse der Stösse dem Abstand von  $G$  umgekehrt proportional.

Zweitens. Das Hinderniss sei ein freier materieller Punkt von der Masse  $m$ . Wir erhalten ausser den Gleichungen (1) noch die Bewegungsgleichung des Punktes  $m$ . Ist  $V'$  seine Geschwindigkeit nach dem Zusammenstoss, so ist  $V' = \frac{m}{R}$ .

Der Berührungspunkt der beiden Körper hat nach dem Zusammenstoss die nämliche Geschwindigkeit; statt der Gleichung (2) erhält man daher  $V' = v' + x\omega'$ . Man findet  $x$  wie zuvor, indem man  $R$  zu einem Maximum macht.  $x$  hat zwei Werthe.



Es existiren noch andere ausgezeichnete Punkte in einem in Bewegung befindlichen Körper, deren Lage sich auffinden lässt. So kann man darnach fragen, mit welchen Punkten der Körper gegen ein *festes* Hinderniss stossen muss, *erstens* damit die Translationsgeschwindigkeit seines Schwerpunkts und *zweitens*, damit die Winkelgeschwindigkeit ein Maximum wird. Diese Punkte hat Poinso<sup>t</sup> die Centren der Maximalreflexion bez. Conversion genannt. Sie sind jedoch nicht wichtig genug, um hier eine eingehende Besprechung zu rechtfertigen.

Beisp. Eine freie Lamelle von beliebiger Gestalt dreht sich in ihrer eignen Ebene um das Momentancentrum  $S$  und stösst auf ein festes Hinderniss  $P$ , welches in der Geraden liegt, die den Schwerpunkt  $G$  mit  $S$  verbindet. Man suche die Lage von  $P$ , *erstens*, wenn der Schwerpunkt zum Stillstand kommen soll und *zweitens*, wenn zwar seine Geschwindigkeit nach dem Stoss dieselbe wie vorher, ihre Richtung aber die umgekehrte sein soll.

Resultat. In dem ersten Fall fällt  $P$  entweder mit  $G$  oder dem Schwingungscentrum zusammen. Im zweiten findet man die Punkte, wenn  $SG = h$ ,  $x = GP$  gesetzt wird, aus der Gleichung

$$2hx^2 = k^2(x - h). \quad [\text{Poinso<sup>t</sup>.}]$$

§ 179. Elastische glatte Körper. Zwei Körper stossen zusammen; man erkläre die Beschaffenheit der zwischen ihnen stattfindenden Action.

Wenn zwei Kugeln von hartem Material aufeinandertreffen, so scheinen sie sich fast augenblicklich zu trennen und durch die gegenseitige Einwirkung wird eine endliche Aenderung der Geschwindigkeit in jedem erzeugt. Diese plötzliche Geschwindigkeitsänderung ist das Merkmal einer Stosskraft. Die Schwerpunkte der Kugeln mögen sich vor dem Zusammenstoss in derselben Geraden mit den Geschwindigkeiten  $u$  und  $v$  bewegen. Nach dem Stoss fahren sie fort sich auf dieser Geraden zu bewegen und dabei seien  $u'$ ,  $v'$  ihre Geschwindigkeiten. Sind  $m$ ,  $m'$  die Massen der Kugeln und ist  $R$  die Action zwischen ihnen, so erhält man nach § 168

$$u' - u = -\frac{R}{m}, \quad v' - v = \frac{R}{m'} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1).$$

Diese Gleichungen reichen zur Bestimmung der drei Grössen  $u'$ ,  $v'$ ,  $R$  nicht aus. Um eine dritte zu erhalten, hat man in Betracht zu ziehen, was während des Stosses vor sich geht.

Jede der Kugeln wird durch die andere etwas zusammengedrückt, so dass sie also keine vollkommenen Kugeln mehr sind. Jede sucht auch im Allgemeinen ihre frühere Gestalt wieder anzunehmen, es findet daher ein Zurückprallen statt. Die Periode des Stosses lässt sich mithin in zwei Theile zerlegen: 1) die Periode der Compression, während welcher sich der Abstand zwischen den Schwerpunkten der beiden Körper vermindert und 2) die Restitutionsperiode, in welcher der Abstand der Schwerpunkte zunimmt. Die zweite Periode geht zu Ende, wenn die Körper sich trennen.

Da die Anordnung der materiellen Punkte eines Körpers durch den Stoss gestört wird, so müssten wir eigentlich, um genau zu sein,

die relative Bewegung der verschiedenen Theile des Körpers bestimmen. Wir müssten jeden Körper als eine Sammlung freier materieller Punkte betrachten, die durch gegenseitige Actionen verbunden sind. Diese Punkte könnten, in Bewegung gesetzt, immer fortfahren sich zu bewegen und dabei um gewisse mittlere Lagen im Körper schwingen.

Man pflegt indessen anzunehmen, dass die Aenderungen der Gestalt und Structur so gering sind, dass ihre Wirkung auf die Veränderung der Schwerpunktslage und des Trägheitsmoments des Körpers vernachlässigt werden kann und ferner dass die ganze Zeit des Zusammenstosses so kurz ist, dass die Verrückung des Körpers in dieser Zeit unbeachtet bleiben darf. Stimmen diese Annahmen für irgend welche Körper mit der Wirklichkeit nicht überein, so müssen die Wirkungen ihres Zusammenstosses aus den Gleichungen zweiter Ordnung abgeleitet werden. Wir können daher annehmen, dass im Moment der stärksten Compression die Schwerpunkte der beiden Körper sich mit gleicher Geschwindigkeit bewegen.

Das Verhältniss der Grösse der Action zwischen den Körpern während der Restitutionsperiode zu der Actionsgrösse während des Zusammendrückens ist für Körper von verschiedenem Material verschieden. Es hängt davon ab, wie schnell oder langsam die Körper ihre ursprüngliche Gestalt wieder herzustellen suchen. Geschieht es sehr langsam, so findet die Trennung statt, während die Körper noch in ihre frühere Form zurückkehren, und die Action während der Restitution ist alsdann kleiner als die während der Compression. Nehmen die Körper dagegen ihre vorige Gestalt so schnell wieder an, dass sie im Augenblick der Trennung diese Gestalt wieder haben, so ist die Action während der Restitution der während der Compression gleich.

Manchmal kann man die Kraft während der Restitutionsperiode vernachlässigen. Die Körper nennt man dann *unelastisch*. In diesem Fall ist grade nach dem Zusammenstoss  $u' = v'$  und daraus erhält man  $R = \frac{mm'}{m + m'}(u - v)$  und  $u' = \frac{mu + m'v}{m + m'}$ .

Kann die Restitutionskraft nicht vernachlässigt werden, so sei  $R$  die ganze Action zwischen den Körpern,  $R_0$  die Action bis zum Moment der grössten Compression. Die Grösse von  $R$  muss man durch Versuche feststellen. Dies kann derart geschehen, dass man die Werthe von  $u'$  und  $v'$  bestimmt und dann  $R$  mit Hülfe der Gleichungen (1) findet. Solche Versuche hat vor Allem Newton angestellt und gefunden, dass  $\frac{R}{R_0}$  ein constantes Verhältniss ist, welches von dem Material der Körper abhängt. Wir wollen es mit  $1 + e$  bezeichnen. Die Grösse  $e$  überschreitet niemals die Einheit; in dem Grenzfall, wenn  $e = 1$  ist, heissen die Körper vollkommen elastisch.

Nimmt man an, der Werth von  $e$  sei bekannt, so lassen sich die Geschwindigkeiten nach dem Stoss leicht ermitteln. Die Action  $R_0$

wird zuerst unter der Voraussetzung berechnet, dass die Körper unelastisch wären und daraus der ganze Werth von  $R$  durch Multiplication mit  $1 + e$  gefunden. Man erhält

$$R = \frac{mn'}{m + m'} (u - v) (1 + e),$$

woraus man  $u'$  und  $v'$  mit Hülfe der Gl. (1) findet.

§ 180. Als Beispiel wollen wir untersuchen, wie die Bewegung des in § 170 besprochenen Haspels beeinflusst wird, wenn der Strick so wenig elastisch ist, dass man diese Theorie anwenden kann.

Da der Punkt des Haspels, welcher sich mit dem Strick in Berührung befindet, in dem Moment der grössten Compression keine Geschwindigkeit hat, so misst die in dem § 170 gefundene Stosswirkung die ganze dem Haspel mitgetheilte Bewegungsgrösse vom Beginn des Stosses bis zum Moment der stärksten Compression. Wie aus dem Vorigen hervorgeht, findet man die gesammte mitgetheilte Bewegungsgrösse vom Beginn an bis zum Ende der Restitutionsperiode durch Multiplication der in § 170 gefundenen Spannung mit  $1 + e$ , wenn  $e$  das Maass für die Elasticität des Stricks ist. Dies gibt  $T = \frac{1}{3} mv(1 + e)$ . Die Bewegung des Haspels, an dem diese bekannte Stosskraft angreift, ergibt sich leicht. Die Verticalcomponenten sind  $m(v' - v) = -\frac{1}{3} mv(1 + e)$ . Nimmt man die Momente um den Schwerpunkt, so ist  $mk^2\omega' = \frac{1}{3} mva(1 + e)$ , woraus sich  $v'$  und  $\omega'$  ableiten lassen.

Beisp. Ein gleichförmiger Balken balancirt um eine horizontale, durch seinen Schwerpunkt gehende Axe und ein vollkommen elastischer Ball fällt von der Höhe  $h$  auf sein eines Ende; man bestimme die Bewegungen des Balkens und des Balls.

Resultat.  $M, m$  seien die Massen des Balkens und des Balles;  $2a$  die Länge des Balkens;  $V, V'$  die Geschwindigkeiten des Balls grade vor und nach dem Stoss,  $\omega'$  die Winkelgeschwindigkeit des Balkens. Es ist dann  $\omega' = \frac{6mV}{(M + 3m)a}$ ,  
 $V' = V \cdot \frac{3m - M}{3m + M}$ .

§ 181. **Rauhe Körper.** Bisher haben wir nur die Stosswirkung normal zur gemeinsamen Fläche der beiden Körper betrachtet. Sind aber die Körper rauh, so tritt offenbar eine Stossreibung in Wirksamkeit. Da die Stosskraft nur das Integral einer sehr grossen Kraft ist, die sehr kurze Zeit wirkt, so könnten wir wohl annehmen, die Stossreibung folge denselben Gesetzen wie die gewöhnliche. Diese Gesetze beruhen aber auf Versuchen und wir sind nicht sicher, ob sie auch in dem äussersten Fall gelten, wenn die Kräfte sehr gross sind. Auf besonderen Wunsch Poisson's unternahm es Morin, diesen Punkt durch Versuche aufzuklären. Er fand, dass die Stossreibung zwischen zwei Körpern, welche sich treffen und gleiten, zu der Normalstosskraft in demselben Verhältniss steht wie bei gewöhnlicher Reibung und dass das Verhältniss von der relativen Geschwindigkeit der sich treffenden

Körper nicht abhängt. Morin's Versuch wird im folgenden Paragraphen beschrieben.

§ 182. Auf dem Deckel eines Kastens  $AB$ , der mit Schrot so beladen werden kann, dass man ihm jedes gewünschte Gewicht geben kann, sind zwei verticale Hölzer  $AC, BD$  angebracht. Ein Querholz verbindet  $C$  mit  $D$  und trägt ein Gewicht  $mg$ , das mittelst eines Fadens an ihm aufgehängt ist. Das Gewicht des Kastens mit seiner Belastung ist  $Mg$ . Ein Seil  $AEF$  geht horizontal von dem Kasten aus über eine glatte Rolle  $E$  und trägt bei  $F$  das Gewicht  $(M + m)g\mu$ . Der Kasten kann auf einer horizontalen Ebene gleiten, deren Reibungscoefficient  $\mu$  ist. Wenn er daher einmal in Bewegung gesetzt ist, gleitet er in grader Linie mit gleichförmiger Geschwindigkeit, die wir  $V$  nennen wollen. Nun wird plötzlich der Faden, der  $mg$  trägt, durchgeschnitten; das Gewicht fällt in den Kasten und liegt in ihm sofort fest. Offenbar wird dadurch eine Stossreibung zwischen dem Kasten und der horizontalen Ebene hervorgerufen. Wenn die Geschwindigkeit des Kastens unmittelbar nach dem Stoss wieder  $V$  gleichkommt, so ist der Coefficient der Stossreibung dem der endlichen Reibung gleich.

Man kann sich dies auf folgende Art klar machen.  $t$  sei die Zeit des Falls. Wenn das Gewicht den Kasten trifft, hat es die horizontale Geschwindigkeit  $V$  und die verticale  $gt$ ; der Kasten dagegen die horizontale Geschwindigkeit  $V + ft$ , wenn  $f = \frac{\mu mg}{M + (M + m)\mu}$  ist.

$F$  und  $R$  mögen die horizontale und verticale Componente der Stosskraft zwischen dem Kasten und der horizontalen Ebene sein. Ein Stoss findet statt zwischen dem fallenden Gewicht und dem Kasten und eine Stossspannung in dem Seil  $AEF$ ; durch sie werden die durch die äusseren Stösse  $F$  und  $R$  erzeugten Bewegungsgrössen über das ganze System verbreitet.  $V'$  sei die gemeinsame Geschwindigkeit des ganzen Systems grade nachdem die Stösse  $F$  und  $R$  vollendet sind. Durch den Versuch fand man, dass diese Geschwindigkeit  $V'$  gleich  $V$  ist.

Nimmt man die Componenten in horizontaler und verticaler Richtung wie in § 168, so erhält man

$$[M + m + (M + m)\mu] V' - [M + (M + m)\mu] (V + ft) - mV = -F, \\ mgt = R.$$

Setzt man  $V' = V$  und substituirt für  $f$ , so ergibt sich  $F = \mu R$ .

Beisp. Man zeige, dass der resultirende Stoss zwischen dem Kasten und dem fallenden Gewicht vertical gerichtet ist.

§ 183. Wir wollen nun die Theorie des unelastischen Stosses in § 179 verallgemeinern. Zwei Körper von beliebiger Gestalt mögen in dem Punkt  $A$  aufeinanderstossen und Aenderungen der Gestalt und

Structur wie zuvor vernachlässigt werden. Die relativen Tangential- und Normalgeschwindigkeiten der Berührungspunkte der beiden Körper sind, *wenn sie auf die in § 137 angegebene Art berechnet werden*, nicht Null. Sie heissen die relativen Gleitungs- und Compressionsgeschwindigkeiten. Es treten also zwei Reactionen auf, eine normal gerichtete Kraft und eine Reibung, deren Verhältniss  $\mu$ , der Reibungscoefficient, ist. Im weiteren Verlauf des Stosses wird die relative Normalgeschwindigkeit zerstört und wird Null in dem Moment der stärksten Compression.  $R$  sei die ganze Bewegungsgrösse, welche in dieser sehr kurzen Zeit von dem einen auf den andern Körper normal übertragen wird. Diese Kraft  $R$  ist eine unbekannte Reaction, zu deren Bestimmung die geometrische Bedingung dient, dass gleich nach dem Zusammenstoss die normalen Geschwindigkeiten der Berührungspunkte gleich sind. Diese Bedingung muss auf die in § 137 erklärte Art ausgedrückt werden.

Die relative gleitende Geschwindigkeit bei  $A$  vermindert sich gleichfalls. Wenn sie vor dem Moment der stärksten Compression verschwindet, so kommt während der übrigen Zeit des Zusammenstosses, wenn überhaupt, nur so viel Reibung und in solcher Richtung zur Wirkung, als nöthig ist, um die Berührungspunkte bei  $A$  am Gleiten zu verhindern, vorausgesetzt, dass dieser Betrag kleiner ist als die Grenzgrösse der Reibung.  $F$  sei die ganze Bewegungsgrösse, welche tangential von dem einen auf den andern Körper übertragen wird. Diese Reaction  $F$  ist durch die Bedingung zu bestimmen, dass gleich nach dem Zusammenstoss die Tangentialgeschwindigkeiten der Berührungspunkte gleich sind. Wenn jedoch die gleitende Bewegung vor dem Moment der stärksten Compression nicht verschwindet, so tritt die volle Grösse der Reibung in der dem relativen Gleiten entgegengesetzten Richtung in Wirkung und es ist  $F = \mu R$ . Im Allgemeinen lassen sich die beiden Fälle auf folgende Art unterscheiden. In dem ersten Fall müssen die Werthe von  $F$  und  $R$ , welche man durch Auflösung der Bewegungsgleichungen findet, derart sein, dass  $F < \mu R$  ist. In dem zweiten muss die relative Endgeschwindigkeit der Berührungspunkte bei  $A$  dieselbe Richtung nach wie vor dem Zusammenstoss haben. Diese Bedingungen sind jedoch nicht ausreichend, denn es ist möglich, dass in verwickelteren Fällen das Gleiten seine Richtung während des Zusammenstosses ändert oder zu ändern sucht. Siehe § 187.

§ 184. Sind die Körper, welche aufeinanderstossen, elastisch, so kann sowohl eine normale Reaction als eine Reibung während der Restitutionsperiode auftreten. Manchmal muss man dieses Stadium der Bewegung als ein Problem für sich ansehen. Die Bewegungen der Körper im Moment der stärksten Compression, wie man sie gefunden hat, dienen als Anfangsbedingungen für einen neuen Bewegungszustand unter der Wirkung anderer Stosskräfte; die während der

Restitution zur Wirkung kommende Reibung muss denselben Gesetzen folgen, wie die während der Compression. Genau wie vorher bieten sich zwei Fälle dar; entweder findet Gleiten statt während der ganzen Restitutionsperiode oder nur während eines Theils derselben. Sie werden in der schon erklärten Weise behandelt.

§ 185. Ein sehr wichtiger Unterschied existirt zwischen den Bedingungen der Compression und der Restitution. Während der Compression ist die Normalreaction unbekannt. Die Bewegung des Körpers grade vor der Compression ist gegeben und es besteht eine geometrische Gleichung, welche ausdrückt, dass die relative Normalgeschwindigkeit der Berührungspunkte am Ende der Compressionsperiode Null ist. Aus dieser geometrischen Gleichung wird dann die Compressionskraft abgeleitet. Man findet zwar auf diese Art die Bewegung des Körpers grade vor der Restitution, aber nicht die Bewegung grade nach ihr, die doch zu bestimmen ist. Für sie ist keine geometrische Gleichung vorhanden. Jedoch steht die Restitutionskraft in einem bestimmten Verhältniss zur Compressionskraft und ist somit bekannt.

§ 186. Historische Uebersicht.<sup>1)</sup> Das Problem des Zusammenstosses zweier glatter unelastischer Körper wird von Poisson in seinem *Traité de Mécanique, Seconde édition*, 1833 behandelt. Unter der Voraussetzung, dass die Bewegung eines jeden der beiden Körper grade vor dem Zusammenstoss gegeben sei, stellt er für jeden sechs Bewegungsgleichungen zur Bestimmung der Bewegung grade nach dem Stoss auf. Sie enthalten 13 unbekannte Grössen, nämlich die Componenten der Geschwindigkeiten der Schwerpunkte der Körper längs dreier rechtwinkliger Axen, die Componenten der Winkelgeschwindigkeiten der Körper um dieselben Axen und schliesslich die gegenseitige Reaction der beiden Körper. Die Gleichungen reichen mithin zur Bestimmung der Bewegung nicht aus. Eine dreizehnte Gleichung erhält man dann aus dem Satz, dass der Stoss mit dem Moment der stärksten Compression beendigt ist, d. h. in dem Augenblick, in welchem die normalen Geschwindigkeiten der Berührungspunkte der beiden Körper, die sich treffen, gleich sind.

In dem Fall, in welchem die Körper *elastisch* sind, theilt Poisson den Stoss in zwei Perioden. Die erste beginnt mit der ersten Berührung der Körper und endigt im Moment der stärksten Compression; die zweite beginnt in diesem Augenblick und endigt, wenn die Körper sich trennen. Die Bewegung am Ende der ersten Periode findet man genau so, wie bei der Annahme, sie seien unelastisch. Die Bewegung am Ende der zweiten Periode ergibt sich aus dem Satz, dass die ganze dem einen Körper von dem andern während der zweiten Periode mitgetheilte Bewegungsgrösse in constantem Verhältniss zu der während der ersten Periode des Stosses mitgetheilten steht. Das Verhältniss hängt von der Elasticität der beiden Körper ab und kann nur durch Versuche ermittelt werden, die man mit einfachen Stössen an Körpern aus demselben Material anstellt.

Sind die Körper *rau* und *gleiten* während des Zusammenstosses *aufeinander*, so findet gleichzeitig, wie Poisson bemerkt, ein Reibungsstoss statt. Dies ergibt sich aus dem Satz (§ 181), dass die Reibungsgrösse in jedem Augenblick ein constantes Verhältniss zum Normaldruck haben und dass ihre Richtung der relativen Bewegung

<sup>1)</sup> Siehe auch Poinso in Liouv. J. (2) II, 283 und IV, 161, 421. Chollin in *Bologna Mem.* Serie 3, VI, 409, VIII, 273.

wegung der Berührungspunkte entgegengesetzt sein muss. Er macht davon Anwendung auf eine Kugel, die entweder unelastisch oder vollkommen elastisch ist, auf eine rauhe Ebene stösst und sich vor dem Zusammenstoss um eine horizontale zur Bewegungsrichtung ihres Schwerpunkts senkrechte Axe dreht. Er zeigt, dass man verschiedene Fälle unterscheiden müsse, (1) wenn das Gleiten während des ganzen Stosses dieselbe Richtung behält und nicht verschwindet, (2) wenn es während des Stosses verschwindet und Null bleibt, (3) wenn das Gleiten verschwindet und das Vorzeichen wechselt. Der dritte Fall enthält jedoch eine unbekannte Grösse und seine Formeln reichen daher zur Bestimmung der Bewegung nicht aus. Poisson weist darauf hin, dass das Problem sehr complicirt wird, wenn die Kugel eine Anfangsrotation um eine Axe hat, die auf der verticalen Ebene nicht senkrecht steht, in welcher sich ihr Schwerpunkt bewegt. Er versucht nicht das Problem zu lösen, sondern geht zu einer ausführlichen Besprechung des Zusammenstosses glatter Körper über.

Coriolis untersucht in seinem *Jeu de Billard* (1835) den Zusammenstoss zweier *rauen* Kugeln, die während der ganzen Zeit des Stosses aufeinander gleiten. Er zeigt, dass beim Zusammentreffen zweier *rauen* Kugeln die Richtung des Gleitens während des ganzen Stosses dieselbe bleibt.

Ed. Phillips untersucht im 14. Band von Liouville's Journal, 1849, das Problem des Zusammenstosses zweier *rauer unelastischer* Körper von beliebiger Gestalt, wenn die Reibungsrichtung während des ganzen Stosses nicht nothwendig dieselbe zu bleiben braucht, unter der Annahme, dass *das Gleiten während des Stosses nicht verschwindet*. Er theilt die Periode des Stosses in Elementartheile und wendet Poisson's Regel für die Grösse und Richtung der Reibung auf jede Elementarperiode an. Er gibt an, wie man die Auflösung der Gleichungen durchführen kann und bespricht speciell den Fall, in welchem die Hauptaxen der beiden Körper für den Berührungspunkt einander parallel sind und überdies der Schwerpunkt eines jeden Körpers auf der gemeinschaftlichen Normalen im Berührungspunkt liegt. Er kommt dabei zu zwei Resultaten, die wir in dem Kapitel über *Bewegungsgrösse* bringen werden.

Phillips geht nicht auf eine detaillirte Untersuchung des Zusammenstosses *elastischer* Körper ein, wenn er auch bemerkt, die Periode des Stosses müsse in zwei Theile zerlegt werden, die gesondert zu betrachten seien. Er meint jedoch, sie böten keine weiteren Eigenthümlichkeiten dar, wenn man dieselben Voraussetzungen mache.

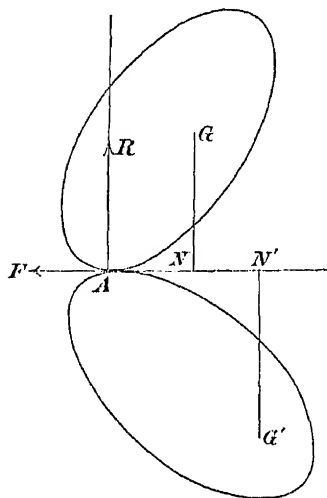
Den Fall, in welchem das Gleiten verschwindet und die Reibung unstetig wird, scheint er nicht untersucht zu haben.

In diesem Kapitel werden wir die Theorie der Stosskräfte nur so weit verfolgen, als die ebene Bewegung in Betracht kommt. In dem Kapitel VI über *Bewegungsgrösse* wird die Theorie wieder aufgenommen und auf Körper von beliebiger Gestalt in dem Raum von drei Dimensionen ausgedehnt werden.

§ 187. Das Problem des Stosses im Allgemeinen. *Zwei Körper von beliebiger Gestalt stossen auf eine gegebene Art widereinander. Man soll die Bewegung grade nach dem Stoss finden. Die Körper sind glatt oder rauh, elastisch oder nicht.*

$G, G'$  seien die Schwerpunkte der beiden Körper,  $A$  der Berührungspunkt.  $U, V$  seien die Componenten der Geschwindigkeit von  $G$  grade vor dem Stoss parallel zur Tangente bez. Normalen in  $A$ ;  $u, v$  die Componenten der Geschwindigkeit zur Zeit  $t$  nach dem Beginn des Stosses, aber ehe er zu Ende ist, so dass also  $t$  unbegrenzt

klein ist.  $\Omega$  sei die Winkelgeschwindigkeit des Körpers mit dem Schwerpunkt  $G$  grade vor dem Stoss,  $\omega$  die Winkelgeschwindigkeit nach dem



Intervall  $t$ . Sie werden positiv genommen, wenn sie rotiren wie die Zeiger einer Uhr.  $M$  sei die Masse des Körpers,  $k$  sein Trägheitsradius um  $G$ .  $GN$  sei ein Loth von  $G$  auf die Tangente in  $A$  und  $AN = x$ ,  $NG = y$ . Dieselben Buchstaben mit einem Strich bezeichnen die entsprechenden Grössen für den andern Körper.

§ 188. Die Körper seien *vollkommen rauh und unelastisch*, so dass beim Ende des Stosses die relative Geschwindigkeit des Gleitens sowohl als die relative Geschwindigkeit der Compression Null sind (siehe § 156). Nimmt man alsdann an,  $t$  sei der ganzen Dauer des Stosses gleich, so beziehen sich die Buchstaben  $u, v, \omega, u', v', \omega'$  auf die Bewegung gleich nach dem Stoss. Wir erhalten dann nach § 137

$$\left. \begin{aligned} u - y\omega - u' - y'\omega' &= 0 \\ v + x\omega - v' - x'\omega' &= 0 \end{aligned} \right\}.$$

Die Componenten parallel zur Tangente und Normalen im Berührungspunkte ergeben nach § 169

$$\left. \begin{aligned} M(u - U) + M'(u' - U') &= 0 \\ M(v - V) + M'(v' - V') &= 0 \end{aligned} \right\}$$

und nimmt man die Momente für jeden Körper um den Berührungspunkt

$$\left. \begin{aligned} Mh^2(\omega - \Omega) + M(u - U)y - M(v - V)x &= 0 \\ M'k'^2(\omega' - \Omega') + M'(u' - U')y' - M'(v' - V')x' &= 0 \end{aligned} \right\}.$$

Diese sechs Gleichungen reichen zur Bestimmung der Bewegung gleich nach dem Stoss aus.

§ 189. Sind die Körper *vollkommen glatt und unelastisch*, so hat die erste dieser sechs Gleichungen keine Gültigkeit und statt der dritten erhält man aus den Componenten parallel zur Tangente für jeden einzelnen Körper

$$u - U = 0, \quad u' - U' = 0.$$

§ 190. Sind die Körper *glatt und elastisch*, so ist die Normalreaction in die Gleichungen einzuführen. Wir schreiben die Gleichungen (1) und (2), wie weiter unten in § 192, mit der einzigen Aenderung nieder, dass  $F = 0$  gesetzt wird. Gleichung (4) gibt dann die Ge-



schwindigkeit  $C$  der Compression in irgend einem Augenblick des Stosses. Setzt man  $C=0$ , so erhält man wie in Gleichung (6) den Werth von  $R$  bis zu dem Augenblick der stärksten Compression, d. h.  $R = \frac{C_0}{\alpha'}$ , und durch Multiplication mit  $1+e$  nach § 179 den vollen Werth von  $R$  für den ganzen Stoss. Substituirt man dann diesen Werth in die Gleichungen (1) und (2), so ergibt sich  $u, v, \omega, u', v', \omega'$ .

§ 191. Beisp. Zwei glatte vollkommen elastische Körper stossen gegeneinander.  $D, D'$  seien die Componenten der Geschwindigkeit des Berührungspunkts eines jeden grade vor dem Zusammenstoss mit dem andern in der Richtung der Normalen. Man beweise, dass die vom Körper  $M$  verlorene lebendige Kraft  $\frac{C_0}{\alpha'^2} \left( D' \frac{k^2 + \alpha^2}{Mk^2} - D \frac{k'^2 + \alpha'^2}{M'k'^2} \right)$  ist, wobei die Bezeichnung dieselbe, wie in dem nächsten Satz ist.

Eine andre Art, die Aenderung der lebendigen Kraft zu finden, wird in Kapitel VII gegeben.

§ 192. Sind nun ferner *die Körper unvollkommen rauh und elastisch*, so ist die Grösse der Reibung, die zur Wirkung gebracht werden kann, wie in § 158 erklärt wurde, begrenzt. Die in § 188 erhaltenen Resultate sind auf den Fall nicht anwendbar, in welchem die Grenzgrösse der Reibung nicht ausreicht, das relative Gleiten auf Null zu reduciren. Um darüber eine Entscheidung treffen zu können, muss man den Reibungs- und Normalstoss in die Gleichungen einführen.

$R$  sei die ganze dem Körper  $M$  in der Zeit  $t$  nach Beginn des Stosses durch den Normaldruck und  $F$  die durch den Reibungsdruck mitgetheilte Bewegungsgrösse. Wir nehmen an, sie griffen an dem Körper, dessen Masse  $M$  ist, in den Richtungen  $NG$  bez.  $NA$  an. Man muss dann voraussetzen, dass sie auf den Körper von der Masse  $M'$  in umgekehrter Richtung wirken.

Da  $R$  die ganze dem Körper  $M$  in der Richtung der Normalen mitgetheilte Bewegungsgrösse darstellt, so ist die in der Zeit  $dt$  mitgetheilte Bewegungsgrösse  $dR$ . Da die Körper nur gegeneinander stossen können, so muss  $dR$  positiv sein und die Körper müssen sich nach § 136, wenn  $dR$  verschwindet, voneinander trennen. Man kann daher die Grösse von  $R$  zum Maass des Fortschritts des Stosses nehmen. Sie ist im Anfang Null, vermehrt sich nach und nach und wird bei der Beendigung des Zusammenstosses ein Maximum. Es ist, wie man finden wird, vortheilhafter,  $R$  anstatt  $t$  zur unabhängigen Variablen zu wählen.

Die dynamischen Gleichungen sind nach § 168

$$\left. \begin{aligned} M(u - U) &= -F \\ M(v - V) &= R \\ Mk^2(\omega - \Omega) &= Fy + Rx \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (1),$$

$$\left. \begin{aligned} M'(u' - U') &= F \\ M'(v' - V') &= -R \\ M'k^2(\omega' - \Omega') &= Fy' - Rx' \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (2)$$

Die relative Geschwindigkeit des Gleitens der Berührungspunkte ist nach § 137

$$S = u - y\omega - u' - y'\omega' \dots \dots \dots (3)$$

und die relative Druckgeschwindigkeit nach demselben Paragraphen

$$C = v' + x'\omega' - v - x\omega \dots \dots \dots (4)$$

Substituirt man in diese Gleichungen aus den dynamischen Gleichungen, so ergibt sich

$$S = S_0 - aF - bR \dots \dots \dots (5)$$

$$C = C_0 - bF - a'R \dots \dots \dots (6)$$

worin

$$S_0 = U - y\Omega - U' - y'\Omega' \dots \dots \dots (7)$$

$$C_0 = V' + x'\Omega' - V - x\Omega \dots \dots \dots (8)$$

$$a = \frac{1}{M} + \frac{1}{M'} + \frac{y^2}{Mk^2} + \frac{y'^2}{M'k'^2} \dots \dots \dots (9)$$

$$a' = \frac{1}{M} + \frac{1}{M'} + \frac{x^2}{Mk^2} + \frac{x'^2}{M'k'^2} \dots \dots \dots (10)$$

$$b = \frac{xy}{Mk^2} - \frac{x'y'}{M'k'^2} \dots \dots \dots (11)$$

sind.

Man kann die fünf letzten Grössen die Constanten des Stosses nennen. Die beiden ersten  $S_0$ ,  $C_0$  stellen die Anfangsgeschwindigkeiten des Gleitens und der Compression dar. Wir sehen sie als positiv an, so dass also der Körper  $M$  über den Körper  $M'$  beim Beginn der Compression gleitet. Die drei andern Constanten  $a$ ,  $a'$ ,  $b$  sind von der Anfangsbewegung der aufeinander treffenden Körper unabhängig. Die Constanten  $a$  und  $a'$  sind ihrem Wesen nach positiv während  $b$  jedes der beiden Vorzeichen haben kann. Es wird von Vorthail sein, wenn man beachtet, dass  $aa' > b^2$  ist.

§ 193. Der darstellende Punkt. Es kommt oft vor, dass  $b = 0$  wird, in welchem Fall die Discussion der Gleichungen sich sehr vereinfacht. Aber auch in diesem einfachen, ganz gewiss jedoch im allgemeinen Fall, ist es leichter den Aenderungen der Kräfte zu folgen wenn man die graphische Methode anwendet.

Es handelt sich um das Folgende. Während  $R$  von Null an mittelst gleicher fortgesetzter Zuwächse  $dR$  zu seinem schliesslichen Maximalwerth vorschreitet, rückt auch  $F$  von Null an durch fortgesetzte Zuwächse  $dF$  vor, welche jedoch nicht immer dasselbe Vorzeichen zu haben brauchen und die durch ein veränderliches Gesetz beherrscht werden da entweder  $dF = \pm \mu dR$  ist oder  $dF$  grade ausreicht, relative Be-

wegung, wie in § 158 erklärt wurde, am Berührungspunkt zu verhüten. Wir bedürfen daher einer Regel, um den Werth von  $F$  zu entdecken.

Um die thatsächlichen Aenderungen, welche in dem Reibungsstoss beim Fortschreiten des Stosses vor sich gehen, bestimmen zu können, wollen wir zwei Längen  $AR$ ,  $AF$  auf der Normalen und Tangente in  $A$  in den Richtungen  $NG$  bez.  $AN$  auftragen, welche die Grösse von  $R$  und  $F$  in irgend einem Moment des Stosses darstellen. Sehen wir dann  $AR$  und  $AF$  als Coordinaten eines Punktes  $P$  an, auf  $AR$ ,  $AF$  als Axen der  $R$  und  $F$  bezogen, so geben die Aenderungen in der Lage von  $P$  dem Auge die Aenderungen an, welche in den Kräften beim Fortschreiten des Stosses vor sich gehen. Beim Beginn des Stosses sind die Kräfte  $R$  und  $F$  Null, der darstellende Punkt  $P$  liegt daher im Coordinatenanfang  $A$ . Beim Fortschreiten des Stosses wächst nun die Kraft  $R$  und daher auch die Abscisse  $AR$  von  $P$  beständig, das heisst, die Componente der Bewegung des darstellenden Punktes parallel zur  $R$ -Axe liegt stets in der positiven Richtung der  $R$ -Axe. Die Ordinate  $F$  von  $P$  wird in der entgegengesetzten Richtung gemessen, in welcher die Reibung auf den Körper  $M$  einwirkt; die Componente der Bewegung des darstellenden Punktes parallel zur  $F$ -Axe zeigt folglich dem Auge die Richtung an, in welcher der Körper  $M$  gleitet. Dies kann während des Stosses manchmal die eine, manchmal die andere sein.

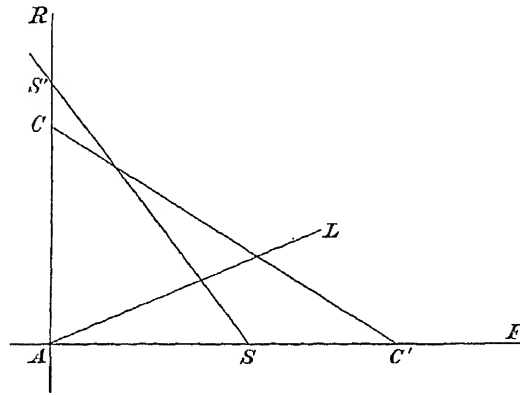
Es wird gut sein, die beiden geometrischen Orte aufzutragen, die durch  $S=0$ ,  $C=0$  bestimmt werden. Aus (5) und (6) ist ersichtlich, dass beide grade Linien sind. Wir wollen sie die Geraden *keines Gleitens* und *der stärksten Compression* nennen. Um sie aufzeichnen zu können, müssen wir ihre Durchschnittspunkte mit den Axen der  $F$  und  $R$  finden. Macht man

$$AC = \frac{C_0}{a}, \quad AS = \frac{S_0}{a}, \quad AC' = \frac{C_0}{b}, \quad AS' = \frac{S_0}{b},$$

so sind  $SS'$ ,  $CC'$  die beiden Geraden. Da  $a$  und  $a'$  nothwendiger Weise positiv sind und  $b$  ein beliebiges Vorzeichen hat, so sind die Strecken, die sie auf der  $F$ - bez.  $R$ -Axe abschneiden, *positiv*, während die auf der  $R$ - bez.  $F$ -Axe gelegenen *dasselbe Vorzeichen* haben. Weil  $aa' > b^2$  ist, so ist der spitze Winkel, den die Gerade keines Gleitens mit der  $F$ -Axe macht, grösser, als der, den die Grade stärkster Compression mit derselben Axe macht, das heisst, die erste Linie steht steiler gegen die  $F$ -Axe als die letzte. Daraus folgt, dass die beiden Geraden sich nicht in dem von den Verlängerungen von  $RA$  und von  $FA$  begrenzten Quadranten schneiden können.

§ 194. Beim Beginn des Zusammenstosses gleiten die Körper übereinander; daher wird nach § 158 die ganze Grenzgrösse der Reibung zur Wirkung gebracht. Der Punkt  $P$  bewegt sich daher auf der

Geraden  $AL$ , die durch die Gleichung  $F = \mu R$  definiert ist, unter  $\mu$  den Reibungscoefficienten verstanden. Die Reibung fährt fort, ihren Grenzwert zu behalten, bis  $P$  die Gerade  $SS'$  erreicht. Die Abscisse des Durchschnittspunktes ist  $R_0 = \frac{S_0}{a\mu + b}$ . Sie gibt den ganzen normal gerichteten Schlag an vom Beginn des Stosses bis zu der Zeit, zu



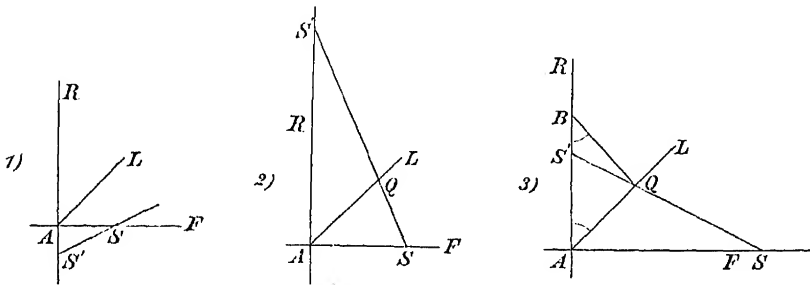
welcher die Reibung von gleitender zu wälzender übergehen kann. Ist  $R_0$  negativ, so schneiden sich die Geraden  $AL$  und  $SS'$  auf der positiven Seite der  $F$ -Achse überhaupt nicht. Alsdann behält die Reibung ihren Grenzwert während des ganzen Stosses. Ist dagegen  $R_0$  positiv, so erreicht der darstellende Punkt  $P$  die Gerade  $SS'$  und nach

dieser Zeit tritt nur soviel Reibung in Wirkung, als hinreicht, um Gleiten zu verhüten, vorausgesetzt, dass diese Grösse kleiner als der Grenzwert der Reibung ist. Ist der spitze Winkel, den  $SS'$  mit der  $R$ -Achse bildet, kleiner als  $\arctan \mu$ , so ist die Reibung  $dF$ , die notwendig ist, um Gleiten zu verhindern, kleiner als der Grenzwert der Reibung  $\mu dR$ .  $P$  wandert daher weiter auf  $SS'$  in solcher Richtung, dass die Abscisse  $R$  fortfährt, in positivem Sinn zu wachsen und dabei erreicht die Reibung, so lange der Stoss dauert, ihren Grenzwert nicht wieder.

Ist dagegen der spitze Winkel, den  $SS'$  mit der  $R$ -Achse macht, grösser als  $\arctan \mu$ , so ist das Verhältniss von  $dF$  zu  $dR$  numerisch grösser als  $\mu$  und es ist mehr Reibung nöthig um Gleiten zu verhüten, als zur Wirkung gebracht werden kann. Die Reibung fährt daher fort ihren Grenzwert zu behalten und der Punkt  $P$  bewegt sich, nachdem er  $SS'$  erreicht hat, auf einer Geraden, die denselben Winkel mit der  $R$ -Achse wie  $AL$  macht. Diese Gerade muss auf der entgegengesetzten Seite von  $SS'$  liegen, weil der spitze Winkel zwischen  $SS'$  und  $AR$  grösser als der Winkel  $LAR$  ist. Da ferner der Punkt  $P$  die Linie  $SS'$  gekreuzt hat, so ändert sich die Richtung des relativen Gleitens und mithin auch die Richtung der Reibung. Offenbar behält dann die Reibung während des ganzen Stosses ihren Grenzwert.

Ein Beispiel zu jedem der drei Fälle geben wir in den drei Diagrammen auf S. 175. Die Figuren unterscheiden sich durch die Lage der Geraden keines Gleitens. In allen drei Figuren bewegt sich der darstellende Punkt von  $A$  aus auf der Geraden  $AL$ , die mit  $AR$  den

Winkel  $LAR$  einschliesst, dessen Tangente  $\mu$  ist. In Fig. (1) ist der Winkel zwischen der Geraden keines Gleitens d. h.  $SS'$  und  $AR$  so gross, dass  $AL$  und  $SS'$  sich in dem positiven Quadranten nicht schneiden. Die Reibung behält daher während des ganzen Stosses ihren Grenzwert. In den beiden andern Figuren schneiden sich  $AL$



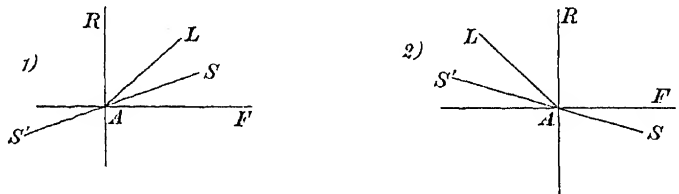
und  $SS'$  in einem Punkt  $Q$ . In Fig. (2) ist der Winkel  $SS'A$  kleiner als der Winkel  $LAR$ , der darstellende Punkt wandert daher, nachdem er  $Q$  erreicht hat, auf  $QS'$  weiter. In Fig. (3) ist der Winkel  $SS'A$  grösser als  $LAR$ , der darstellende Punkt bewegt sich also, nachdem er in  $Q$  angekommen, auf der Geraden  $QB$  auf der andern Seite von  $SS'$  derart weiter, dass der Winkel  $QBA$  dem Winkel  $QAR$  gleich ist.

Trifft  $P$  auf die Gerade  $CC'$ , so hört die Compression auf und die Restitution beginnt. Der Durchgang ist aber durch weiter keine Eigentümlichkeit als diese ausgezeichnet. Ist  $R_1$  die Abscisse des Kreuzungspunkts von  $P$  mit  $CC'$ , so endigt der ganze Stoss, wie man aus Gründen, die auf Versuchen beruhen, annimmt, wenn  $R_2$ , die Abscisse von  $P$ , gleich  $R_1(1 + e)$  wird, unter  $e$  das Maass der Elasticität der beiden Körper verstanden.

Offenbar gibt es sehr viele verschiedene Fälle, je nach der relativen Lage der drei Geraden  $AL$ ,  $SS'$  und  $CC'$ ; immer aber lässt sich das Fortschreiten des Stosses auf die eben erklärte Art verfolgen, die kurz auf folgende Weise zusammenfassen kann. *Der darstellende Punkt  $P$  wandert auf  $AL$ , bis er  $SS'$  trifft. Dann schreitet er entweder  $SS'$  weiter oder auf einer Geraden, die mit der  $R$ -Axe denselben Winkel wie  $AL$  macht, aber auf der entgegengesetzten Seite von  $SS'$  liegt, auf welcher er weitergeht, ist diejenige von beiden, die am nächsten auf der  $F$ -Axe steht. Er wandert auf dieser Linie in solcher Weise weiter, dass die Abscisse  $R$  sich vergrössert und bleibt auf der Geraden bis zum Ende des Stosses. Den vollen Werth von  $R$  für den ganzen Stoss findet man durch Multiplication der Abscisse des Punktes, welchem  $P$  die Gerade  $CC'$  kreuzt, mit  $1 + e$ . Der volle Werth von  $x$  ist die entsprechende Ordinate von  $P$ . Setzt man sie in die dynamischen Gleichungen (1) und (2) ein, so lässt sich die Bewegung grade nach der Collision leicht ermitteln.*

Ist  $S_0 = 0$ , so wird  $S = -aF - bR$ . In diesem Fall geht die Gerade keines Gleitens durch den Koordinatenanfang  $A$ . Ist der spitze Winkel, den diese Gerade mit der  $R$ -Axe macht, kleiner als  $\arctan \mu$ , d. h. ist  $\frac{b}{a}$  numerisch kleiner als  $\mu$ , so bewegt sich der darstellende Punkt auf ihr in solcher Richtung, dass seine Abscisse  $R$  beständig wächst. Die Reibung bleibt daher während des ganzen Stosses kleiner als ihr Grenzwert.

Ist dagegen der spitze Winkel, den die Linie keines Gleitens mit der  $R$ -Axe macht, grösser als  $\arctan \mu$ , d. h. ist  $\frac{b}{a}$  numerisch grösser als  $\mu$ , so bewegt sich der darstellende Punkt auf der Geraden  $AL$ , welche mit der  $R$ -Axe den spitzen Winkel  $LAR = \arctan \mu$  bildet. Die Gerade liegt auf der positiven oder negativen Seite von  $AR$ , je nachdem  $S$  positiv oder negativ ist. Da der numerische Werth von  $b$  grösser als  $a\mu$  und  $F = \pm \mu R$  ist, so hängt das Vorzeichen von  $S$  von dem Vorzeichen von  $-bR$  ab und hat daher  $S$  das entgegengesetzte Zeichen von  $b$ . Daraus folgt, dass die Gerade  $AL$  innerhalb des spitzen Winkels liegt, den die Linie keines Gleitens mit  $AR$  macht.



So liegt  $AL$  in Fig. (1) auf der positiven, in Fig. (2) auf der negativen Seite von  $AR$ . Da  $AL$  die Linie keines Gleitens nicht noch einmal treffen kann, so behält die Reibung ihren Grenzwert während des ganzen Stosses.

Der darstellende Punkt verfolgt seinen Weg entweder auf  $SS'$  oder auf  $AL$ , je nachdem der Fall liegt, bis zu dem Ende des Stosses. Der volle Werth von  $R$  für den ganzen Stoss ergibt sich durch Multiplication der Abscisse des Punktes, in welchem  $P$  die Gerade  $CC'$  kreuzt, mit  $1 + e$ . Der volle Werth von  $F$  ist die entsprechende Ordinate von  $P$ . Setzt man sie in die dynamischen Gleichungen, so findet man die Bewegung grade nach dem Stoss.

§ 195. Sind die Körper glatt, so fällt die Gerade  $AL$  mit der  $R$ -Axe zusammen. Der darstellende Punkt  $P$  bewegt sich auf der  $R$ -Axe und den vollen Werth von  $R$  für den ganzen Stoss erhält man durch Multiplication der Abscisse von  $C$  mit  $1 + e$ .

Sind die Körper vollkommen rauh (§ 156), so fällt  $AL$  mit der  $F$ -Axe zusammen. Der darstellende Punkt  $P$  bewegt sich auf der  $F$ -Axe, bis er an dem Punkt  $S$  anlangt. Er wandert dann auf der Linie



In der Figur S. 177 stellt die Ebene des Papiers eine horizontale durch den Mittelpunkt der Kugel gelegte Ebene vor. Die verticale Ebene, gegen welche der Ball anstösst, schneidet die Ebene des Papiers in  $AS$ .

$u, v$  seien die Componenten der Geschwindigkeit des Centrums zur Zeit  $t$  nach dem Beginn des Zusammenstosses längs der Wand und senkrecht zu ihr.  $\omega$  sei die Winkelgeschwindigkeit in demselben Moment;  $R$  und  $F$  die Normal- und Reibungsstösse vom Beginn des Zusammenstosses bis zur Zeit  $t$ ;  $M$  die Masse und  $r$  der Radius der Kugel.

Man erhält dann

$$\left. \begin{aligned} M(u - V \sin \alpha) &= -F \\ M(v + V \cos \alpha) &= R \\ Mk^2 \omega &= Fr \end{aligned} \right\}.$$

Die Geschwindigkeit des Gleitens des Berührungspunktes ist

$$S = u - r\omega = V \sin \alpha - \frac{r^2 + k^2}{k^2} \frac{F}{M}$$

und die Geschwindigkeit der Compression des Berührungspunktes

$$C = -v = V \cos \alpha - \frac{R}{M}.$$

Man trage in der Figur eine Länge  $AS$ , die  $\frac{k^2}{r^2 + k^2} MV \sin \alpha$  und eine andre  $AC$ , die  $MV \cos \alpha$  darstellt, auf der  $F$ - bez. der  $R$ -Axe auf.  $SB$  und  $CB$  parallel zu den Richtungen von  $R$  und  $F$  sind dann die Linien *keines Gleitens* und der *stärksten Compression*. Man sieht auch, dass  $\tan BAC = \frac{k^2}{r^2 + k^2} \tan \alpha = \frac{2}{7} \tan \alpha$  ist. Im Anfang des Stosses gleitet die Kugel auf der Wand; der darstellende Punkt  $P$ , dessen Coordinaten  $R$  und  $F$  sind, beginnt daher die Gerade  $F = \mu R$  zu beschreiben.

Ist  $\mu > \frac{2}{7} \tan \alpha$ , so schneidet diese Gerade die Linie *keines Gleitens*  $SB$  in einem Punkt  $L$ , bevor sie die Linie der grössten Compression trifft. Der darstellende Punkt beschreibt daher die gebrochene Linie  $ALB$ . Im Moment der grössten Compression sind  $F$  und  $R$  die Coordinaten von  $B$ .

Daher ist

$$F = \frac{2}{7} MV \sin \alpha, \quad R = MV \cos \alpha.$$

Sie sind unabhängig von  $\mu$ , weil, wie man aus der Figur sieht, mehr als genug Reibung zur Wirkung gebracht werden kann, um die gleitende Bewegung zu zerstören.

Ist  $\mu < \frac{2}{7} \tan \alpha$ , so schneidet die Gerade  $F = \mu R$  die Linie der grössten Compression  $CB$  in einem Punkt  $H$ , bevor sie die Linie *keines Gleitens* trifft. Die Reibung reicht daher nicht aus, das Gleiten zu zerstören. In dem Moment der grössten Compression sind die Coordinaten von  $H$

$$F = \mu MV \cos \alpha, \quad R = MV \cos \alpha.$$

Wenn die Kugel unelastisch ist, so hat man diese Werthe von  $F$  und  $R$  nur in die Bewegungsgleichungen einzusetzen, um die Werthe von  $u, v, \omega$  grade nach dem Zusammenstoss zu finden.

Ist die Kugel unvollkommen elastisch und hat den Elasticitätscoefficienten  $e$ , so setzt der darstellende Punkt  $P$  seinen Weg fort, bis seine Abscisse  $R$  den Werth erreicht hat

$$R = MV \cos \alpha (1 + e).$$



wird, wie zuvor,  $\operatorname{tg} B'AC' = \frac{2}{7} \frac{\operatorname{tg} \alpha}{1+e}$ .

Ist  $\mu > \frac{2}{7} \frac{\operatorname{tg} \alpha}{1+e}$ , so beschreibt der darstellende Punkt eine gebrochene Linie wie  $ALB'$  und schneidet  $GB'$ , bevor er  $B'C'$  trifft. In diesem Fall sind  $F$  und  $R$  die Coordinaten von  $B'$ ,

$$F = \frac{2}{7} MV \sin \alpha, \quad R = MV \cos \alpha (1+e).$$

Ist  $\mu < \frac{2}{7} \frac{\operatorname{tg} \alpha}{1+e}$ , so beschreibt der darstellende Punkt eine nicht gebrochene Linie, etwa  $AHK$ , und schneidet  $B'C'$ , ehe er  $SB'$  trifft. In diesem Fall sind  $F$  und  $R$  die Coordinaten von  $K$ ,

$$F = \mu MV \cos \alpha (1+e), \quad R = MV \cos \alpha (1+e).$$

Wenn  $\beta$  den Winkel bedeutet, den die Bewegungsrichtung des Centrums des Balls mit der Normalen zur Wand nach dem Stoss macht, so ist  $\operatorname{tg} \beta = \frac{u}{v}$ . Man erhält daher

$$\operatorname{tg} \beta = \frac{5}{7} \frac{\operatorname{tg} \alpha}{e}, \quad \text{oder} \quad = \frac{\operatorname{tg} \alpha - \mu(1+e)}{e},$$

je nachdem  $\mu$  grösser oder kleiner als  $\frac{2}{7} \frac{\operatorname{tg} \alpha}{1+e}$  ist.

Beisp. 2. Ein unvollkommen elastischer Cricketball wird so geworfen, dass er mit der Winkelgeschwindigkeit  $\Omega$  um eine horizontale Axe rotirt, die auf der Ebene der von seinem Centrum beschriebenen Parabel senkrecht steht. Grade, ehe er den Boden trifft, hat sein Centrum die Geschwindigkeit  $V$  und macht die Richtung seiner Bewegung mit der Normalen den Winkel  $\alpha$ . Man zeige, dass der Abprallwinkel  $\beta$  entweder durch

$$e \operatorname{tg} \beta = \frac{5}{7} \operatorname{tg} \alpha + \frac{2}{7} \frac{r \Omega}{V \cos \alpha}, \quad \text{oder} \quad = \operatorname{tg} \alpha - \mu(1+e)$$

gegeben ist, je nachdem  $\mu$  grösser oder kleiner als

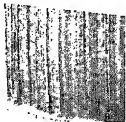
$$\frac{2}{7} \left[ \operatorname{tg} \alpha - \frac{r \Omega}{V \cos \alpha} \right] \frac{1}{1+e}$$

ist.

Beisp. 3. Eine Kugel vom Radius  $a$  rollt auf dem Boden mit der Geschwindigkeit  $U$  und stösst normal gegen eine verticale Wand, deren Reibungs- und Elasticitätscoefficienten  $\mu$  und  $e$  sind. Ist  $\mu(1+e) > \frac{2}{7}$ , so endigt <sup>d</sup> Gleiten vor dem Ende der Stossperiode und die Kugel prallt daher mit horizontalen Geschwindigkeit  $-Ue$  und der verticalen  $\frac{2}{7}U$  ab, wie man <sup>f</sup> wenn man die Momente um den Berührungspunkt nimmt. Das Centrum der beschreibt darauf eine Parabel und die Kugel trifft später den Boden. <sup>f</sup> Boden unelastisch und sein Reibungscoefficient  $\mu' < e + \frac{2}{7}$ , so hört das <sup>f</sup> nicht vor dem Ende des Stosses auf. Am Ende des Stosses hat das Centru.

Kugel die Geschwindigkeit  $-U(e - \frac{2}{7}\mu')$  und die Winkelgeschwindigkeit  $(2 - 5\mu)$ . Die Reibung fährt fort, als endliche Kraft zu wirken, so dass die Kugel schliesslich auf dem Boden mit der gleichförmigen Geschwindigkeit  $-\frac{5}{7}U(e - \frac{4}{35})$  ro<sup>h</sup>.

Beisp. 4. Eine dünne gleichförmige Schale von der Gestalt einer Ha und dem Radius  $a$ , deren Basis vertical steht, rotirt mit der Winkelgeschwindigkeit  $\Omega$  um eine horizontale, durch ihren Schwerpunkt gehende und der parallele Axe. Sie wird mit einem Punkt ihrer Basis in Berührung mit



festen, rauhen, horizontalen Ebene gebracht. Der Elasticitätscoefficient ist  $e$ ; der Reibungscoefficient grösser als 2. Man beweise, dass der Berührungspunkt der Schale mit der Ebene sich nach dem Zusammenstoss in verticaler Richtung mit der Geschwindigkeit  $\frac{5}{34}ae\Omega$  zu bewegen beginnt.

§ 198. Beisp. 1. Man zeige, dass der darstellende Punkt  $P$ , wenn er sich so, wie es oben beschrieben wurde, bewegt, die Linie der stärksten Compression kreuzen und dass die Abscisse  $R$  des Kreuzungspunktes positiv sein muss.

Beisp. 2. Man zeige, dass der Kegelschnitt, dessen Gleichung, auf die  $R$ - und  $F$ -Axe bezogen,  $aF^2 + 2bFR + a'R^2 = \varepsilon$  ist, unter  $\varepsilon$  eine Constante verstanden eine Ellipse ist und dass die Geraden keines Gleitens und stärkster Compression den zu der  $F$ - bez.  $R$ -Axe conjugirten Durchmessern parallel sind. Man zeige auch, dass der Durchschnittspunkt der Geraden keines Gleitens und stärkster Compression in dem von den conjugirten Durchmessern gebildeten Winkel liegt, welcher den ersten Quadranten enthält oder in diesem Quadranten enthalten ist.

Beisp. 3. Zwei Körper, von denen jeder um einen festen Punkt rotirt, stossen widereinander; man suche die Bewegung grade nach dem Stoss.

$G, G'$  in der Fig. auf S. 170 seien die festliegenden Punkte. Nimmt man die Momente um die festen Punkte, so kommt man nahezu zu denselben Resultaten, wie in dem dort betrachteten Fall.

Beisp. 4. Man zeige, dass die bei dem Zusammenstoss zweier Körper verloren gehende lebendige Kraft aus einer der beiden Formeln

$$\begin{aligned} \text{verlorene lebendige Kraft} &= 2FS_0 + 2RC_0 - aF^2 - 2bFR - a'R^2 \\ &= \frac{(aC_0^2 - 2bS_0C_0 + a'S_0^2) - (aC^2 - 2bSC + aS^2)}{aa' - b^2} \end{aligned}$$

gefunden werden kann, wenn man unter  $F, R$  die ganze zur Wirkung kommende Reibungs- bez. normal gerichtete Kraft und unter  $C_0, S_0, C, S$  die Anfangs- und Endwerthe der Compressions- bez. Gleitungsgeschwindigkeit versteht. Sind die Körper vollkommen rauh und unelastisch, so ist  $C$  sowohl als  $S$  Null.

## Anfangsbewegungen.

§ 199. Bruch einer Stütze. Ein System von Körpern befinde sich im Gleichgewicht und eine seiner Stützen gebe plötzlich nach. Man suche die Anfangsbewegungen der verschiedenen Körper und die Anfangswerthe der zwischen ihnen bestehenden Reactionen.

Das Problem, die Anfangsbewegung eines dynamischen Systems zu ermitteln, wird dadurch gelöst, dass man die Coordinaten der sich bewegenden materiellen Punkte in Potenzen der Zeit  $t$  entwickelt.  $(x, y, \theta)$  seien die Coordinaten eines Körpers des Systems. Der Kürze halber möge der Index Null die Anfangswerthe bezeichnen. So gebe  $\frac{d^2x_0}{dt^2}$  den Anfangswerth von  $\frac{d^2x}{dt^2}$  an. Nach Taylor's Theorem ist

$$x = a + \frac{d^2x_0}{dt^2} \cdot \frac{t^2}{2!} + \frac{d^3x_0}{dt^3} \cdot \frac{t^3}{3!} + \dots \quad (1),$$

worin  $\frac{dx_0}{dt}$  weggelassen wurde, weil der Voraussetzung nach das System